7/6

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलनकलन

जिसे

बनारस संस्कृतकालेज के पुस्तकालयाध्यक्ष
श्रीपण्डितसुधाकरद्विवेदी ने
बनाया ।

गवर्नमेन्ट की आज्ञा से

बनारस

मेडिकल्-हाल् नामक यन्त्रालय में मुद्रित हुआ ।

संवत् १९४३ ।

A HINDÍ TREATISE
ON THE
DIFFERENTIAL CALCULUS

BY

PANDIT SUDHÁKARA DVIVEDÍ
(LIBRARIAN, SANSKRIT COLLEGE, BENARES)

PRINTED BY ORDER OF GOVERNMENT.

BENARES:
PRINTED BY E. J. LAZARUS AND CO., MEDICAL HALL PRESS.

1886.

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलनकलन

जिसे

बनारस संस्कृतकालेज के पुस्तकालयाध्यक्ष
श्रीपण्डितसुधाकरद्विवेदी ने
बनाया ।

गवर्नमेन्ट की आज्ञा से

बनारस
मेडिकल्-हाल् नामक यन्त्रालय में मुद्रित हुआ ।

संवत् १९४३ ।

A HINDÍ TREATISE
ON THE
DIFFERENTIAL CALCULUS

BY

PANDIT SUDHÁKARA DVIVEDÍ
(LIBRARIAN, SANSKRIT COLLEGE, BENARES)

PRINTED BY ORDER OF GOVERNMENT.

BENARES:
PRINTED BY E. J. LAZARUS AND CO., MEDICAL HALL PRESS.

1886.

Dedicated

BY PERMISSION

TO

HIS HONOUR SIR ALFRED LYALL, K. C. B., C. I. E.,

LIEUTENANT GOVERNOR OF THE NORTH-WESTERN PROVINCES

AND

CHIEF COMMISSIONER OF OUDH

BY

HIS OBEDIENT SERVANT

SUDHÁKARA DVIVEDÍ

INTRODUCTION.

It is matter for surprise and regret that notwithstanding her numerous population and the unquestionable ability of her inhabitants India has in modern times contributed absolutely nothing to our stock of scientific knowledge. No doubt many causes have combined to bring about this intellectual stagnation, but as certainly one of the principal is that with the exception of a few scattered pamphlets and primers no works treating of the higher branches of modern science have been published in the vernacular. Students desiring to go beyond the mere elements have been compelled to do so through the medium of English, and lack of knowledge of this language has debarred many by nature and bent of mind fitted for scientific pursuits from following their inclinations. Moreover it is a common observation that great linguistic and great scientific abilities are rarely united in one person; so that those who through their knowledge of English are in a position to avail themselves of scientific treatises, are often those least likely to profit therefrom: in addition to which it may be remarked that to comprehend a scientific argument in a foreign language is one thing; and to evolve new facts for oneself in it is another: and one which very few men ever attain to.

The present volume has been written with a view to partially remedying this defect so far as mathematics is

concerned. It is for India an entirely new departure and the author deserves every encouragement. I believe he intends, if the book be successful, to follow it up by a series of treatises on different branches of the higher mathematics, including Analytical Geometry, the Integral Calculus and Quaternions. It is to be hoped that he may succeed in doing so: and that in a few years an Indian student may be able to pursue his studies right through his University Course in his own language.

The difficulties in compiling such a work as the present are greater than appear at first sight. In the first instance all the technical terms have to be coined and much of the success in imparting knowledge depends on the use of terms which shall clearly and unambiguously express the desired meaning without connoting anything indefinite or irrelevant. Then again this difficulty being overcome something more than a mere translation is requisite because every language has its own peculiar modes of expression: and in a subject like the Calculus, where clearness of reasoning is all important, an argument which seems perfectly plain in English may be very far from plain when literally translated into an Oriental language.

Of the way in which the Author has performed his task his fellow-countrymen will be better qualified than I am to judge. The technical terms have been taken from the Sanskrit: and I believe the Professor of Sanskrit in the Benares College has pronounced them accurate and elegant renderings of the English originals. The general plan of the book follows that of the well-known treatise

by Todhunter, but much additional and original matter has been introduced; and in many cases (especially in treating of Vanishing Fractions) Todhunter's methods have been materially simplified. In the Geometrical portion the Author has had to introduce some explanatory sections on Analytical Geometry and Conic sections, as there is no treatise in vernacular on these subjects. This no doubt is somewhat anomalous in a book whose subject is simply the Differential Calculus; but there was no help for it in the present case, and it is to be hoped that by the time this reaches its second edition other treatises specially devoted to these subjects will have rendered these sections unnecessary.

J. R. HOLT, C. S.,
Asst. Magistrate, Banda.

PREFACE.

By the term "Differential Calculus" we have to understand that mathematical method which enables us to solve problems of the following nature :—

$y=x^4$ and $y'=(x+h)^4$; then

$$\frac{y'-y}{h}=4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3.$$

Now suppose that $h=0$, then

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{0}{0}=4x^3$$

According to the opinion of European scholars the first mathematician who employed methods akin to those of the modern differential calculus was Archimedes. From his time down to the 16th century no further progress was made in this part of Mathematics.

At that time there appeared in Europe several great men—among whom Vieta and Descartes are to be especially mentioned—who by the invention of new Algebraical and Geometrical methods greatly extended the domain of mathematical science. Particular attention then began to be paid to the theory of curves. In the first half of the 17th century Cavalieri and Roberval especially applied themselves to the theory of Indivisibles and Fluxions. Roberval was the first to view curved lines as produced by the motion of a point and to show how the direction of the tangent may be found from the nature of the curve.

After this Wallis wrote a work called Arithmetic of Infinities in which many problems of the Integral Calculus were solved and which contained many hints for the solution of new theorems. Finally both Newton and Leibnitz devoted their full attention to the Differential Calculus. Both of them explained the theory in different and independent ways using different technical terms. If one line depend upon another and both increase, Newton supposed the first line x to increase or flow with a velocity $\dot{x}$ in consequence of which the second increases with a velocity $\dot{y}$. Leibnitz supposed an infinitely small increase dx to be given to x, in consequence of which y receives the infinitely small increase dy. The two methods almost amount to the same thing: if we suppose an infinitely small time dt to elapse, during which the motion supposed by Newton causes the increase supposed by Leibnitz, we have $dx = \dot{x}dt$ $dy = \dot{y}dt$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

The merit of this step being granted equally to both philosophers, it only remains to ask which did most towards assigning the value of $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ or its equal $\frac{dy}{dx}$ in every possible case. Although Newton himself discovered the binomial theorem, etc., the name of the true founders of the Differential Calculus should be given to Leibnitz and the Bernoullis.

In this way the knowledge of the Differential Calculus spread in Europe and the Notation of Leibnitz is now used by almost all the Mathematicians of the world.

The above is a brief account of the discovery of the Differential Calculus in Europe. Now I shall attempt

to show in whose mind the notion of the Differential Calculus first arose in India.

All the ancient astronomers of India have calculated the apparent motion of the planets from their mean motion. The apparent motion of Bháskaráchárya* which he calls तात्कालिकीगति *(Velocity at that instant)* differs from the apparent motion of his predecessors. He describes his तात्कालिकीगति *(Velocity at that instant)* as follows: The method employed by former astronomers in calculating the apparent motion of the planets, viz. of taking the difference between two sines for every increment of 225 minutes is a rough one. In fact the exact difference of two sines at any instant is obtained by multiplying the co-sine of an arc by the increment of the arc divided by the radius of the circle. If we employ this difference in calculating the apparent motion of the planet we shall get the exact apparent motion of the planet. †

From this तात्कालिकीगति he has calculated the retrograde motion of the planets. If we compare the differential of the sine of an arc calculated by means of the Differential Calculus with that obtained by Bháskaráchárya we find that both amount to the same thing, that Bháskaráchárya however has proved his theory by means of the following Rule of Three:—

When cosine is equal to radius, the exact difference is sine of 225' (first sine); what exact difference will there be when cosine is given?

---

* Born in the year 1114 A. D. He finished his excellent work, "Siddhánta Śiromaṇi," in the year 1150 A. D.

† दिनान्तरस्पष्टखगान्तरं स्याद्गतिः स्फुटा तत्समयान्तराले।
(Vide Siddhánta Śiromaṇi Gaṇitádhyáya Spashṭádhikára.)

Although Bháskarácháryá found out the value of this difference, yet he had no exact idea of the proof, for he has used for the multiplier the value of the first sine instead of the increment of arc, the true multiplier. The name which he has adopted has the same signification which it has in the Differential Calculus, but it is open to question how he came to employ that term without knowing its proof. Bháshkarácháryá has attacked a number of other problems by employing this तात्कालिकीगति. The solutions of these problems suggest methods for solving problems in the Differential Calculus. Bháskáracháryá found out the differential of $\frac{r \; sine \; x}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2a \cos n}}$.* From thence the differential of $a f(x), f(x) + a, \frac{f(x)}{\phi(x)}, \sqrt{f(x)}$ can be found. Likewise Bháskarácháryá has shown† that when a variable attains the maximum value its differential vanishes, and that when a planet is either in apogee or in perigee the equation of centre vanishes. In some intermediate position the increment of the equation of centre (i. e. the differential) also vanishes. From thence follows the principle of continuous function, which is the basis of the proof of Taylor's theorem by Mr. Homersham Cox. Bháskarácháryá has mentioned in Spashṭádhikára that the apparent motion of a planet vanishes at the time of the commencement or the end of the retrograde motion. From thence it can be shown that the differen-

* फलांशखाङ्कान्तरशिञ्जिनीघ्नीत्यादि
(Vide Siddhánta Śiromaṇi Gaṇitádháya Spasṭádhikára.)

† कक्षामध्यगतिर्यग्रेखाप्रतिवृत्तसम्पाते
(Vide Siddhánta Śiromaṇi Goládhāya Spashṭádhikāra Vásanā.)

tial vanishes when a variable attains its maximum or minimum value. Bháskarácháryá has further found out the area of the surface of a sphere by dividing the surface into a number of parts, calculating their respective areas and adding them up. He has thence shown that the area of the surface is equal to the product of the circumference and the diameter. He has also demonstrated that the volume of a sphere can be obtained by multiplying the area of the surface by the diameter and dividing the product by six* He has also laid down the rule for the summation of the square and cube of natural numbers.

On carefully reviewing the works of Bháskarácháryá it thus appears that he was in no way inferior to Archimedes in respect of his methods of Differential Calculus.

After Bháskarácháryá no Hindu Mathematician improved his method of Calculus. Kamalákara, a contemporary of Newton and Leibnitz, and others criticized Bháskara's methods without even having understood them.

When first studying the works of Bháskarácházrya I began to consider whether the methods of Differential Calculus proposed by him were correct or not. After a long time and after having studied the Differential Calculus in English I came to the conclusion that Bháskarácházrya's methods were correct, but that the proofs thereof were not so. I thereupon wrote a short treatise in Sanskrit on the properties of the ellipse in which I explained several of the principles of the Differential and Integral Calculus. At the same time I began to make enqui-

---

* यत्परिध्यर्द्धविष्कम्भं वृत्तं कृत्तं किलांशुकम् ।
(Vide Siddhánta Śiromaṇi Goládháya Maddhyagaṭi Vásaná.)

ries whether any modern Indian writer had written any work on the Differential Calculus and finally met with a treatise on Maxima and Minima by L. Rám Chandra, the preface to the second edition of which was written in 1859 by DeMorgan, the famous English Mathematician I was greatly pleased to see that the interest taken by the Europeans in the spread of knowledge in India had induced the Court of Directors to give to L. Rám Chandra a reward of 2000 Rs. for a single chapter on Differential Calculus. At the same time I determined to write a treatise on the Differential Calculus which should fully explain to Hindu students all its most important theorems. In the end by the grace of the Almighty the present work was finished in 20 chapters.

In this work **तात्कालिकीगति** or **तात्कालिकवेग** is used for Differential, **तात्कालिकसम्बन्ध** for Differential Co-efficient **फ** (**य**), **फा** (**य**) for $f(x)$, $\phi(x)$, &c. $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ for $\frac{dy}{dx}$ and **फल** for Function.

The first nine chapters treat of the Differential Co-efficients, the several methods of finding successive differential co-efficients, the principles of expanding functions into series (by successive differential co-efficients), the method of indeterminate or vanishing fractions and several methods of Maxima and Minima.

The tenth chapter contains a number of remarkable results derived from the preceding nine chapters together with a number of miscellaneous problems. To these ten chapters are appended many new problems for practice. In the problems dealing with figures, only those figures are employed whose properties were known to the

ancient Hindús; for the understanding of problems dealing with other figures (curves) cannot be expected from students who do not know even their names. Therefore in the eleventh chapter the equations of various curves are explained, in other words this chapter may be considered as an introduction to Conic Sections. Chapters 12-19 are on tangents, &c., to different curves. The 20th chapter contains a number of theorems on different subjects and miscellaneous problems.

Many new methods are described in different portions of this book. For instance Mr. Todhunter in his Differential Calculus, article 160, has uselessly pointed out a second method on Indeterminate Function, because when $\frac{\psi(x)}{\phi(x)} = 1$ it is necessary that $\psi(x) - \phi(x) = 0$ will be the value of Indeterminate Function. I have given another method in article (36). In article (33) I have proved the validity of the method whose failure Mr. Hall attempted to show in the 90th article of his Differential Calculus. There Mr. Hall says that one of the values of the differential co-efficients will be infinity. Taking the example, $v, = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-a}}$, here $p = (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ therefore $\frac{dp}{dx} = \frac{x}{x^2-a^2}$; and $q = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$ $\therefore$ $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ Here if $x=a$ then each of $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} = \infty$. Hence Mr. Hall concludes the failure of his method. But when $v = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-a}}$ then $v^2 = \frac{x^2-a^2}{x-a}$. Now by the same method the value of v^2 can be found out and hence that of v by

taking the square root of v^2. Likewise many new methods are proposed as to the solutions of problems on maxima and minima, &c.

The present treatise will I hope be of interest and use to three classes of readers ; in the first place to those very numerous Indian students of Mathematics and Astronomy who know only very little English, in the second place to students of the English Colleges who will find in it a rich collection of theorems and examples, and in the third place to Europeans interested in the history and development of Indian Mathematics. But I shall consider my labour not to have been in vain, even if my treatise should have no other result but to incite other Hindu Mathematicians to criticize my work and to produce more perfect treatises on the subject.

In conclusion I beg to offer my best and warmest thanks to Dr. G. Thibaut, Principal of the Benares College, for his very kind encouragement of this work and recommendation of it to the notice of the higher authorities, and for his ever ready help in my literary pursuits.

SUDHÁKARA DVIVEDÍ.

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

भूमिका ।

वास्तव में गणितद्वारा एक प्रश्न विशेष के उत्तर करने की विधि को "चलनकलन" कहते हैं जैसे यदि $र = य^4$ और $र' = (य + च)^4$

तो $र' - र = (य + च)^4 - य^4 = 4 य^3च + 6 य^2च^2 + 4 यच^3 + च^4$

$\therefore \dfrac{र' - र}{च} = 4 य^3 + 6 य^2च + 4 यच^2 + च^3$ अब इस में मानो कि

$च = 0$ तो

$\dfrac{र' - र}{च} = \frac{0}{0} = 4 य^3$, यहां देखो कि य का चाल च के तुल्य कल्पना कर जिस विधि से $\frac{0}{0}$ इस का मान $4 य^3$ के तुल्य सिद्ध हुआ है उस विधि का नाम "चलनकलन" है परन्तु उपचार से जिस ग्रन्थ में उन विधियों का वर्णन हो उस ग्रन्थ को भी "चलनकलन" कहते हैं ।

यूरप देश के विद्वानों के मत से सब से पहले इस "चलनकलन" सम्बन्धि किसी प्रश्न का उत्तर–प्रकाशक आर्किमिडिज़् (Archimedes) है परन्तु आर्किमिडिज़् के समय से लेकर सोलहवीं शताब्दी तक फिर इस विद्या का प्रचार करने वाला कोई नहीं हुआ ।

इस के अनन्तर यूरप में एक वैटा (Vieta) नामक विद्वान उत्पन्न हुआ इस ने बीजगणित में कुछ साङ्केतिक चिह्न कल्पना किया अर्थात् संख्याओं के स्थान में अक्षरों को स्थापन कर गणित करना दिखलाया । उसी समय में डेस् कार्टेस (Des Cartes) ने रेखागणित और बीजगणित मिश्रित अनेक रीतियों को दिखलाया । निदान इन दोनों ज्योतिषियों ने बीजगणित के प्रकारों को अच्छी भांति बढ़ाया और इन के अनन्तर जितने गणितज्ञ हुये वे लोग भी श्रेढी इत्यादि विषयों में कुछ न कुछ विशेष करते ही गये । उसी समय में बहुत विद्वानों का ध्यान वक्ररेखा के सिद्धान्तों के ओर भी बढ़ता चला ।

सत्रहवीं शताब्दी के पूर्वार्ध में क्यावालिअरी (Cavalieri) और राबर्वल (Roberval) इन दोनों ज्योतिषियों ने विभाग (Indivisibles) और गति (Fluxions) के ओर विशेष ध्यान दिया। राबर्वल (Raberval) ने विचार किया कि वक्ररेखा एक बिन्दु की गति से उत्पन्न हुई हैं और फिर उस ने उस बिन्दु का वेग और वक्ररेखा की स्थिति के वश से वक्ररेखा के स्पर्शरेखा की दिशा का भी ज्ञान किया।

राबर्वल (Roberval) ने किसी पदार्थ का बहुत विभाग कर उस पर से अत्यन्त छोटे विभागों का कैसा सम्बन्ध होता है इस विषय पर भी बहुत विचार किया। परन्तु क्यावालिअरी और राबर्वल वा उस समय के और और विद्वान किसी विषय में कदाचित् कुछ विशेष आर्कमिडिज़् से लिखे हों पर इस में संशय नहीं कि वे लोग बीजगणित की अच्छी तरह वृद्धि की। इस के अनन्तर वालिस साहब (Wallis) ने एक व्यक्तगणित अनन्तराशिसम्बन्धि ऐसा बनाया कि जिस में अनेक सिद्धान्त "चलराशिकलन" (Integral calculus) सम्बन्धि सिद्ध किये गये हैं और जिस में नवीन सिद्धान्त प्रकाश होने की सूचना भी बहुत पायी जाती है। परन्तु इस ग्रन्थ में भी केवल बीजगणित ही की विशेष क्रिया समझनी चाहिये।

अन्त्य में न्यूटन और लेब्निज़ दोनों ने इस "चलनकलन" के ऊपर अच्छी भांति ध्यान दिया और दोनों ने दो प्रकार से वर्णन कर भिन्न भिन्न साङ्केतिक चिह्न कल्पना किया। यदि एक रेखा का बढ़ना दूसरी रेखा के बढ़ने के वश हो और पहली रेखा को य और दूसरी रेखा को र मानो तो यहां पर न्यूटन ने इस प्रकार से विचार किया कि पहली रेखा जितने समय में यं वेग से बढ़ती है उतनी समय में दूसरी रेखा रं वेग से बढ़ती है। इसी को लेब्निज़ ने इस प्रकार से कहा कि अतिशय अल्प चाल ताय के तुल्य य में हो तो अतिशय अल्प चाल तार के तुल्य र में होगा। यदि विचारो तो दोनों का कहना एकही है केवल चिन्हों में बीच है क्योंकि यदि कल्पना करो कि न्यूटन के मत से जो यं और रं यह वेग हैं उन्हीं वेग से ताका इतने काल तक य और र बढ़े तो ताय = यं· ताका, तार = रं· ताका $\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \frac{\text{यं}}{\text{रं}}$

इस लिये जिसे लेबनिज़ $\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}$ इस सङ्केत से प्रकाश करता है उसे न्यूटन के अनुसार $\frac{\dot{\text{य}}}{\dot{\text{र}}}$ इस से प्रकाश कर सक्ते हैं। यद्यपि न्यूटन ने द्वियुक्पद सिद्धान्तादिकों को केवल अपनी ही बुद्धिबल से उत्पन्न किया तथापि "चलनकलन" के विस्तार का मूल लेब्निज़ और बर्नोलीज़ (Bernoullis) ही को कहना चाहिये।

इस प्रकार से यह विद्या यूरप भर में फैली और बहुधा लेब्निज़ का साङ्केतिक चिन्ह ही विशेषतः प्रचलित हुआ।

ऊपर लिखा हुआ वृत्तान्त तो यूरपदेशीय विद्वानों का हुआ। अब हम यह विचार करते हैं कि भारतवर्ष में सब से पहले किस विद्वान के हृदय में "चलनकलन" की युक्ति उत्पन्न हुयी।

भारतवर्ष में जितने प्राचीन सिद्धान्त के बनाने वाले विद्वान हुये उन सभों ने अपने अपने सिद्धान्त ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में मध्यमगति पर से स्पष्टगति का साधन किया है परन्तु इन लोगों की बनायी हुयी स्पष्टगति से भास्कराचार्य ने एक और भिन्नगति बनायी और उस का नाम "तात्कालिकीगति" रक्खा और उस का वर्णन इस रीति से किया कि "प्राचीनों ने दो जीवाओं का अन्तर कर जो २२५ कला तुल्य चाप की गति में जीवा की गति वा भोग्यखण्ड बनाया है वह स्थूल है तात्कालिक जीवागति वा तात्कालिक स्फुट भोग्यखण्ड तो चाप की कोटिज्या को चाप की गति से गुण कर त्रिज्या का भाग देने से होता है और इस भोग्यखण्ड को लेकर यदि ग्रह की गति बनावें तो तात्कालिकी स्पष्टा गति होगी" (सिद्धान्तशिरोमणि के गणिताध्याय के स्पष्टाधिकार में "दिनान्तरस्पष्टखगान्तरं स्याद्गतिः स्फुटा तत्समयान्तराले" इस श्लोक की व्याख्या देखो)।

भास्कराचार्य जी फिर इसी तात्कालिकीगति पर से ग्रह का वक्रादि सब वस्तुओं का निर्णय किया।

जीवा की गति साधन के लिये यदि "चलनकलन" का प्रकार देखो तो ठीक भास्कराचार्य का प्रकार ही जान पड़ेगा परन्तु भास्कराचार्य तात्कालिक स्फुट भोग्यखण्ड को इस त्रैराशिक से ले आते हैं

कि "त्रिज्या तुल्य कोटिज्या में यदि प्रथम भोग्यखण्ड २२५ मिलता है तो इष्ट चाप की कोटिज्या में क्या?" इस से स्पष्ट बुद्धिमान यही समझैगा कि यद्यपि भास्कराचार्य ने तात्कालिक स्फुट भोग्यखण्ड बनाया तथापि उस की स्थिति कैसी है यह कुछ भी नहीं जाना भास्कराचार्य का त्रैराशिक देखने से तो भास्कराचार्य का तात्कालिक स्पष्ट भोग्यखण्ड और "चलनकलन" से उत्पन्न भोग्यखण्ड इन दोनों में बहुत भेद जान पड़ता है क्योंकि जहां भास्कराचार्य २२५ चाप की जीवा से गुणते हैं वहां "चलनकलन" की युक्ति से २२५ ही गुणक होना चाहिये परन्तु भास्कराचार्य ने जो इस का नाम तात्कालिक स्फुट भोग्यखण्ड रक्खा इस में तात्कालिक इस पद से तो यही जान पड़ता है कि जो चलनकलन से सिद्ध होता है उसी वस्तु का आनयन भास्कराचार्य ने भी किया है अन्यथा तात्कालिक पद देना व्यर्थ है परन्तु विना उपपत्ति जाने भास्कराचार्य ने कैसे इस का नाम तात्कालिक स्फुट भोग्यखण्ड रक्खा यह बुद्धिमानों के बीच में अवश्य बड़े संशय की बात है ।

निदान इस तात्कालिक स्फुट भोग्यखण्ड पर से भास्कराचार्य ने अनेक वस्तुओं का विचार किया उन के बल से बुद्धिमान चलनकलन सम्बन्धि अनेक सिद्धान्तों का ज्ञान कर सकता है ।

जैसे गणिताध्याय के स्पष्टाधिकार में भास्कराचार्य ने "फलांशखाङ्कान्तरशिञ्जिनीघ्नी" ।

इस श्लोक से ठीक $\dfrac{\text{त्रि}\cdot \text{ज्याय}}{\sqrt{\text{त्रि}^{2}+\text{अ}^{2}+2\,\text{अ}\cdot \text{कोज्याय}}}$

इस का तात्कालिकीगति बनाया है इस पर से बुद्धिमान स्थिराङ्कगुणित, वा युत, चलराशि का और चलराशि के मूल तथा चलराशि के दो फलों को भाज्य भाजक मान लब्धि की तात्कालिकीगति निकालने के सिद्धान्तों को जान सक्ता है । इसी प्रकार "कक्षामध्यगतिर्यग्रखाप्रतिवृत्तसम्पाते" इस श्लोक की व्याख्या से भास्कराचार्य ने यह सिद्ध किया है कि जहां चलसंख्या महत्तम होगी वहां हीं तात्कालिकीगति शून्य होती है । जब उच्च और नीच में ग्रह रहता है तब फल शून्य होता है और बीच में फलगति शून्य होती है इस पर से तुरन्त

बुद्धिमान मिस्टर होमरशम काक्स साहब (Mr. Homersham Cox) ने जो टेलर के सिद्धान्त की उपपत्ति किया है उस के मूल सिद्धान्त को (continuous) सिद्ध कर सक्ता है।

भास्कराचार्य ने स्पष्टाधिकार ही में यह भी लिखा है कि जब ग्रह का वक्रारम्भ वा वक्रत्याग होता है तब तात्कालिकीगति शून्य होती है इस से भी यह सिद्ध हो सक्ता है कि महत्तम और न्यूनतम में गति शून्य होती है।

भास्कराचार्य ने अपने गोलाध्याय में भूगोल के पृष्ठ का बहुत विभाग कर सब विभागों का अलग अलग फल लाकर सभों के योग से यह भी सिद्ध किया कि परिधि व्यास का घात पृष्ठफल और पृष्ठफल का षडंश व्यासगुणित घनफल होता है ("यत्परिध्यर्द्धविष्कम्भं वृत्तं कृत्तं किलांशुकम्" इस श्लोक की व्याख्या देखो) और लीलावती में एकादि संख्याओं के वर्गयोगादि के लिये प्रकार भी लिखा है। इस प्रकार से भास्कराचार्य के प्रकारों को देखने से स्पष्ट जान पड़ता है कि आर्किमिड्ज़ की अपेक्षा भास्कराचार्य के ग्रन्थ में चलनकलन-सम्बन्धि बहुत बातें हैं।

निदान भास्कराचार्य के पीछे फिर भारतवर्ष में ऐसा कोई विद्वान न हुआ जो चलनकलनसम्बन्धि कुछ विशेष लिखा हो कम-लाकर आदि हुये भी तो वे भास्कराचार्य के विशेषों को न समझ उलटा खण्डन ही करने पर तत्पर हुये।

जिस समय मैं ने भास्कराचार्य के ग्रन्थों को पढ़ा और उस में चलनकलनसम्बन्धि प्रकारों को और उन की उपपत्तियों को देखा तो मुझे यह चिन्ता उत्पन्न हुयी कि भास्कराचार्य की लिखी हुयीं उपपत्तियों से तो भास्कराचार्य के प्रकारों की ठीक सत्यता नहीं उत्पन्न होती इस लिये वे प्रकार सत्य हैं वा नहीं। बहुत दिनों के बाद बनारस संस्कृत कालेज के अङ्गलो विभाग में अङ्गरेज़ी भाषा सीखने पर और श्रीमान् डाक्टर थीबो साहब महाशय की असीम कृपा से चलनकलन को पढ़ने से ज्ञान पड़ा कि सचमुच भास्कराचार्य के प्रकार सच हैं परन्तु उन की उप-पत्तियां अशुद्ध हैं। इस के अनन्तर मैं ने एक छोटी सी पुस्तक संस्कृत में दीर्घवृत्त के ऊपर लिखी और उस में बहुत से "चलनकलन"

ओर "चलराशिकलन" के सिद्धान्तों को भी लिखा और इस बात के ढूंढ़ने पर तत्पर हुआ कि भारतवर्ष में किसी विद्वान ने "चलनकलन" के ऊपर कुछ लिखा है वा नहीं । ढूंढते ढूंढते मुझे लाला रामचन्द्र की बनायी अङ्गरेज़ी में महत्तम और न्यूनतम के ऊपर एक पुस्तक मिली इस की भूमिका को जिसे यूरप देश के परम प्रसिद्ध गणितज्ञ डिमार्गन साहब (Augustus De Morgan, F. R. A. S. F. C. P. S.) ने सन् १८५९ ईसवी में लिखा है देख बड़ा ही आनन्द उत्पन्न हुआ और यूरपदेशीय विद्वानों की गुणग्राहकता पर बहुत ही धन्यवाद दिया कि धन्य हैं यूरप के विद्वान जिन्हों ने भारतवर्ष में विद्या के प्रचार के लिये "चलनकलन" के केवल एक विषय पर लिखी हुई पुस्तक पर लाला रामचन्द्र को दो हज़ार रुपये कोर्ट वाफ डाइरेक्टर्स (Court of Directors) के ओर से दिलवाये । और उसी समय में यह सङ्कल्प किया कि "चलनकलन" पर हिन्दी में एक पुस्तक ऐसी बनानी चाहिये जिसके पढ़ने से विद्यानुरागियों को प्रायः "चलनकलन" सम्बन्धि सब बातें आ जांय । निदान ईश्वर के अनुग्रह से आज बीस अध्यायों में यह पुस्तक समाप्त हुयी । इस पुस्तक में (Differential) के स्थान में तात्कालिकचलन, वा तात्कालिकीगति अथ वा तात्कालिकवेग, (Differential Coefficient) के स्थान में तात्कालिक सम्बन्ध, $f(x)$, $\psi(x)$ इत्यादि के स्थान में फ (य), फा (य) इत्यादि, $\frac{dy}{dx}$ स्थान में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ और Function के स्थान में फल को लिख कर सब प्रकार दिखलाये गये हैं ।

इस के आदि के नव अध्यायों में अनेक प्रकार के फलों का तात्कालिकसम्बन्ध, और तात्कालिकसम्बन्ध परम्पराओं के जानने के लिये अनेक प्रकार, और उन प्रकारों से अनेक श्रेढी उत्पन्न करने के सिद्धान्त, लुप्तभिन्न के मान, और महत्तम और न्यूनतम के विषय पर अनेक प्रकार लिखे गये हैं और दशवें अध्याय में नवो अध्यायों से उत्पन्न अनेक चमत्कार और और बहुत सी बातें लिखी गयीं हैं । इन दशो अध्यायों में विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ बहुत से नये उदाहरण दिये हैं जिन उदाहरणों में वेही क्षेत्रसम्बन्धि प्रश्न हैं जिन का वर्णन भारतवर्षीय प्राचीन विद्वानों ने भी किया है क्योंकि और प्रकार के वक्रक्षेत्रों का जब यहां के लोग बहुधा नाम तक भी नहीं जानते तो

उन क्षेत्रसम्बन्धि प्रश्नों का उत्तर क्योंकर करेंगे । इस लिये पहले ग्यारहवें अध्याय में अनेक प्रकार के वक्रक्षेत्रों का समीकरण दिखलाकर फिर १२–१९ अध्याय तक वक्रक्षेत्रों का स्पर्शरेखादि जानना अनेक बातें लिखी गयीं हैं और बीसवें अध्याय में अनेक सिद्धान्तों का और उदाहरणों का वर्णन है ।

इस पुस्तक के बीच बीच में बहुत सी नयी बातें लिखी गयीं हैं जैसे लुप्तभिन्न के विषय में टाडहण्टर साहब ने अपने चलनकलन के (१६०) प्रक्रम में व्यर्थ ही दूसरी रीति लिखी है क्योंकि जब $\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=1$ तब निश्चय है कि $\psi(x)-\phi(x)=0$ यही लुप्तभिन्न का मान होगा वहां पर व्यर्थ क्रिया फैलाने से क्या फल, ऐसे स्थल में हमने (३६) प्रक्रम में दूसरी रीति लिखी है । इसी प्रकार हाल साहब अपने चलनकलन में (९०) प्रक्रम में जिस क्रिया का व्यभिचार दिखलाया है उस का भी हमने (३३) प्रक्रम में समर्थन किया है क्योंकि व्यभिचार का कारण हाल साहब यही लिखते हैं कि वहां कोई न कोई तात्कालिकसम्बन्ध अनन्त के तुल्य होगा और उस पर $u=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-a}}$ यही उदाहरण दिखाया है यहां $p=(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{dp}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ और $q=\sqrt{x-a}$

$\therefore \quad \frac{dq}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ यहां यदि $x=a$ तो दोनों $\frac{dp}{dx}$ और $\frac{dq}{dx}=\infty$ होंगे, इस लिये हाल साहब ने उस क्रिया का यहां व्यभिचार दिखलाया है ।

परन्तु जब $u=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-a}}$ तो $u^2=\frac{x^2-a^2}{x-a}$

अब यहां उसी क्रिया से u^2 का मान निकल आवैगा फिर उस का मूल लेने से u का भी मान निकल आवैगा । इस प्रकार से इस ग्रन्थ में बहुत सी नयी बातें महत्तम और न्यूनतम आदि प्रत्येक विषयों पर लिखी गयीं हैं । भारतवर्ष में विशेष सम्बन्ध होने के कारण यूरप देश के विद्वान लोग भी अब विशेष संस्कृत और हिन्दी के ओर ध्यान देने लगे यह विचार तीनों के उपकारार्थ यह ग्रन्थ हिन्दी में बनाया गया अर्थात् यूरप के लोगों को भी हिन्दी में यह नया ग्रन्थ यूरोपियन रीति

से कहां कहां विशेष बातें प्रकाश करता है इस का परिचय करने के लिये इस ग्रन्थ को पढ़ने से विशेष उपकार होगा। और संस्कृत जानने वाले भारतनिवासी तथा हिन्दी के वेत्ताओं के लिये तो इस ग्रन्थ का जन्म ही हुआ है क्योंकि जब तक हमारे देशवासी इस ग्रन्थ को न पढ़ेंगे तब तक उन को ज्योतिषशास्त्र के गहन विषयों का ज्ञान होना दुर्घट है और हमारे देश के एम॰ ए॰ M. A. वर्ग के छात्रों के लिये तो यह अत्यन्त ही उपयोगी है। उपयोगी क्रियाओं का तुरन्त स्मरण होने के लिये प्रायः उन के श्लोक और दोहे भी बनाकर लिख दिये गये हैं। "यह ग्रन्थ पहले पहल नया हिन्दी में बनाया गया है इस लिये इस का खण्डन वा इस से भी अच्छा एक दूसी विषय पर हिन्दी में ग्रन्थ लिख कर प्रकाश करना चाहिये" इस बुद्धि से भी यदि हमारे देशवासी विद्यानुरागी लोग एक बार भी इसे आद्यन्त तक देखें गे तो भी मैं अपना परिश्रम सफल समझूंगा।

दोहा।

संवत विधुवारिधिनिधीधरा दशहरा क्वार।
ग्रन्थ सिन्धु बुधि नाव धरि कियो सुधाकर पार॥
श्रीकृपालद्विजवर तनय विनय करत कर जोरि।
सुनि गुनि सिखि लिखि ग्रन्थ येहि लीजिय तत्त्व पछोरि॥

सुधाकरद्विवेदी।

सूचीपत्र ।

अध्याय १ ।

चलराशियों के योग, अन्तर, गुणनफल, और लब्धिसम्बन्धि तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में ।

द्वितीयाध्याय २ ।

साधारण फलों के सम्बन्ध के विषय में ।

तृतीयाध्याय ३ ।

त्रिकोणमिति फलों के उल्टे सम्बन्ध के विषय में ।

चतुर्थाध्याय ४ ।

गति परम्परा के विषय में ।

पञ्चमाध्याय ५ ।

लुप्तभिन्न के मान जानने के विषय में ।

षष्टाध्याय ६ ।

अनेक स्वतन्त्रराशियों के फलादि के विषय में ।

सप्तमाध्याय ७ ।

ल्याग्रांज और ल्याप्ल्यास के सिद्धान्त के विषय में ।

अष्टमाध्याय ८ ।

महत्तम और न्यूनतम के विषय में ।

नवमाध्याय ९ ।

दो और अनेक चलराशियों के महत्तम और न्यूनतम के विषय में ।

दशमाध्याय १० ।

प्रकीर्णक ।

एकादशाध्याय ११।

वक्रक्षेत्रों के समीकरण के विषय में।

पञ्चदशाध्याय १५ ।

उन्नतत्व, नतत्व, और विशेषविन्दु के विषय में ।

षोडशाध्याय १६ ।

वक्र के चाप, फल, पृष्ठफल के गति के विषय में ।

सप्तदशाध्याय १७ ।

युति, अवलूत और अनवलूत के विषय में ।

अष्टादशाध्याय १८।

अन्वालोप के विषय में।

एकोनविंशति अध्याय १९।

वक्रक्षेत्रों के रचना के विषय में।

विंशति अध्याय २०।

उन्नीसो अध्यायसम्बन्धि विशेष।

---

* २८५ प्रक्रम से ले कर आगे जितने प्रक्रम हैं उन में सौ घटा कर वास्तव प्रक्रम की संख्या जाननी चाहिए।

इति सूचीपत्र ।

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥

विबुध विविधभेदा बीजजाताः प्रसिद्धा-
बहुभिरपरदेशस्थैर्जनैस्सन्ति तेषु ।
चलनकलनसंज्ञं वच्मि चित्रं प्रणम्य
जनकनृपतनूजां कोशलेन्द्रस्य सूनुम् ॥

चलनकलन ।

अध्याय १ ।

चलराशियों के योग, अन्तर, गुणनफल, और लब्धिसम्बन्धि-तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में ।

१ । दो ऐसे राशि हों कि एक के परिवर्त्तन से दूसरे का भी परिवर्त्तन हो जाय तो एक राशि दूसरे राशि का फल कहलाता है, जैसे यदि, $य^न = र$ और जब, य बदल के $य + च$ हो तब $(य + च)^न = र'$ तो र को य का फल कहेंगे । और य को स्वतंत्रराशि र को अस्वतंत्रराशि कहते हैं क्योंकि र का चलन यहां य के आधीन है ।

२ । जब, $य^न = र$ इस लिये $य = र^{\frac{1}{न}}$ और $(य + च)^न = र'$

इस लिये $य + च = य' = र'^{\frac{1}{न}}$ इस से यह सिद्ध होता है कि एक के अपेक्षा दूसरा स्वतंत्र वा अस्वतंत्र हो सकता है ।

३ । जैसे बीजगणित में अव्यक्त राशिओं का मान य, र, ल, व इत्यादि अक्षरों से दिखाए जाते हैं उसी तरह से यहां चल राशिओं के मान य, र, ल, व इत्यादि अक्षरों से लिखते हैं और बीजगणित की तरह अ, क, ग इत्यादि अक्षरों से यहां स्थिरसंख्या का मान लिखते हैं ।

४ । जब $र = य^5 + 3 य^4 + 2$, वा, $र = य^4 + 2 य^3 + 1$ इत्यादि, तो इन को लाघव के लिये $र = फ (य)$ वा, $र = फि (य)$ ऐसा लिखते हैं । यह, फ, फि, फा, इत्यादि अक्षर य के फल को द्योतन करते हैं ।

$र = फ(य)$ यह दिखलाता है कि र के मान में केवल य चलराशि है और सब स्थिर हैं।

५। देखो – यदि $य^3 = र$ ऐसा समीकरण हो और कल्पना करो कि य का चलन च के तुल्य हुआ तब र का दूसरा मान $= (य + च)^3$ इस लिये य के च तुल्य चलन में र का चलन $= (य + च)^3 - य^3$ होगा इसे ऐसा लिखते हैं $\triangle र = (य + च)^3 - य^3$ और च को $\triangle य$ यों लिखते हैं। यहां $= (य+च)^3 - य^3 = ३ य^2 च + ३ य च^2 + च^3 = \triangle र$, दोनो पक्षों में च का भाग देने से $३ य^2 + ३ य \times च + च^2 = \frac{\triangle र}{\triangle य}$, य के रूप तुल्य चलन में र का चलन सिद्ध हुआ। परन्तु यह र का चलन जो अभी त्रैराशिक से सिद्ध हुआ है, च का मान भिन्न भिन्न होने से भिन्न भिन्न होगा इस लिये यदि च को शून्य के तुल्य मानो तो र का चलन, $३ य^2$ होगा। $३ य^2$ इस को य के रूप तुल्य चलन में र का एकरूप चाल से, तात्कालिकचलन वा तात्कालिकगति कहते हैं। और इस को इष्ट य के तात्कालिकचलन से गुण देने से इष्ट य के तात्कालिकचलन में एकरूप चाल से र का तात्कालिकचलन होगा अर्थात् $ताय \cdot ३ य^2 = तार \therefore ३ य^2 = \frac{तार}{ताय}$ अर्थात् $३ य^2$, को तात्कालिकसम्बन्ध भी कहते हैं।

६। चलनकलन का मुख्य प्रयोजन यही है कि एक के तात्कालिकचलन से दूसरे का तात्कालिकचलन जानना। और पूर्व प्रक्रम में जो $३ य^2$ इस का नाम र का तात्कालिकचलन रक्खा गया है वह ठीक है क्योंकि जैसा जैसा च का मान थोड़ा कल्पना किया जाय वैसा वैसा $य^3$ या, र, के पास पास के चाल से र चलैगा इस लिये यदि च को शून्य मानो तो ठीक, र उसी समय के चाल से चलैगा।

७। इस चलनकलन में चलराशि और स्थिरराशि के कहने से ऐसा समझना चाहिए कि, जैसा दो समानान्तर रेखा के बीच तुल्य आधार पर जितने त्रिभुज होंगे उन का क्षेत्रफल तो स्थिर परन्तु कोण चलराशि अथवा वृत्तान्तर्गत एक ही आधार पर एक ही ओर जितने त्रिभुज होंगे उन का शिरःकोण स्थिरराशि और फल चलराशि होगा इसी तरह हर एक जगह स्थिर और चल का अर्थ समझना चाहिये।

८। पांचवें प्रक्रम से यह बात सिद्ध होती है कि स्वतंत्रराशि का च तुल्य चलन मान के अस्वतंत्रराशि का मान ले आवो फिर पूर्व अस्वतंत्र-

राशि और नवीन अस्वतंत्रराशि के अन्तर में च का भाग देके च को शून्य के तुल्य उत्थापन देने से तात्कालिकसम्बन्ध होता है

जैसे यदि $फ(य) = य^2$

तो $फ(य+च) = य^2 + २यच + च^2$

और $फ(य+च) - फ(य) = २यच + च^2$ इस में च का भाग देने से और च को शून्य मानने से $\frac{ता(य^2)}{ताय} = २य$ यह, य के गति के वश $य^2$ के गति का तात्कालिकसम्बन्ध हुआ इसी तरह यदि

$$फ(य) = \frac{अ}{य+क} \quad \text{तो} \quad फ(य+च) = \frac{अ}{य+च+क}$$

इन दोनों का अन्तर $= फ(य+च) - फ(य) = \frac{-अ \cdot च}{(य+क)(य+च+क)}$

इस में च का भाग दे कर च को शून्य के तुल्य करने से तात्कालिकसम्बन्ध $\frac{-अ}{(य+क)^2}$ इस के तुल्य हुआ, इसी रीति से हर एक जगह तात्कालिक-सम्बन्ध निकालना चाहिये ।

९ । जैसे व्यक्तगणित और अव्यक्तगणित में जोड़ने वा घटाने की सुगम रीति गुणन, वर्ग, घन, वा भजन, वर्गमूल, घनमूल इत्यादि बुद्धिमानों ने बनाया है उसी तरह इस चलनकलन में चलराशिओं के तुरन्त तात्कालिकसम्बन्ध जानने के लिये बुद्धिमानों ने अनेक चलराशिओं के तात्कालिकसम्बन्ध निकाल निकाल कर उन के प्रकारों को लिखे हैं जिन के अभ्यास से पढ़ने वाले सब प्रकार के चलराशिओं का तात्कालिकसम्बन्ध जान सकते हैं ।

प्रथम सिद्धान्त ।

जब कि $र = स्थि \cdot फ(य)$

इस लिये $= र + \triangle र = स्थि \cdot फ(य + \triangle य)$

$$\triangle र = स्थि \{ फ(य + \triangle य) - फ(य) \}$$

$$\text{वा,} \quad \frac{\triangle र}{\triangle य} = स्थि \left\{ \frac{फ(य+\triangle य) - फ(य)}{\triangle य} \right\}$$

△य इस को शून्य के तुल्य करने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{स्थि} \times \text{तासं}^{0}\ \text{फ}(\text{य})$$

इस से यह सिद्ध होता है कि जो चलराशि का तात्कालिक-सम्बन्ध हो उसे स्थिरसंख्या से गुण देने से स्थिरसंख्यागुणित चलराशि का सम्बन्ध होता है ।

द्वितीय सिद्धान्त।

यदि $\text{र} = \text{ल} + \text{व} + \text{स}$ यहां पर, ल, व, स, य के भिन्न भिन्न फल हैं तो, $\text{र}' = \text{ल}' + \text{व}' + \text{स}'$ इस लिये $\triangle\text{र} = \triangle\text{ल} + \triangle\text{व} + \triangle\text{स}$

वा $\frac{\triangle\text{र}}{\triangle\text{य}} = \frac{\triangle\text{ल}}{\triangle\text{य}} + \frac{\triangle\text{व}}{\triangle\text{य}} + \frac{\triangle\text{स}}{\triangle\text{य}}$ वा, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$

इस से यह सिद्ध होता है कि सब फलों के पृथक पृथक तात्कालिकसम्बन्धों का योग उन फलों के योग तुल्य चलराशि का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

इसी में यदि, $\text{र} = \text{ल} + \text{व} - \text{स}$ हो तो पूर्वोक्त युक्ति से

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} - \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ ऐसा होगा

और यदि $\text{र} = \text{ल} + \text{स्थि}$ के तो पूर्वोक्त युक्ति से

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास्थि}}{\text{ताय}}$ परन्तु, $\frac{\text{तास्थि}}{\text{ताय}} = 0$ होगा क्योंकि स्थिर-संख्या का तात्कालिकचलन शून्य होता है इस लिये तात्कालिकसम्बन्ध भी शून्य होगा

तब $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ ऐसा होगा ।

तृतीय सिद्धान्त ।

यदि $\text{र} = \text{ल} \times \text{व} = \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$

तो $\text{र}' = \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}+\text{च})$

$$\triangle\text{र} = \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}+\text{च}) - \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$$
$$= \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}+\text{च}) - \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य})$$
$$+ \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$$

इस लिये $\frac{\triangle र}{\triangle य} = \left\{फ(य+च)\right\}\left\{\frac{फि(य+च)-फि(य)}{च}\right\}$

$$+\left\{फि(य)\right\}\left\{\frac{फ(य+च)-फ(य)}{च}\right\}$$

पूर्व विधि से $\frac{तार}{ताय} = फ(य)\times\frac{ताव}{ताय} + फि(य)\times\frac{ताल}{ताय}$

इसी युक्ति से यदि $र = ल\times व\times स$ तो

$$र = श\times स \quad यहां\ श = ल\times व$$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{ताश}{ताय}\times स + \frac{तास}{ताय}\times श$

परन्तु $\frac{ताश}{ताय} = \frac{ताल}{ताय}\times व + \frac{ताव}{ताय}\times ल$

$\therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय}\times व\cdot स + \frac{ताव}{ताय}\times ल\cdot स + \frac{तास}{ताय}\times ल\cdot व$

इसी तरह यदि $र = ल\cdot व\cdot श\cdot ष$

तो $\quad र = ह\times ष \quad यहां\ ल\cdot व\cdot श = ह$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{ताह}{ताय}\cdot ष + \frac{ताष}{ताय}\cdot ह$

परन्तु $\frac{ताह}{ताय} = \frac{ताल}{ताय}\times व\cdot श + \frac{ताव}{ताय}\times ल\cdot श + \frac{ताश}{ताय}\times ल\cdot व$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय}\times व\cdot श\cdot ष + \frac{ताव}{ताय} ल\cdot श\cdot ष$

$$+\frac{ताश}{ताय}\times ल\cdot व\cdot ष + \frac{ताष}{ताय}\times ल\cdot व\cdot श$$

इसी रीति से और भी जानना तब सिद्ध हो जायगा कि एक एक फल के तात्कालिकसम्बन्ध को और और फलों से गुण कर योग करना तो सब फलों के घात से जो राशि होगा उस का तात्कालिक-सम्बन्ध होता है।

चौथा सिद्धान्त ।

$$\text{यदि } र = \frac{व}{ल} \text{ तो } व = र \times ल$$

$$\text{तब तीसरे सिद्धान्त से } \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot ल + \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot र$$

$$\text{वा, } ल \times \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot र + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}, \text{ वा}$$

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \cdot ल - \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot व = ल^2 \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \cdot ल - \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot व}{ल^2} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$ इस से यह सिद्ध होता है कि, भाज्य के तात्कालिकसम्बन्ध को हर से गुणा कर उस में हर के तात्कालिकसम्बन्ध को भाज्य से गुणा कर घटा दो शेष में हर के वर्ग का भाग देने से उस लब्धितुल्य चलराशि का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

१० । इस प्रक्रम में विद्यार्थिओं के अभ्यास के लिये चारो सिद्धान्त से उत्पन्न फल को लिखते हैं ।

$$र = \text{स्थि} \cdot ल \qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{स्थि} \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$र = ल + व \qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

$$र = ल - व \qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

$$र = ल \pm \text{स्थि} \qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$र = ल \times व \qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} व + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} ल$$

$$र = \frac{व}{ल} \qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \left(\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} ल - \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} व\right) \div ल^2$$

$$र = \frac{व}{स्थि} \qquad \frac{तार}{ताय} = \frac{ताव}{तायस्थि}$$

इन के स्मरणार्थ श्लोक और दोहे बना कर लिख देते हैं ।

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धस्स्थिरघ्नविहृतो भवेत् ।
चलराशेस्स सम्बन्धस्स्थिरघ्नविहृतस्य वै ॥

दोहा ।

स्थिरसंख्या से गुणित वा भाजित जो सम्बन्ध ।
सो स्थिर से संगुणित वा भाजित चलसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धयोगो विद्वन् भवेत् सदा ।
चलराशियुतेराशेस्सम्बन्धः किल संस्फुटः ॥

दोहा ।

चलराशीसम्बन्ध को योग करो तत्काल ।
चलराशिन के योग को सो सम्बन्ध निकाल ॥

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धविवरं भवति ध्रुवम् ।
चलराशिवियोगस्य सम्बन्धश्चलयुक्तितः ॥

दोहा ।

चलराशीसम्बन्ध को अन्तर करो तुरन्त ।
चलराशिन के विवर को सो सम्बन्ध नितन्त ॥

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धावन्योन्यचलसंहतौ ।
तद्युतिश्चलघातस्य सम्बन्धो भवति ध्रुवम् ॥

दोहा ।

निज विहाय चल से गुणो निज सम्बन्ध निहार ।
ताको युति चलघात को सो सम्बन्ध विचार ॥

श्लोक ।

लवसम्बन्धगुणितो हरो हीनो लवेन सः ।
हरसम्बन्धनिघ्नेन हरवर्गहृतः फलम् ॥

भिन्नस्य तस्य राशेस्स्यात् सम्बन्धस्सततं ततः ।
छात्रैरेतत्सदा चिन्त्यं निजबुद्धिविवृद्धये ॥

दोहा ।

लवसम्बन्ध गुणा करो हर से देहु घटाय ।
तामें हरसम्बन्ध अरु अंश घात हरखाय ॥
हर के वर्ग से भाग दो जो लब्धी मिल जाय ।
भिन्नरूपचलराशि को सो सम्बन्ध कहाय ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

(१) $र=८य+४$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध कहो उ० $\frac{तार}{ताय}=८$ ।

(२) $र=२(य+३)+३(य+४)$ ··· उ० $\frac{तार}{ताय}=५$ ।

(३) $र=(७य+५)(५य+२)$ ··· उ० $\frac{तार}{ताय}=७०य+३९$ ।

(४) $र=\frac{५य+३}{१०}$ ··· ··· ··· उ० $\frac{तार}{ताय}=\frac{१}{२}$ ।

(५) $र=\frac{११य+७}{१३य+११}$ ··· ··· ··· उ० $\frac{तार}{ताय}=\frac{३०}{(१३य+११)^२}$ ।

उदाहरण ।

(१) एक पुरुष को पन्द्रह कोश जाना था उस ने पहिले घण्टे में एक कोश दूसरे घण्टे में दो कोश तीसरे घण्टे में तीन कोश इस चाल से चला फिर तीसरे घण्टे के अन्त में उस का जो चलने का वेग था उसी वेग से चल कर मंजिल पूरा किया तो बतावो वह कितने घण्टे में वहां पहुंचा? । उ० घं० $५\frac{४}{७}$ ।

(२) एक राजा की फौज दुश्मन को भगाने के लिए उस के किले पर चली जिस की दूरी फौज से १११ कोश थी यह फौज पहिले दिन ३ कोश फिर प्रतिदिन दो दो कोश की वृद्धि से चली बाद नव रोज़ के लश्कर में खबर पहुंची कि दुश्मन क़िला छोड़ कर भागा इस लिये उस वक़्त जो फौज के चलने का वेग था उसी वेग से उन लोगों ने

दुश्मन का पीछा किया और छ रोज़ में दुश्मन के यहां पहुंच कर उस को गिरिफ़ार किया तो बतावो कि दुश्मन रोज़ कितना भागता था? । उत्तर १८ कोश ।

इति प्रथमाध्याय ।

द्वितीयाध्याय २ ।

साधारणफलों के सम्बन्ध के विषय में ।

११ । इस प्रक्रम में अनेक फलों के सम्बन्ध की सुगम रीति दिखलाते हैं ।

प्रथम सिद्धान्त ।

यदि $र = य^{न}$ यहां न पूर्ण और धन संख्या है

तो $र' = (य + च)^{न} = य^{न} + न \cdot य^{न-१}च + \cdots\cdots + च^{न}$

$\therefore \triangle र = न \cdot य^{न-१}च + \cdots\cdots\cdots + च^{न}$

तब पूर्वोक्त युक्ति से $\frac{तार}{ताय} = न \cdot य^{न-१}$

इसी तरह यदि $र = य^{\frac{न}{म}}$

तो $र^{म} = य^{न} = ल$ फिर पूर्व युक्ति से

$\frac{ताल}{ताय} = न \cdot य^{न-१}$

परन्तु $\frac{ताल}{ताय} = \frac{तार}{ताय} \cdot म \cdot र^{म-१}$ इस हेतु $\frac{तार}{ताय} = \frac{न}{म} \times \frac{य^{न-१}}{र^{म-१}}$

वा $\frac{तार}{ताय} = \frac{न}{म} \times \frac{य^{न-१} \times य^{\frac{न}{म}}}{र^{म}} = \frac{न}{म} \times \frac{य^{-१} \times य^{\frac{न}{म}}}{१} = \frac{न}{म} \times य^{\frac{न-म}{म}}$

इसी रीति से यदि $र = य^{-न} = \frac{१}{य^{न}}$

तब $र \cdot य^{न} = १$, पूर्व विधि से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \times \text{य}^{\text{न}} + \text{र} \cdot \text{य}^{\text{न}-१} \times \text{न} = 0$$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{न} \cdot \frac{\text{य}^{\text{न}-१}}{\text{य}^{\text{न}}} \times \text{र} = \frac{-\text{न} \cdot \text{य}^{\text{न}-१}}{\text{य}^{२\text{न}}} = -\text{न} \cdot \text{य}^{-(\text{न}+१)}$

इस से यह सिद्ध होता है कि घात की संख्या से उस राशि के एकोनघात को गुण देने से राशिघात का सम्बन्ध होता है ।

द्वितीय सिद्धान्त ।

यदि $\text{र} = \text{अ}^{\text{य}}$ तो $\text{र} = \{ १ + (\text{अ} - १) \}^{\text{य}}$

परन्तु $\{ १ + (\text{अ} - १) \}^{\text{य}} = १ + \text{य}(\text{अ} - १) + \text{य}\left(\frac{\text{य} - १}{२}\right)(\text{अ} - १)^२ + \cdots\cdots$

$$= १ + \text{य} \left\{ (\text{अ} - १) - \frac{(\text{अ} - १)^२}{२} + \cdots \right\} + \cdots$$

इस लिये $\text{र} = \text{अ}^{\text{य}} = १ + \text{अ}_१\text{य} + \text{अ}_२\text{य}^२ + \text{अ}_३\text{य}^३ + \cdots\cdots\cdots\cdots$ एक श्रेढ़ी ऐसी होगी

अब $\text{अ}^{\text{य}} = १ + \text{अ}_१\text{य} + \text{अ}_२\text{य}^२ + \text{अ}_३\text{य}^३ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\therefore \text{अ}^{\text{च}} = १ + \text{अ}_१\text{च} + \text{अ}_२\text{च}^२ + \text{अ}_३\text{च}^३ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

दोनों को परस्पर गुण देने से और पूर्व युक्ति से

$$\text{अ}^{\text{च}+\text{य}} = १ + \text{अ}_१(\text{च} + \text{य}) + \text{अ}_२(\text{च} + \text{य})^२ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= १ + \text{य}(\text{अ}_१ + २\text{अ}_२\text{च} + \cdots) + \cdots\cdots\cdots = \text{अ}^{\text{च}} \times \text{अ}^{\text{य}}$$

$$= \text{अ}^{\text{च}}(१ + \text{अ}_१\text{य} + \text{अ}_२\text{य}^२ + \cdots)$$

$\therefore$ सरूप समीकरण से, $\text{अ}_१ \cdot \text{अ}^{\text{च}} = \text{अ}_१ + २\text{अ}_२ \cdot \text{च} + ३\text{अ}_३ \cdot \text{च}^२ + \cdots$

$$= \text{अ}_१ + \text{अ}_१^२ \cdot \text{च} + \text{अ}_१ \cdot \text{अ}_२ \cdot \text{च}^२ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

इस लिये $\text{अ}_१^२ = २\text{अ}_२ \quad \therefore \text{अ}_२ = \frac{\text{अ}_१^२}{२}$

$$\text{अ}_१ \cdot \text{अ}_२ = \frac{\text{अ}_१^३}{२} = ३\text{अ}_३ \quad \therefore \text{अ}_३ = \frac{\text{अ}_१^३}{२ \cdot ३}$$

इसी तरह आगे भी जानना तब

$$\text{अ}^{\text{य}} = १ + \text{अ}_१\text{य} + \frac{\text{अ}_१^२}{२} \cdot \text{य}^२ + \frac{\text{अ}_१^३}{२\cdot ३} \cdot \text{य}^३ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

यदि $\text{अ}^{\text{य}} = \text{अ}^{\frac{१}{\text{अ}_१}}$ तो $\text{अ}^{\frac{१}{\text{अ}_१}} = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२ \cdot ३} + \frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \cdots$

यदि $१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{२\cdot३\cdot४}+\cdots=इ$

तो $अ^{\frac{१}{अ_१}}=इ \quad \therefore \quad अ=इ^{अ_१}$

यहां $अ_१$ को इ के आधार में अ का लघुरिक्थ कहते हैं इसे यों लिखते हैं $ल_इ अ=अ_१$ अर्थात् लघुरिक्थ इ आधार में अ का $अ_१$ है यहां $अ_१=(अ-१)-\frac{१}{२}(अ-१)^२+\frac{१}{३}(अ-१)^३-\cdots,$ इस लिये $र=अ^य=१+(ल_इ अ)\,य+\frac{१}{२}(ल_इ अ)^२\cdot य^२+\cdots\cdots$ यों भी लिख सकते हैं

अब, $र=अ^य=१+(ल_इ अ)\,य+\frac{१}{२}(ल_इ अ)^२\cdot य^२+\cdots\cdots$

इस लिये $र'=अ^{य+च}=अ^य\left\{१+(ल_इ अ)\,च+\frac{१}{२}(ल_इ अ)^२\cdot च^२+\cdots\right\}$

$$\triangle र=\left\{(ल_इ अ)\,च+\frac{१}{२}(ल_इ अ)^२\cdot च^२+\cdots\cdots\right\}अ^य$$

$$\frac{तार}{ताय}=अ^य(ल_इ अ)=र\times ल_इ अ$$

इस से यह सिद्ध होता है कि इ आधार में अ का जो लघुरिक्थ हो उसे चलसंख्या से गुण देने से उस का तात्कालिकसम्बन्ध होता है

इसी युक्ति से यदि $र=अ^{क\cdot य}$

तो $र=ग^य$ यहां $ग=अ^क$

$$\frac{तार}{ताय}=ग^य\times ल_इ ग \qquad परन्तु\ ल_इ ग=क\cdot ल_इ अ$$

इस लिये $\frac{तार}{ताय}=क\cdot ल_इ अ\cdot अ^{कय}$

तीसरा सिद्धान्त।

यदि $र=ल_इ य$

तो $इ^र=य$ इस हेतु दूसरे सिद्धान्त से

$$\frac{ताय}{तार}=इ^र\cdot ल_इ इ=इ^र \quad \therefore \quad \frac{तार}{ताय}=\frac{१}{य}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में चलराशि से भाग दो तो लघुरिक्थ का तात्कालिकसम्बन्ध होता है यदि इ आधार में लघुरिक्थ हो तो।

चौथा सिद्धान्त ।

यदि $र = ज्याय$

तो $र' = ज्या\,(य + च)$

और $\triangle र = ज्या\,(य + च) - ज्याय = \dfrac{२\, कोज्या\,(य + \frac{१}{२}च) \cdot ज्या\,\frac{१}{२}च}{त्रि}$

$$\frac{\triangle र}{\triangle य} = \frac{कोज्या\,(य + \frac{१}{२}च)\,\dfrac{ज्या\,\frac{१}{२}च}{\frac{१}{२}च}}{त्रि}$$

$$\therefore \quad \frac{तार}{ताय} = \frac{कोज्याय}{त्रि}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या में त्रिज्या का भाग दो तो जीवा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

इस तात्कालिकसम्बन्ध को भास्कराचार्य्य जी जानते थे अपने सिद्धान्तशिरोमणि के स्पष्टाधिकार में लिखा है परन्तु इस का जानना वैसा ही था जैसा क्रान्तिक्षेत्र का जानना ।

पांचवां सिद्धान्त ।

यदि $र = कोज्याय$

तो $र' = कोज्या\,(य + च)$

इस लिये $\triangle र = कोज्या\,(य + च) - कोज्याय = \dfrac{-\,२\,ज्या\,(य + \frac{१}{२}च)\,ज्या\,\frac{१}{२}च}{त्रि}$

$$\frac{\triangle र}{\triangle य} = \frac{-\,ज्या\,(य + \frac{१}{२}च)\,\dfrac{ज्या\,\frac{१}{२}च}{\frac{१}{२}च}}{त्रि} \qquad \therefore \quad \frac{तार}{ताय} = \frac{-\,ज्याय}{त्रि}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि जीवा में त्रिज्या का भाग दो सो कोटिज्या का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

छठवां सिद्धान्त ।

यदि $र = स्पय = \dfrac{त्रि \cdot ज्याय}{कोज्याय}$ तो प्रथमाध्याय के चौथे सिद्धान्त से

$$\frac{तार}{ताय} = त्रि\left(\frac{कोज्या^{२}य + ज्या^{२}य}{त्रि \cdot कोज्या^{२}य}\right) = \frac{त्रि^{२} \times त्रि^{२}}{त्रि^{२} \cdot कोज्या^{२}य} = \frac{छे^{२}य}{त्रि^{२}}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि छेदनरेखा के वर्ग में त्रिज्या के वर्ग का भाग देने से स्पर्शरेखा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

सातवां सिद्धान्त ।

यदि $र = कोस्पय = \frac{त्रि \cdot कोज्याय}{ज्याय}$ यहां भी प्रथमाध्याय के चौथे सिद्धान्त से

$$\frac{तार}{ताय} = त्रि\left(\frac{-ज्या^2य - कोज्या^2य}{त्रि \cdot ज्या^2य}\right) = \frac{-त्रि^2}{ज्या^2य} = -\frac{कोछे^2य}{त्रि^2}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिच्छेदनरेखा के वर्ग में त्रिज्या-वर्ग का भाग देने से कोटिस्पर्शरेखा का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

आठवां सिद्धान्त ।

यदि $र = छेय = \frac{त्रि^2}{कोज्याय}$ यहां भी पूर्वोक्त युक्ति से

$$\frac{तार}{ताय} = त्रि^2\left(\frac{+ज्याय}{त्रि \cdot कोज्या^2य}\right) = \frac{त्रि \cdot ज्याय}{कोज्याय \times कोज्याय} = \frac{स्पय}{कोज्याय}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि स्पर्शरेखा में कोटिज्या का भाग देने से छेदनरेखा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

नवां सिद्धान्त ।

यदि $र = कोछेय = \frac{त्रि^2}{ज्याय}$ यहां भी उसी युक्ति से

$$\frac{तार}{ताय} = त्रि^2\left(\frac{-कोज्याय}{त्रिज्या^2य}\right) = \frac{-त्रि \cdot कोज्याय}{ज्याय \cdot ज्याय} = \frac{-कोस्पय}{ज्याय}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिस्पर्शरेखा में जीवा का भाग देने से कोटिच्छेदन का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

दशवां सिद्धान्त ।

यदि $र = उय = त्रि - कोज्याय$, यहां प्रथमाध्याय के तीसरे सिद्धान्त से $\frac{तार}{ताय} = \frac{ज्याय}{त्रि}$ इसी चाल से

यदि $र = कोउय = त्रि - ज्याय$

तो $\frac{तार}{ताय} = \frac{-कोज्याय}{त्रि}$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या का जो ऋणात्मकसम्बन्ध वही धनात्मकसम्बन्ध उत्क्रमज्या का होता है और जीवा का जो धनात्मकसम्बन्ध वही ऋणात्मकसम्बन्ध कोटि के उत्क्रमज्या का होता है।

१२। इस प्रक्रम में पूर्व सिद्धान्तों से उत्पन्न सम्बन्धों को विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ एकट्ठा कर के लिखते हैं।

(१) $र = य^{न}$ $\frac{तार}{ताय} = न \cdot य^{न-१}$

(२) $र = अ^{य}$ $\frac{तार}{ताय} = अ^{य} \cdot ल_{ट्ट} अ$

(३) $र = अ^{कय}$ $\frac{तार}{ताय} = अ^{कय} \cdot क \cdot ल_{ट्ट} अ$

(४) $र = ल_{ट्ट} य$ $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य}$

(५) $र = ज्याय$ $\frac{तार}{ताय} = कोज्याय$

(६) $र = कोज्याय$ $\frac{तार}{ताय} = - ज्याय$

(७) $र = स्पय$ $\frac{तार}{ताय} = छे^{२}य$

(८) $र = कोस्पय$ $\frac{तार}{ताय} = - कोछे^{२}य$

(९) $र = छेय$ $\frac{तार}{ताय} = \frac{स्पय}{कोज्याय}$

(१०) $र = कोछेय$ $\frac{तार}{ताय} = \frac{-कोस्पय}{ज्याय}$

(११) र = उय $\quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = ज्याय

(१२) र = कोउय $\quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = – कोज्याय

यहां लाघवार्थ सर्वत्र रूप अर्थात् १ त्रिज्या मान के तात्कालिक-सम्बन्धों को लिखा है ।

विद्यार्थियों को अच्छी तरह याद करने के लिये इन के श्लोक और दोहे लिखते हैं ।

श्लोक ।

राशिरूपोनघातघ्नो घाताङ्को भवतीह सः ।
यस्तात्कालिकसम्बन्धो राशिघातस्य सर्वदा ॥

दोहा ।

राशिघातघाताङ्क को गुणन राशि सों भाग ।
राशिघातसम्बन्ध सो हूै है सदा अदाग ॥

श्लोक ।

इ-संज्ञाधारजातं यल्लघुरिक्थं स्थिरस्य वै ।
निजाधारस्य राशिघ्नं राशिसम्बन्धसंमितिः ॥

दोहा ।

ई-संज्ञक आधार में लघूरिक्थ को जान ।
निज अधार को राशि से गुणि सम्बन्ध प्रमान ॥

श्लोक ।

इ-संज्ञाधारजातेन भक्तं रूपं फलं भवेत् ।
लघुरिक्थजसम्बन्धो लघुरिक्थात्थराशिना ॥

दोहा ।

एक अंश लघुरिक्थभवराशिछेद तें भिन्न ।
लघूरिक्थसम्बन्ध सो जानहु मित्र अखिन्न ॥

श्लोक ।

कोटिज्या तु भुजज्यायाः कोटिज्याया ऋणो गुणः ।
गणकेन सदा ज्ञेयः सम्बन्धः क्रमशः खलु ॥

दोहा ।

भुजजीवा को कोटिगुण होत सदा सम्बन्ध ।
अरु ऋणजीवा होत है कोटिज्यासम्बन्ध ॥

श्लोक ।

छेदनस्य छतिर्ज्ञेयस्पर्शसम्बन्ध एव वै ।
कोटिच्छेदनवर्गश्च कोटिस्पर्शभवोऽधनः ॥

दोहा ।

छेदन को जो वर्ग हो सो स्पर्शजसम्बन्ध ।
कोटिच्छेदन वर्ग ऋण कोटिस्पर्शसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

स्पर्शः कोटिज्यया भक्तस्सम्बन्धश्छेदनस्य सः ।
कोटिच्छेदनजः कोटिस्पर्शो मौर्व्याहृतोऽधनः ॥

दोहा ।

कोटिज्याहृत स्पर्श जो सो छेदनसम्बन्ध ।
कोटिस्पर्श जीवाविहृत छेदनकोटिसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

भुजज्योत्क्रमजीवाया ऋणकोटिज्यका तथा ।
कोट्युत्क्रमगुणस्य स्यात्सम्बन्धस्सततं स्फुटः ॥

दोहा ।

भुजजीवा को जानना उत्क्रमगुणसम्बन्ध ।
कोट्युत्क्रम को कोटिगुण ऋण यह सीखु प्रबन्ध ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

(१) $र = \frac{४ य^{न} + ५}{३}$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध क्या है?

उ० $\frac{४}{३} न \cdot य^{न-१} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(२) $र = \frac{७ य^{७} + ५ य^{५} + ३ य^{३} + य + १५}{८}$ इस का तात्कालिक-सम्बन्ध क्या है?

उ० $\frac{४९ य^{६} + २५ य^{४} + ९ य^{२} + १}{८} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(३) $र = \frac{७ य^९ + ११}{५ य^७ + ९}$ .... उ० $\frac{य^६ (५७६ य^२ - ३८५)}{(५ य^७ + ९)^२} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(४) $र = इ^{इ \cdot य}$ .... उ० $इ^{इ \cdot य} \times इ = \frac{तार}{ताय}$ ।

(५) $र = ल_{अ} य$ .... उ० $\frac{१}{य \cdot ल_{इ} अ} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(६) $र = इ^{८ य}$ .... उ० $८ \cdot इ^{८ य} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(७) $र = \frac{इ^{७ य} + १}{य + १}$ .... उ० $\frac{इ^{७ य} (७ य + ६) - १}{(य + १)^२} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(८) $र = ४ ल_{इ} य$ .... उ० $\frac{४}{य} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(९) $र = \frac{ल_{इ} य}{य - ३}$ .... उ० $\frac{१}{य (य - ३)} - \frac{ल_{इ} य}{(य - ३)^२} = \frac{तार}{ताय}$ ।

(१०) $र = \frac{ल_{इ} य}{इ^{य}}$ .... उ० $\frac{१}{य \cdot इ^{य}} - \frac{ल_{इ} य}{इ^{य}} = \frac{तार}{ताय}$ ।

उदाहरण ।

(१) एक आदमी के पास १०) था उस ने इसे व्यापार में लगा कर प्रथम वर्ष के अन्त में १२१) किया फिर दूसरे वर्ष के अन्त में १४४) इतना किया यों प्रतिवर्ष में वर्ष संख्यायुत मूलधन के वर्गतुल्य वृद्धि होती थी । यदि चौथे वर्ष के अन्त में उस के धन के बढ़ने का जो वेग था उसी वेग से पांचवें वर्ष में वृद्धि होती तो पूर्व नियमानुसार उस को कितना घाटा पड़ता ? । उत्तर १ रुपया ।

(२) एक पुरुष को वर्ष दिन में पहिले १०) रुपया मिला फिर दूसरे वर्ष के अन्त में १०० तीसरे वर्ष के अन्त में १००० मिला तो बतावो यदि तीसरे वर्ष के अन्त में जो तनख़ाह बढ़ने का वेग था उसी वेग से चौथे वर्ष में तनख़ाह होती तो कितना पाता ? ।

उत्तर २९२२·५ ।

इति द्वितीयाध्याय ।

तृतीयाध्याय ३।

त्रिकोणमितिफलों के उल्टे सम्बन्ध के विषय में।

१३। प्रथम सिद्धान्त।

यदि $र = ज्या^{-1} य$

तो $ज्या र = य$ इस लिये दूसरे अध्याय के चौथे सिद्धान्त से,

$$कोज्या र = \frac{ताय}{तार} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{1}{कोज्या र} = \frac{1}{\sqrt{1 - य^2}}।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में कोटिज्या का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

द्वितीय सिद्धान्त।

यदि $र = कोज्या^{-1} य$ यहां भी उसी युक्ति से

$$कोज्या र = य \therefore - ज्या र = \frac{ताय}{तार}$$

इस हेतु $$\frac{तार}{ताय} = - \frac{1}{ज्या र} = - \frac{1}{\sqrt{1 - य^2}}।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में ऋणजीवा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

तीसरा सिद्धान्त।

यदि $र = स्प^{-1} य$

तो $स्प र = य$ फिर पूर्व युक्ति से

$$छे^2 र = \frac{ताय}{तार} \therefore \frac{1}{छे^2 र} = \frac{तार}{ताय}$$

वा, $$\frac{तार}{ताय} = \frac{1}{1 + य^2},$$

इसी तरह यदि $र = कोस्प^{-1} य$

तो $कोस्प र = य$ यहां भी पूर्वोक्त विधि से

$$-\text{कोछे}^2 र = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \quad \therefore \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-1}{\text{कोछे}^2 र} = \frac{-1}{1+य^2} ।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में छेदनरेखा के वर्ग का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा रूप में कोटि-च्छेदनरेखा के वर्ग का भाग देने से ऋणात्मक चाप का तात्कालिक-सम्बन्ध होता है ।

चौथा सिद्धान्त ।

यदि $र = \text{छे}^{-1} य$ तो $\text{छे}र = य$

यहां दूसरे अध्याय से

$$\frac{\text{स्पर}}{\text{कोज्यार}} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \quad \therefore \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्यार}}{\text{स्पर}}$$

परन्तु $\text{कोज्यार} = \frac{1}{य}$ और $\text{स्पर} = \sqrt{य^2 - 1}$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{य\sqrt{य^2-1}}$

इसी युक्ति से, यदि $र = \text{कोछे}^{-1} य$

तो $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-1}{य\sqrt{य^2-1}}$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या में स्पर्शरेखा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा जीवा में कोटिस्पर्श का भाग देने से जो लब्ध हो उसे ऋण करने से चाप का तात्कालिक-सम्बन्ध होता है ।

पांचवां सिद्धान्त ।

यदि $र = \text{उ}^{-1} य$ तो $\text{उ}र = य$

यहां भी पूर्वोक्त रीति से

$$\text{ज्यार} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \quad \therefore \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\text{ज्यार}}$$

वा $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{१-(१-\text{य})^२}} = \frac{१}{\sqrt{२\text{य}-\text{य}^२}}$ ।

इसी युक्ति से यदि $\text{र} = \text{कोउ}^{-१}\text{य}$

तो $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-१}{\text{कोज्यार}} = \frac{-१}{\sqrt{२\text{य}-\text{य}^२}}$ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में जीवा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा रूप में ऋण कोटिज्या का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

१४। पूर्व सिद्धान्तों से उत्पन्नसम्बन्ध को स्मरणार्थ एकट्ठा लिखते हैं

(१) $\text{र} = \text{ज्या}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{१-\text{य}^२}}$ ।

(२) $\text{र} = \text{कोज्या}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१}{\sqrt{१-\text{य}^२}}$ ।

(३) $\text{र} = \text{स्प}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{१+\text{य}^२}$ ।

(४) $\text{र} = \text{कोस्प}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१}{१+\text{य}^२}$ ।

(५) $\text{र} = \text{छे}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{य}\sqrt{\text{य}^२-१}}$ ।

(६) $\text{र} = \text{कोछे}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१}{\text{य}\sqrt{\text{य}^२-१}}$ ।

(७) $\text{र} = \text{उ}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\sqrt{२\text{य}-\text{य}^२}}$ ।

(८) $\text{र} = \text{कोउ}^{-१}\text{य}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१}{\sqrt{२\text{य}-\text{य}^२}}$ ।

इन के श्लोक और दोहे विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ लिखते हैं।

श्लोक ।

जीवया कोटिमौर्व्या च पृथक् चन्द्रो विभाजितः ।
आद्योऽधनात्मकः कार्य्यस्सम्बन्धौ चापजौ ततः ॥

दोहा ।

जीवाहृत जो रूप हो ऋण कार्मुकसम्बन्ध ।
कोटिज्याहृत रूप वा सो कार्मुकसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

रूपौ छेदनकोटिच्छेदनकृत्या हृतावन्यः ।
अधनस्तदा भवेतां चापभवौ तत्र सम्बन्धौ ॥

दोहा ।

छेदनकृतिहृत रूप हो सोई चापसम्बन्ध ।
ऋणकोटिच्छेदकृतिहृत एक होत सम्बन्ध ॥

श्लोक ।

कोटिज्या स्पर्शभक्ता वा कोटिस्पर्शहृतो गुणः ।
ऋणस्तदा भवेतां तौ सम्बन्धौ चापजौ सदा ॥

दोहा ।

स्पर्शविहृत गुण कोटि को सो है धनुसम्बन्ध ।
कोटिस्पर्श विभक्त वा ऋणजीवा सम्बन्ध ॥

१५ । इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को उदाहरण के उत्तर करने की युक्ति देखलाने के लिये कुछ उदाहरणों का उत्तर निकाल कर के लिखते हैं ।

(१) जब कि र = स्प(क · य) यहां क · य = ल

तब र = स्पल अब द्वितीयाध्याय के छठवें सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \text{छे}^2\text{ल} ।$$

और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \text{क}$, दोनों को परस्पर गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क} \cdot \text{छे}^2\text{कय}$$ यही उत्तर हुआ ।

(२) $\text{र} = \text{स्प}^{-१}\text{कय}$ यहां भी $\text{कय} = \text{ल}$

तब $\text{र} = \text{स्प}^{-१}\text{ल}$ इस अध्याय के तीसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{१}{१+\text{ल}^{२}} \quad \text{परन्तु} \quad \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \text{क}$$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{क}}{१+\text{ल}^{२}} = \frac{\text{क}}{१+\text{क}^{२}\cdot\text{य}^{२}}$ यही उत्तर हुआ ।

(३) $\text{र} = \text{स्प}(\text{ल}_{\text{य}})$ जब कोई आधार न हो वहां इ आधार समझो ।

यहां मानो कि $\text{ल}_{\text{य}} = \text{ल}$

तब $\text{र} = \text{स्पल}$ पूर्व युक्ति से $\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \text{छे}^{२}\text{ल}$ परन्तु $\text{ल} = \text{ल}_{\text{इ}}\text{य}$

इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{य}}$ इस से ऊपर वालों को गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{छे}^{२}\text{ल}}{\text{य}} = \frac{\text{छे}^{२}(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})}{\text{य}}$$ यही उत्तर है ।

(४) $\text{र} = \text{ल}_{\text{इ}}(\text{स्पय})$ यहां $\text{स्पय} = \text{ल}$

तब $\text{र} = \text{ल}_{\text{ल}}$ फिर पूर्व युक्ति से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{१}{\text{ल}} \quad \text{परन्तु} \quad \text{स्पय} = \text{ल}$$

इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \text{छे}^{२}\text{य}$ इस से ऊपर के पदों को गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{छे}^{२}\text{य}}{\text{स्पय}}$$ यही उत्तर हुआ ।

(५) $\text{र} = \text{ज्याय}\cdot\text{कोस्प}^{-१}\text{य}\cdot\text{इ}^{\text{य}}$ यहां प्रथमाध्याय के तीसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय}\cdot\text{कोस्प}^{-१}\text{य}\cdot\text{इ}^{\text{य}}$$

$$\text{ज्याय} \cdot \text{इ}^{\text{य}} \times \frac{-१}{१+\text{य}^{२}} + \text{ज्याय} \cdot \text{कोस्प}^{-१}\text{य} \cdot \text{इ}^{\text{य}}$$

वा $$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{इ}^{\text{य}} \cdot \text{कोस्प}^{-१}\text{य} \,(\text{कोज्याय} + \text{ज्याय}) - \frac{\text{ज्याय} \cdot \text{इ}^{\text{य}}}{१+\text{य}^{२}}$$

यही उत्तर हुआ।

यों विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरण का उत्तर करें॥

अभ्यास के लिये और प्रश्न।

(१) $\text{क}\sqrt[३]{\text{य}} = \text{र}$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध क्या है?।

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क}\left(\frac{१}{३}\frac{१}{\sqrt[३]{\text{य}^{२}}}\right)।$$

(२) $\text{ग}\,(\sqrt{\text{य}} + \sqrt[३]{\text{य}}) = \text{र}$, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ग}\left(\frac{१}{२}\frac{१}{\sqrt{\text{य}}} + \frac{१}{३}\frac{१}{\sqrt[३]{\text{य}^{२}}}\right)$।

(३) $\text{क}\,(\text{ज्याय} + \text{कोज्याय}) = \text{र}$, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = (\text{कोज्याय} - \text{ज्याय})\,\text{क}$।

(४) $\text{क}\,(\text{छेय} + \text{स्पय}) = \text{र}$, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{क}\,(\text{ज्याय} + १)}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}$।

(५) $(\text{छेय} + \text{कोछेय})\,\text{क} = \text{र}$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क}\left(\frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}} - \frac{\text{कोस्पय}}{\text{ज्याय}}\right)$।

(६) $\text{क}\,(\text{ज्या}^{२}\text{य} + \text{कोज्या}^{२}\text{य}) = \text{र}$ .... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$।

(७) $\frac{१}{\text{क}}(\text{स्पय} \times \text{कोस्पय} + ५) = \text{र}$ .... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$।

(८) $\text{ग}\,(\text{छे}^{२}\text{य} - \text{स्प}^{२}\text{य}) = \text{र}$ .... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$।

(९) $\text{घ}\,(\text{स्पय} \cdot \text{कोस्पय} + \text{छे}^{२}\text{य} - \text{स्प}^{२}\text{य}) = \text{र}$ ... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$।

(१०) $\text{घ} \cdot \text{ज्या}\left(\frac{\text{य}^{२}+३}{३\,\text{य}+१}\right) = \text{र}$,

उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{घ} \cdot \left(\frac{\text{३ य}^{\text{२}} + \text{२ य} - \text{९}}{\text{९ य}^{\text{२}} + \text{६ य} + \text{१}}\right) \text{कोज्या}\left(\frac{\text{य}^{\text{२}} + \text{३}}{\text{३ य} + \text{१}}\right)$ ।

(११) $\text{क} \cdot \text{कोज्या}\left(\frac{\text{य} + \text{५}}{\text{य} + \text{७}}\right) = \text{र},$

उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{क} \cdot \frac{\text{२}}{(\text{य} + \text{७})^{\text{२}}} \times \text{ज्या}\left(\frac{\text{य} + \text{५}}{\text{य} + \text{७}}\right)$ ।

(१२) $\text{क} \cdot \text{स्प}\left(\frac{\text{य} + \text{४}}{\text{५}}\right) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क} \cdot \tfrac{\text{१}}{\text{५}} \text{छे}^{\text{२}}\left(\frac{\text{य} + \text{४}}{\text{५}}\right)$ ।

(१३) $\text{क} \cdot \text{कोस्प}\left(\frac{\text{य} + \text{३}}{\text{२}}\right) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\tfrac{\text{१}}{\text{२}} \text{क} \cdot \text{कोछे}^{\text{२}}\left(\frac{\text{य} + \text{३}}{\text{२}}\right)$ ।

(१४) $\text{क} \cdot \text{स्प}^{-\text{१}}(\text{य} + \text{७}) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{क}}{\text{य}^{\text{२}} + \text{१४ य} + \text{५०}}$ ।

(१५) $\text{कोज्या}^{-\text{१}}\left(\frac{\text{य}^{\text{२}} + \text{१}}{\text{५}}\right) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-\text{२ य}}{\sqrt{\text{२४} - \text{२ य}^{\text{२}} - \text{य}^{\text{४}}}}$ ।

(१६) $\text{स्प}^{-\text{१}}(\text{य}^{\text{३}} + \text{५}) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{३ य}^{\text{२}}}{\text{य}^{\text{६}} + \text{१० य}^{\text{३}} + \text{२६}}$ ।

(१७) $\text{छे}\left(\frac{\text{य}^{\text{३}} + \text{४}}{\text{य}^{\text{२}} + \text{३}}\right) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{(\text{य}^{\text{४}} + \text{९ य}^{\text{२}} - \text{८ य})\,\text{स्प}\left(\frac{\text{य}^{\text{३}} + \text{४}}{\text{य}^{\text{२}} + \text{३}}\right)}{(\text{य}^{\text{४}} + \text{६ य}^{\text{२}} + \text{९})\,\text{कोज्या}\left(\frac{\text{य}^{\text{३}} + \text{४}}{\text{य}^{\text{२}} + \text{३}}\right)}$ ।

(१८) $\text{कोछे}\left(\frac{\text{३ य} + \text{२}}{\text{५ य} + \text{७}}\right) = \text{र},$ उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-\text{११ कोस्प}\left(\frac{\text{३ य} + \text{२}}{\text{५ य} + \text{७}}\right)}{(\text{५ य} + \text{७})^{\text{२}}\,\text{ज्या}\left(\frac{\text{३ य} + \text{२}}{\text{५ य} + \text{७}}\right)}$ ।

(१९) $\text{छे}^{-\text{१}}\left(\frac{\text{य}^{\text{२}} + \text{य} - \text{२}}{\text{य} - \text{३}}\right) = \text{र},$

उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{य}^{\text{२}} - \text{६ य} - \text{१}}{(\text{य}^{\text{२}} + \text{य} - \text{२})\sqrt{\text{य}^{\text{४}} + \text{२ य}^{\text{३}} - \text{४ य}^{\text{२}} + \text{२ य} - \text{५}}}$ ।

(२०) $\text{कोछे}^{-१}\left(\dfrac{२\text{य}^२+\text{य}}{३\text{य}+५}\right)=\text{र}$,

उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=-\dfrac{६\text{य}^२+२०\text{य}+५}{(२\text{य}^२+\text{य})\sqrt{४\text{य}^४+४\text{य}^३-८\text{य}^२-३०\text{य}-२५}}$ ।

(२१) $\text{उज्या}\,(\text{य}^२+\frac{१}{७})=\text{र}$, उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=२\text{य}\cdot\text{ज्या}\,(\text{य}^२+\frac{१}{७})$ ।

(२२) $\text{कोउज्या}\,(\text{य}^३+\frac{१}{११})=\text{र}$, उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=-३\text{य}^२\cdot\text{कोज्या}\,(\text{य}^३+\frac{१}{११})$ ।

(२३) $\text{उ}^{-१}\text{ज्या}\left(\dfrac{१}{\text{य}+२}\right)=\text{र}$, उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{-१}{(\text{य}+२)\sqrt{२\text{य}+३}}$ ।

(२४) $\text{कोउ}^{-१}\text{ज्या}\left(\dfrac{\text{य}+१}{\text{य}+२}\right)=\text{र}$,

उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=-\dfrac{१}{(\text{य}+२)\sqrt{\text{य}^२+४\text{य}+३}}$ ।

(२५) $\left(\dfrac{\text{य}+२}{४}\right)^४=\text{र}$, उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\left(\dfrac{\text{य}+२}{४}\right)^३$ ।

(२६) $(\text{य}+२)^३\,(\text{य}^२+३)^५=\text{र}$,

उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\left\{(\text{य}^२+३)^४(\text{य}+२)^२\right\}\left\{९+२०\text{य}+१३\text{य}^२\right\}$ ।

(२७) $\sqrt{२\text{य}+७}=\text{र}$, ... उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{१}{\sqrt{२\text{य}+७}}$ ।

(२८) $\left(\dfrac{\text{य}+३}{\text{य}-१}\right)^{\frac{५}{७}}=\text{र}$, ... उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{-\frac{२०}{७}\left(\dfrac{\text{य}+३}{\text{य}-१}\right)^{-\frac{२}{७}}}{(\text{य}-१)^२}$ ।

(२९) $२\,(\text{य}+२)+३\,(\text{य}^३+५)=\text{र}$, उ० $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=९\text{य}^२+२$ ।

(३०) $\dfrac{८}{\text{य}+५}+\dfrac{९}{\text{य}+६}-\dfrac{११}{\text{य}^२+११\text{य}+३०}=\text{र}$,

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{१७\,य^२ + १६४\,य + ३९२}{(य^२ + ११\,य + ३०)^२}\ ।$$

(३१) $अ^{अय} + य = र \cdots \text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ल_{ष्ट}अ \cdot अ \cdot अ^{अय} + १$ ।

(३२) $अ \cdot य \times अ^{अय} = र\ \text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = अ \cdot अ^{अय}(य \cdot ल_{ष्ट}अ \cdot अ + १)$ ।

(३३) $\frac{अ^{\frac{१}{य}}}{य} = र \cdots\cdots\cdots\ \text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{र}{य^२}(क + य)$ ।

यहां $क = ल_{ष्ट}अ$ ।

(३४) $\frac{अ^{कय}}{कय} = र,\ \text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{अ^{कय}}{क \cdot य^२}(ल_{ष्ट}अ \cdot य \cdot क - १)$ ।

(३५) $ल_{ष्ट}(य^२ + ११) = र,\quad \text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{२\,य}{य^२ + ११}$ ।

(३६) $\frac{अय}{अ^{अय}} = र,\quad \text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{अ(१ - य \cdot अ \cdot ल_{ष्ट}अ)}{अ^{अय}}$ ।

(३७) $\frac{स्पअय}{अ^{स्पअय}} = र,$

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{र \cdot अ \cdot छे^२अय(१ - स्पअय \cdot ल_{ष्ट}अ)}{स्पअय}\ ।$$

(३८) $\text{कोज्याय} \cdot य^{ज्याय} = र,$

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = य^{ज्याय}\left(\frac{ज्या२य}{२य} + कोज्या^२य \cdot ल_{ष्ट}य - ज्याय\right)\ ।$$

(३९) $\left(\frac{य}{ज्याय}\right)^{\frac{य}{ज्याय}} = र,$

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = र \cdot \frac{ज्याय - य \cdot कोज्याय}{ज्या^२य}\left\{ल_{ष्ट}\left(\frac{य}{ज्याय}\right) + १\right\}\ ।$$

(४०) $(य + ज्याय)^{य + ज्याय} = र,$

उ० $\frac{तार}{ताय} = \{र + र \cdot कोज्याय\} \{ल_{इ}(य + ज्याय) + १\}$

(४१) $\left\{स्प(ल_{इ}य)\right\}^{ल_{इ}य} = र,$

उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{र}{य}\left[ल_{इ}\{स्प(ल_{इ}य)\} + \frac{छे^{२}(ल_{इ}य) \times ल_{इ}य}{स्प(ल_{इ}य)}\right]$ ।

(४२) $(ल_{इ}य)^{ल_{इ}ल_{इ}य} = र,$ उ० $\frac{तार}{ताय} = २र\left\{\frac{ल_{इ}(ल_{इ}य)}{य \cdot ल_{इ}य}\right\}$ ।

(४३) यदि $ज्याय + कोज्याय = \frac{१}{\sqrt{२}} कोज्या(\frac{\pi}{४} - य)$ तो सिद्ध करो कि $कोज्याय - ज्याय = \frac{१}{\sqrt{२}} ज्या(\frac{\pi}{४} - य)$ ।

(४४) यदि $ज्याय + ज्या२य + ज्या३य + \cdots + ज्या२४य$

$$= \frac{ज्या\frac{२५}{२}य \cdot ज्या१२य}{ज्या\frac{य}{२}}$$ तो सिद्ध करो कि

$कोज्याय + २कोज्या२य + ३कोज्या३य + \cdots + २४कोज्या२४य$
$= १२,$ यदि $२४य = २\pi$ ।

उदाहरण ।

(१) ज्यामंफ = ज्यामंके · ज्याअंफ जब ऐसा समीकरण ग्रह के मन्दफलज्या का है तो बतावो इष्टकेन्द्रगति में तात्कालिक वेग से मन्दफल की क्या गति होगी? । उ० $\frac{मंफग}{केग} = \frac{कोज्यामंके \cdot ज्याअंफ}{कोज्यामंफ}$ ।

(२) मंफ = ज्यामंके · ज्याअंफ यदि ऐसा समीकरण ग्रह के मन्दफल का हो तो एकरूपवेग से मंदफल की गति बतावो ।

उ० $\frac{मंफग}{केग} = कोज्याके \cdot ज्याअफं$ ।

(३) ज्यामंफ = ज्यामंके · क · ज्याअंफ यदि इस समीकरण से ग्रह की मन्दफलज्या आवै तो इष्टकेन्द्रगति में फल की गति बतावो ? ।

$$\text{उ०}\quad \frac{\text{मंफग}}{\text{केग}} = \frac{\text{ज्याअंफ}}{\text{कोज्यामंफ}}\,(\text{ज्यामंके} + \text{कोज्यामंके} \cdot \text{क}) \text{ ।}$$

(४) $\text{ज्यास्पके} = \frac{\text{ज्यामके}}{\text{क}}$ यह ग्रह के स्पष्टशीघ्रकेन्द्रज्या के लिये समीकरण है इस पर से स्पष्टशीघ्रकेन्द्रगति बतावो ? ।

$$\text{उ०}\quad \frac{\text{स्पकेग}}{\text{मकेग}} = \frac{\text{कोज्याफ}}{\text{क}} \text{ ।}$$

(इन चारो उदाहरणों के लिये भास्कराचार्य के गणिताध्याय का स्पष्टाधिकार देखो) ।

(५) $\text{ज्याग्रको} = \frac{\text{द्यु} \cdot \text{ज्याल}}{\text{ज्यादि}}$ इस में यदि केवल "दि" चलराशि हो तो "ज्याग्रको" इस की गति बतावो ? ।

$$\text{उ०}\quad \frac{\text{ताग्रको}}{\text{तादि}} = \frac{-\,\text{कोज्यादि} \cdot \text{द्यु} \cdot \text{ज्याल}}{\text{कोज्याग्रको} \cdot \text{ज्या}^{२}\text{दि}} \text{ ।}$$

(६) एक कीट की पहिले घंटे में एक अङ्गुल दूसरे घंटे के अन्त्य में १६ अङ्गुल, तीसरे घंटे के अन्त्य में $३^{२७}$ अङ्गुल, य घंटे के अन्त्य में $\text{य}^{\text{य}^{\text{य}}}$ अङ्गुल, गति थी । बतावो पांचवें घंटे के अन्त्य में जो गति का वेग था उसी वेग से यदि छठवें घंटे में चलता तो कितना चलता ? ।

$$\text{उ०}\quad ५^{३१३०}\left(\tfrac{१}{५} + \text{ल}_{\text{इ}}\,५ + \text{ल}^{२}_{\text{इ}}\,५\right) \text{ ।}$$

(७) दो कीट एक कुलाल के चक्र के परिधि पर बैठ के साथ ही परिधि पर चलना आरम्भ किये, पहला जितना चाप चलता था उस के जीवातुल्यचाप की जो कोटिज्या हो उतना चाप दूसरा चलता बतावो पहले की गति से दूसरे की गति के गुणित अधिक है ? ।

$$\text{उ०}\quad -\frac{\text{ज्या}\,(\text{ज्याय})}{(\text{कोज्याय})^{-१}} \text{ ।}$$

(८) पृथ्वी की प्रदक्षिणा करने के लिये दो पुरुष साथ ही चले पहला गर्भाभिप्राय से जितना कोणसम्बन्धि अंश चलता है उस के

जीवातुल्य जितने अंश की स्पर्शरेखा हो उतना दूसरा चलता है तो दोनों में तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा? । उ० $\frac{\text{कोज्याय}}{\text{ज्या}^{२}\text{य} + १}$ ।

(यहां पहले का कोणांशसम्बन्धि चाप = य)

(९) वह कौन सा चाप है जिस की गति से स्पर्शरेखा की गति चौगुनी होती है? । उ० $= ६०^{0}$ ।

(१०) एक वृत्तान्तर्गत समत्रिबाहु और समचतुर्भुज है कल्पना करो कि वृत्त का व्यासार्द्ध दूना हो गया तो तात्कालिकवेग से समत्रिबाहु के फल के चाल से चतुर्भुज के फल की गति कै गुणित अधिक होगी? ।

उ० $\frac{८}{\sqrt{३}}$ ।

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय ४ ।

गतिपरम्परा के विषय में ।

१६ । पूर्व अध्यायों से स्पष्ट जान पड़ता है कि तात्कालिकसम्बन्ध भी एक प्रकार का चलराशि का फल है इस लिये यदि इस नये फल का तात्कालिकसम्बन्ध निकालना हो तो पूर्व प्रक्रमों से सहज में निकल सकता है ।

जैसे यदि, $\text{फ}\,(\text{य}) = \text{र} = \text{स्पय}$ तो, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}$

अब यदि $\frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = \text{फि}\,(\text{य}) = \text{ल}$ तो $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$

$$= २ \cdot \text{ज्याय} \cdot \text{कोज्या}^{-३}\text{य}$$

वा, $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\text{ताय}} = २\,\text{ज्याय} \cdot \text{कोज्या}^{-३}\text{य}$ इसी प्रकार अब इसे "य"

का नया फल कल्पना कर इस का भी तात्कालिकसम्बन्ध निकाल सकते हो ।

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इसे पहला तात्कालिकसम्बन्ध कहते हैं, और $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\text{ताय}}$ इसे दूसरा तात्कालिकसम्बन्ध कहते हैं ।

यदि य का तात्कालिकवेग (ताय) प्रत्येक य के फलों के तात्कालिकसम्बन्धों में एक ही कल्पना करें अर्थात् स्थिर कल्पना करें तो दूसरे तात्कालिकसम्बन्ध अर्थात् $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\text{ताय}}$ इसे $\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}$ ऐसा लिख सकते हैं। यहां "ता" पर जो दो का अङ्क है वह दिखलाता है कि "र" का तात्कालिकवेग का वेग अर्थात् दूसरा तात्कालिकवेग है और "य" पर का दो का अङ्क दिखलाता है कि य के तात्कालिकवेग का वर्ग है इस प्रकार, भाज्य और हार दोनों मिल के दूसरे तात्कालिकसम्बन्ध को प्रकाश करते हैं। इसी प्रकार प्रत्येक फलों में य का तात्कालिकवेग एक ही कल्पना कर तीसरा, चौथा, पांचवा, इत्यादि, तात्कालिकसम्बन्ध भी निकाला जाता है ।

जैसे, जब, $\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}$ = र का दूसरा तात्कालिकसम्बन्ध ।

तो $\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}}$ = र का तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध ।

इसी भांति, $\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ = र का न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध ।

कभीं कभीं लाघवार्थ, प्रथम, द्वितीय, तृतीय, इत्यादि- तात्कालिकसम्बन्धों को य के फल के ऊपर स्वर दे देने से भी प्रकाश करते हैं अर्थात्, यदि र = फ (य)

तो, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}'(\text{य})$, $\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} = \text{फ}''(\text{य})$, $\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} = \text{फ}'''(\text{य})$ इत्यादि, ऐसा भी लिखते हैं ।

१७। विशेष स्थानों में कहीं कहीं बड़े लाघव से चाहे जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध निकल सक्ता है।

जैसे, यदि, (१) $र = क \cdot ला_{इ} य$

तो, $\frac{तार}{ताय} = \frac{क}{य}$, $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = - क \cdot य^{-२}$, $\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}} = २क \cdot य^{-३}$

और, $\frac{ता^{४}र}{ताय^{४}} = -२ \times ३ \cdot कय^{-४}$, $\frac{ता^{५}र}{ताय^{५}} = २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot क \cdot य^{-५}$

यहां साधारणरूप जानने के लिये, ऊपर के सम्बन्धों को देखने ही से, $\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = \frac{क}{न}(-१)^{न+१} \cdot \underline{|न} \cdot य^{-न}$ ऐसा सिद्ध होता है।

यहां $\underline{|न} = १ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdots\cdots न$।

(२) यदि $र = ज्या\,(इ \cdot य + क)$

तो, $\frac{तार}{ताय} = इ \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क) = इ \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२})$

$\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = इ^{२} \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२}) = इ^{२} \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{२\pi}{२})$

$\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}} = इ^{३} \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{२\pi}{२}) = इ^{३} \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{३\pi}{२})$

सामान्य से $\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = इ^{न} \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{न \cdot \pi}{२})$

इसी प्रकार यदि, $र = कोज्या\,(इ \cdot य + क)$

तो, $\frac{तार}{ताय} = - इ \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क) = इ \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२})$

$\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = - इ^{२} \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२})$

$= इ^{२} \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{२\pi}{२})$

समान्य से, $\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = इ^{न} \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{न \cdot \pi}{२})$

इसी प्रकार बहुतों का सम्बन्ध लाघव से निकल सकता है।

१८। दो फलों के घात के तुल्य यदि तीसरा फल हो तो नीचे लिखी हुयी युक्ति से सम्बन्ध जान सकते हैं ।

जैसे, यदि, $\text{स} = \text{र} \cdot \text{ल}$ जहां र, और ल दोनों य के फल हैं,

तो, पूर्वविधि से, $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{ल}$ ।

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \text{ल}$$

$$= \text{र} \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + २ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \text{ल} ।$$

$$\text{और} \quad \frac{\text{ता}^{३}\text{स}}{\text{ताय}^{३}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + २ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}}$$

$$+ २ \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} \cdot \text{ल}$$

$$= \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} + ३ \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + ३ \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} + \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} \cdot \text{ल} ।$$

$$\text{इसी प्रकार} \quad \frac{\text{ता}^{४}\text{स}}{\text{ताय}^{४}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{४}\text{ल}}{\text{ताय}^{४}} + ४ \frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + ६ \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}$$

$$+ ४ \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} + \frac{\text{ता}^{४}\text{र}}{\text{ताय}^{४}} \cdot \text{ल} ।$$

यहां देखो प्रत्येक सम्बन्धों में यदि आदि अन्त्य के घाताङ्क अर्थात् र और ल को छोड़ दें और ता पर की संख्या को, घातसङ्ख्या समझें तो सब पद ठीक द्वियुक्पद सिद्धान्तोत्पन्नपद के ऐसे हैं जहां पहला पद $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ और दूसरा पद $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ है इस लिये दो फलों के घात का चाहो जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध निकालने के लिये यह क्रिया उत्पन्न होती है । दोनों फलों का पृथक् पृथक् तात्कालिकसम्बन्ध निकाल, दो पद कल्पना करो फिर जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध जानना हो उतना ही घात द्वियुक्पद सिद्धान्त से उन दोनों पदों के योग का कर, आदि अन्त्य पद को उल्टे फलों से गुण देना तो वही अभीष्टसम्बन्ध होगा

परन्तु घात करने में घातसङ्ख्या को "ता" के ओर, स्वतन्त्रराशि अर्थात् "य" के ऊपर लिखना चाहिये।

जैसे, स = र · ल (जहां र और ल, य स्वतन्त्रराशि के फल हैं) समीकरण है यहां स का सातवां तात्कालिकसम्बन्ध जानना है तो, पूर्वयुक्ति से पहला पद, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ दूसरा पद, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ यह है, अब इन दोनों के योग का सप्तघात करने से,

$$\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^{७}=\frac{\text{ता}^{७}\text{र}}{\text{ताय}^{७}}+७\frac{\text{ता}^{६}\text{र}}{\text{ताय}^{६}}\cdot\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$
$$+२१\frac{\text{ता}^{५}\text{र}}{\text{ताय}^{५}}\cdot\frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}}+३५\frac{\text{ता}^{४}\text{र}}{\text{ताय}^{४}}\cdot\frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}}+३५\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}}\cdot\frac{\text{ता}^{४}\text{ल}}{\text{ताय}^{४}}$$
$$+२१\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}\cdot\frac{\text{ता}^{५}\text{ल}}{\text{ताय}^{५}}+७\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ता}^{६}\text{ल}}{\text{ताय}^{६}}+\frac{\text{ता}^{७}\text{ल}}{\text{ताय}^{७}}$$

यह हुआ इस के प्रथम पद में र का सम्बन्ध है इस लिये इसे ल से और अन्त्य-पद में ल का सम्बन्ध है इस लिये इसे र से गुण देने से दोनों फलों के घात का अर्थात् स का सातवां तात्कालिकसम्बन्ध

$$=\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{७}\text{र}}{\text{ताय}^{७}}+७\frac{\text{ता}^{६}\text{र}}{\text{ताय}^{६}}\cdot\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}+२१\frac{\text{ता}^{५}\text{र}}{\text{ताय}^{५}}\cdot\frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}}+३५\frac{\text{ता}^{४}\text{र}}{\text{ताय}^{४}}\cdot\frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}}$$
$$+३५\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}}\cdot\frac{\text{ता}^{४}\text{ल}}{\text{ताय}^{४}}+२१\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}\cdot\frac{\text{ता}^{५}\text{ल}}{\text{ताय}^{५}}+७\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ता}^{६}\text{ल}}{\text{ताय}^{६}}+\frac{\text{ता}^{७}\text{ल}}{\text{ताय}^{७}}\cdot\text{र}$$
$$=\frac{\text{ता}^{७}\text{स}}{\text{ताय}^{७}}$$

इसी प्रकार
$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}}=\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}+\text{न}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}-१}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}}\cdot\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$
$$+\frac{\text{न}}{२}(\text{न}-१)\frac{\text{ता}^{\text{न}-२}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}-२}}\cdot\frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}}+\cdots+\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}}\cdot\text{र}$$

इस सिद्धान्त को लेब्निज़ * (Leibnitz) साहब ने निकाला है इसी कारण इसे "लेब्निज़ का सिद्धान्त" कहते हैं।

---

* सन् १७११ ईसवी में लेब्निज़ ने तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में लण्डन के रायल् सोसाइटी में मुक़द्दमा दायर किया था कि डाक्टर कील कहता है कि यह

इस सिद्धान्त से अनेक उदाहरणों की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है। जैसे, यदि $स = इ^{(क \cdot य + अ)} ज्या(ख \cdot य + ग)$ इस में स का (न) संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध निकालना है तो लेब्निज़ के सिद्धान्त से, $र = इ^{(क \cdot य + अ)}$ और, $ल = ज्या\ (ख \cdot य + ग)$

कल्पना करो तो,
$$\frac{तार}{ताय} = क \cdot इ^{(क \cdot य + अ)}$$
$$\frac{ता^{2}र}{ताय^{2}} = क^{2} \cdot इ^{(क \cdot य + अ)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = क^{न} \cdot इ^{(क \cdot य + अ)}$$ और सत्रहवें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से, $$\frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}} = ख^{न} \cdot ज्या\left(खय + ग + \frac{न \cdot \pi}{२}\right)$$

इन पर से,
$$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}} = र\left\{क^{न} \cdot ज्या\ (खय + ग) + न \cdot ख \cdot क^{न-१} \cdot ज्या\left(खय + ग + \frac{\pi}{२}\right) + \frac{न\ (न-१)}{२} \cdot ख^{२} \cdot क^{न-२} \cdot ज्या\left(खय + ग + \frac{२\pi}{२}\right) + \cdots + ख^{न} \cdot ज्या\left(खय + ग + \frac{न\pi}{२}\right)\right\}।$$

इसी प्रकार विद्यार्थियों को चाहिये कि बहुत से उदाहरणों को कर लेब्निज़ के सिद्धान्त का अच्छी भांति अभ्यास करें।

तात्कालिकसम्बन्ध तो न्यूटन साहब का निकाला है लेब्निज़ ने चोरी से कुछ हेर-फेर कर उसी को अपने ग्रन्थ में लिख दिया है। (See Hutton's Philosophical Dictionary, Vol. I, page 525.) यद्यपि उस समय में सोसाइटी के विचार से लेब्निज़ का दावा झूठा ठहरा तथापि अब आजकल सब विद्वानों के मत से तात्कालिकसम्बन्ध का प्रकाशक लेब्निज़ ही है। (See History of Philosophy by Ueberweg, Vol. II, page 99.)॥

१९। नीचे लिखा हुआ समीकरण कभीं कभीं विशेष उदाहरणों में बहुत उपयोगी है इस लिये इस पर अवश्य ध्यान देना चाहिये।

$$र \cdot \frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}} = \frac{ता^{न}रल}{ताय^{न}} - न \cdot \frac{ता^{न-१}}{ताय^{न-१}}\left(ल \cdot \frac{तार}{ताय}\right)$$
$$+ \frac{न(न-१)}{२} \cdot \frac{ता^{न-२}}{ताय^{न-२}}\left(ल \cdot \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right) -$$
$$+ (-१)^{न} \cdot ल \cdot \frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} \cdots\cdots (१)।$$

यहां न अभिन्न और धनसंख्या है।

कल्पना करो कि यह समीकरण किसी निश्चित न मान में ठीक है तो दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$र \cdot \frac{ता^{न+१}ल}{ताय^{न+१}} + \frac{तार}{ताय} \cdot \frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}}$$
$$= \frac{ता^{न+१}रल}{ताय^{न+१}} - न \cdot \frac{ता^{न}}{ताय^{न}}\left(ल \cdot \frac{तार}{ताय}\right)$$
$$+ \frac{न(न-१)}{२} \cdot \frac{ता^{न-१}}{ताय^{न-१}}\left(ल \cdot \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right) - \cdots\cdots\cdots$$
$$+ (-१)^{न} \cdot \frac{ता}{ताय}\left(ल \cdot \frac{ता^{न}र}{ताय^{न}}\right) \cdots\cdots\cdots (२)।$$

(१) समीकरण में यदि र के स्थान में $\frac{तार}{ताय}$ का उत्थापन देओ

$$\text{तो} \quad \frac{तार}{ताय} \cdot \frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}} = \frac{ता^{न}}{ताय^{न}}\left(ल \cdot \frac{तार}{ताय}\right) - न \cdot \frac{ता^{न-१}}{ताय^{न-१}}\left(ल \cdot \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right)$$
$$+ \frac{न(न-१)}{२} \cdot \frac{ता^{न-२}}{ताय^{न-२}}\left(ल \cdot \frac{ता^{३}र}{ताय^{३}}\right)$$
$$- \cdots\cdots + (-१)^{न} \cdot ल \cdot \frac{ता^{न+१}र}{ताय^{न+१}} \cdots\cdots\cdots (अ)।$$

दूसरे समीकरण के प्रथम पक्ष में द्वितीय पद का जो यह (अ) मान निकला है इसे दूसरे समीकरण के दूसरे पक्ष के प्रथम पद को छोड़ बाकी पदों में क्रम से घटा देने से,

$$र\cdot\frac{ता^{न+१}ल}{ताय^{न+१}}=\frac{ता^{न+१}रल}{ताय^{न+१}}-(न+१)\frac{ता^{न}}{ताय^{न}}\left(ल\cdot\frac{तार}{ताय}\right)$$
$$+\frac{(न+१)(न)}{२}\cdot\frac{ता^{न-१}}{ताय^{न-१}}\left(ल\cdot\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right)$$
$$-\cdots\cdots\cdots+(-१)^{न+१}ल\cdot\frac{ता^{न+१}र}{ताय^{न+१}}।$$

यदि $म=न+१$ तो $र\cdot\frac{ता^{म}ल}{ताय^{म}}$

$$=\frac{ता^{म}रल}{ताय^{म}}-म\cdot\frac{ता^{म-१}}{ताय^{म-१}}\left(ल\cdot\frac{तार}{ताय}\right)$$
$$+\frac{म(म-१)}{२}\cdot\frac{ता^{म-२}}{ताय^{म-२}}\left(ल\cdot\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right)$$
$$-\cdots\cdots\cdots+(-१)^{म}\cdot ल\cdot\frac{ता^{म}र}{ताय^{म}}\cdots\cdots(३)।$$

(३) समीकरण से यह सिद्ध होता है कि यदि (१) समीकरण किसी निश्चित न मान में सत्य हो तो न + १ इस मान में भी सत्य होगा पुनः, न के स्थान में न + १ इस मान का उत्थापन देने से न + २ इस मान में भी ठीक होगा इस प्रकार पुनः पुनः उत्थापन देने से यही सिद्ध होगा कि निश्चित न मान के अनन्तर चाहे जो अभिन्न और धन न का मान मानो सब में (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु यदि न = १ तो स्पष्ट देख पड़ता है कि (१) समीकरण सत्य है इस लिये सर्वदा सब न के मान में (१) समीकरण ठीक है यह सिद्ध हुआ।

२०। यदि, $स=फ(य)$ इस का विस्तार एक श्रेढ़ी में हो जिस का रूप, $स=अ+क\cdot य+ख\cdot य^{२}+ग\cdot य^{३}+घ\cdot य^{४}+\cdots$ ऐसा हो, जहां अ, क, ख इत्यादि स्थिर हैं तो वार वार तात्कालिकसम्बन्ध निकाल और उन में य का मान शून्य मानने से क, ख, ग इत्यादि

प्रगट हो सकते हैं, और फल में य का मान शून्य मानने से अ का मान भी व्यक्त हो जायगा।

जैसे,

यदि, $स = अ + क \cdot य + ख \cdot य^{२} + ग \cdot य^{३} + घ \cdot य^{४} + \cdots\cdots$

तो तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा से,

$$\frac{तास}{ताय} = क + २ ख \cdot य + ३ ग \cdot य^{२} + ४ घ \cdot य^{३} + \cdots\cdots$$

$$\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} = २ ख + २ \cdot ३ ग \cdot य + ३ \cdot ४ घ \cdot य^{२} + \cdots\cdots$$

$$\frac{ता^{३}स}{ताय^{३}} = २ \cdot ३ ग + २ \cdot ३ \cdot ४ घ \cdot य + \cdots\cdots$$

$$\frac{ता^{४}स}{ताय^{४}} = २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot घ + \cdots\cdots$$

प्रत्येक समीकरणों में य का शून्य मान मानने से कल्पना करो कि $\frac{तास}{ताय} = त_{१}$। $\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} = त_{२}$। इत्यादि तो $त_{१} = क$। $\frac{त_{२}}{२} = ख$। $\frac{त_{३}}{२ \cdot ३} = ग$।

और $\frac{त_{४}}{२ \cdot ३ \cdot ४} = घ$ इत्यादि हों गे और मानो कि जब $य = 0$ तो $स = त = अ$, अब इन पर से,

$$स = त + त_{१} य + \frac{त_{२}}{२} य^{२} + \frac{त_{३}}{२ \cdot ३} य^{३} + \frac{त_{४}}{२ \cdot ३ \cdot ४} य^{४} + \cdots + \frac{त_{न}}{\underline{|न}} \cdot य^{न}।$$

इसे म्याक्लरिन (maclaurin) का सिद्दान्त कहते हैं इस से अनेक नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं।

इस की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) कल्पना करो कि $स = (य + आ)^{न}$ इस में

यदि $य = 0$ तो $स = आ^{न} = त$।

$$\frac{तास}{ताय} = न (य + आ)^{न-१}$$ यदि $य = 0$ तो $त_{१} = न \cdot आ^{न-१}$।

इसी भांति सब सम्बन्धों में $य = 0$ करने से,

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = \text{न}(\text{न}-१)(\text{य}+\text{आ})^{\text{न}-२} \text{ । } \text{त}_२ = \text{न}(\text{न}-१)\,\text{आ}^{\text{न}-२} \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3} = \text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)(\text{य}+\text{आ})^{\text{न}-३} \text{ और}$$

$$\text{त}_३ = \text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\,\text{आ}^{\text{न}-३} \text{ इत्यादि हों गे,}$$

अब इन का म्याक्लरिन के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$\text{स} = (\text{य}+\text{आ})^{\text{न}} = \text{आ}^{\text{न}} + \text{न}\cdot\text{आ}^{\text{न}-१}\text{य} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\text{आ}^{\text{न}-२}\text{य}^2$$

$$+ \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{२\cdot३}\text{आ}^{\text{न}-३}\text{य}^3 + \cdots\cdots$$

इसी को द्वियुक्पद सिद्धान्त कहते हैं ।

(२) यदि $\text{स} = \text{फ}(\text{य}) = \text{ज्याय}$, तो यहां जब, $\text{य} = ०$ तो $\text{त} = ०$ ।

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय} \quad \text{यदि } \text{य} = ० \text{ तो } \text{त}_१ = १ \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = -\text{ज्याय} \quad \text{यदि } \text{य} = ० \text{ तो } \text{त}_२ = ० \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3} = -\text{कोज्याय} \quad \text{यदि } \text{य} = ० \text{ तो } \text{त}_३ = -१ \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^4\text{स}}{\text{ताय}^4} = \text{ज्याय} \quad \text{यदि } \text{य} = ० \text{ तो } \text{त}_४ = ० \text{ ।}$$

$$\frac{\text{ता}^5\text{स}}{\text{ताय}^5} = \text{कोज्याय} \quad \text{यदि } \text{य} = ० \text{ तो } \text{त}_५ = १ \text{ । इत्यादि}$$

$$\text{इस लिये ज्याय} = \text{य} - \frac{\text{य}^3}{२\cdot३} + \frac{\text{य}^5}{२\cdot३\cdot४\cdot५} - \frac{\text{य}^7}{\underline{|७}} + \cdots\cdots$$

और जीवा का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\text{कोज्याय} = १ - \frac{\text{य}^2}{२} + \frac{\text{य}^4}{२\cdot३\cdot४} - \frac{\text{य}^6}{\underline{|६}} + \cdots\cdots$$

जीवा में कोटिज्या का भाग देने से,

$$\text{स्पय} = य + \frac{य^३}{१\cdot३} + \frac{२ य^५}{३\cdot५} + \frac{१७ य^७}{५\cdot७\cdot९} + \cdots\cdots$$

कोटिज्या का एक में भाग देने से,

$$\text{छेय} = १ + \frac{य^२}{२} + \frac{५ य^४}{२\cdot३\cdot४} + \cdots\cdots$$

इस प्रकार चापीयमान से जीवा कोटिज्या इत्यादि जानने के लिये अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं।

(३) $स = फ(य) = ज्या^{-१} य$ तो यहां $य = 0$ तो $त = 0$।

$$\frac{तास}{ताय} = त_१ + २ त_२ \frac{य}{२} + ३ त_३ \frac{य^२}{२\cdot३} + ४ त_४ \frac{य^३}{\underline{|४}} + \cdots = \frac{१}{\sqrt{१ - य^२}}$$

यहां $\frac{१}{\sqrt{१-य^२}} = (१ - य^२)^{-\frac{१}{२}}$ इसे द्वियुक्पद सिद्धान्त से वा आसन्नमूल से–

फैलाने से $\frac{१}{\sqrt{१-य^२}} = १ + \frac{य^२}{२} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४} य^४ + \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६} य^६ + \cdots$

इस लिये $त_१ + २ त_२ \frac{य}{२} + ३ त_३ \frac{य^२}{\underline{|३}} + ४ त_४ \frac{य^३}{\underline{|४}} + \cdots\cdots$

$$= १ + \frac{य^२}{२} + \frac{१\cdot३ य^४}{२\cdot४} + \frac{१\cdot३\cdot५ य^६}{२\cdot४\cdot६} + \cdots$$

यहां य के समान घातों का गुणक समान करने से,

$$त_१ = १,\ त_२ = 0,\ \frac{३ त_३}{२\cdot३} = \frac{१}{२},\quad \therefore\ त_३ = १$$

$$त_४ = 0,\quad \frac{५ त_५}{\underline{|५}} = \frac{१\cdot३}{२\cdot४},\quad \therefore\ त_५ = १\cdot३^२,\ त_६ = 0$$

$$\frac{७ त_७}{\underline{|७}} = \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६},\quad \therefore\ त_७ = १\cdot३^२\cdot५^२$$

$$\therefore\ ज्या^{-१} य = य + \frac{१}{१\cdot२}\cdot\frac{य^३}{३} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}\cdot\frac{य^५}{५} + \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}\cdot\frac{य^७}{७} + \cdots$$

इस में सामान्य रीति से न संख्यकपद

$$= \frac{१ \cdot ३ \cdot ५ \cdots\cdots (२न-३)}{२ \cdot ४ \cdot ६ \cdots\cdots (२न-२)} \cdot \frac{य^{२न-१}}{२न-१}$$ ऐसा होगा ।

इस श्रेढी में यदि $ज्या^{-१} य = \frac{२\pi}{१२}$ तो $य = \frac{१}{२}$

$$\therefore \frac{२\pi}{१२} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१ \cdot २} \cdot \frac{१}{३ \cdot ८} + \frac{१ \cdot ३}{२ \cdot ४} \cdot \frac{१}{५ \cdot ३२} + \frac{१ \cdot ३ \cdot ५}{२ \cdot ४ \cdot ६} \cdot \frac{१}{७ \cdot १२८} + \cdots ।$$

(४) यदि $स = स्प^{-१} य$ तो यदि $य = 0$ तो $त = 0$ ।

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{१}{१+य^२} = १ - य^२ + य^४ - य^६ + \cdots\cdots$$

$$= त_१ + २त_२ \cdot \frac{य}{१ \cdot २} + ३त_३ \frac{य^२}{२ \cdot ३} + ४त_४ \frac{य^३}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \cdots$$

(३) उदाहरण के ऐसा यहां भी, $त_१ = १$, $त_२ = 0$ ।

$$\frac{त_३}{२} = -१ \;\therefore\; त_३ = -२ \text{ । } त_४ = 0$$

$$\frac{त_५}{२ \cdot ३ \cdot ४} = १ \;\therefore\; त_५ = २ \cdot ३ \cdot ४$$

$$\therefore\; स = य - \frac{२य^३}{२ \cdot ३} + \frac{२ \cdot ३ \cdot ४ य^५}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} - \cdots\cdots$$

वा, $स्प^{-१} य = य - \frac{य^३}{३} + \frac{य^५}{५} - \frac{य^७}{७} + \cdots$ । इस में यदि $य = १$

तो $\frac{\pi}{४} = १ - \frac{१}{३} + \frac{१}{५} - \frac{१}{७} + \cdots\cdots$ ।

जब कि $\frac{\pi}{४} = स्प^{-१}\frac{१}{२} + स्प^{-१}\frac{१}{३}$

और $स्प^{-१}\frac{१}{२} = \frac{१}{२} - \frac{१}{३ \cdot २^३} + \frac{१}{५ \cdot २^५} - \frac{१}{७ \cdot २^७} + \cdots\cdots$ ।

$$स्प^{-1}\frac{१}{३}=\frac{१}{३}-\frac{१}{३\cdot३^{३}}+\frac{१}{५\cdot३^{५}}-\frac{१}{७\cdot३^{७}}+\cdots\cdots।$$

इस लिये $\frac{\pi}{४}=\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{३}\right)-\frac{१}{३}\left(\frac{१}{२^{३}}+\frac{१}{३^{३}}\right)+\cdots\cdots।$

और जब कि $\frac{\pi}{४}=४\,स्प^{-1}\frac{१}{५}-स्प^{-1}\frac{१}{२३९}$ तो, पूर्व युक्ति से

$$\frac{\pi}{४}=४\left\{\frac{१}{५}-\frac{१}{३\cdot५^{३}}+\frac{१}{५\cdot५^{५}}-\frac{१}{७\cdot५^{७}}+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{१}{२३९}-\frac{१}{३(२३९)^{३}}+\frac{१}{५(२३९)^{५}}-\frac{१}{७(२३९)^{७}}+\cdots\cdots\right\}।$$

(५) यदि $स=ला(१+य)$ तो यदि $य=0$ तो $त=0$ ।

$$\frac{तास}{ताय}=\frac{१}{१+य}=१-य+य^{२}-य^{३}+\cdots\cdots$$

$$=त_{१}+२त_{२}\frac{य}{२}+३\,त_{३}\frac{य^{२}}{२\cdot३}+\cdots\cdots$$

अब ठीक तीसरे वा चौथे उदाहरण के विधि से स का मान लावो तो

$$स=ला(१+य)=य-\frac{य^{२}}{२}+\frac{य^{३}}{३}-\frac{य^{४}}{४}+\cdots\cdots$$

परन्तु यहां अन्योन्याश्रित दोष पड़ता है इस लिये द्वितीयाध्याय के दूसरे सिद्धान्त का विधि लघुरिक्थ निकालने के लिये बहुत उत्तम है ।

जब कि द्वियुक्पद सिद्धान्त म्याक्लरिन् के सिद्धान्त ही से उत्पन्न होता है और द्वियुक्पद सिद्धान्त से लघुरिक्थ का सिद्धान्त उत्पन्न होता है इस लिये अन्योन्याश्रय दोष का निवारण भी हो सकता है ।

(६) दूसरे अध्याय के दूसरे सिद्धान्त के

$$अ^{य}=१+(ला_{इ}अ)य+(ला_{इ}अ)^{२}\frac{य^{२}}{१\cdot२}+\cdots\cdots\quad(१)$$

इस समीकरण में इ = अ कल्पना करें तो (१)

इस का मान $\text{इ}^{\text{य}} = 1 + \text{य} + \frac{\text{य}^2}{1 \cdot 2} + \frac{\text{य}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$ (२)

ऐसा होगा ।

(२) इस समीकरण में यदि $\text{य} = \text{य}\sqrt{-1}$ वा $\text{य} = -\text{य}\sqrt{-1}$

$$\text{तो}\quad \text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}} = 1 + \text{य}\sqrt{-1} - \frac{\text{य}^2}{1 \cdot 2} - \frac{\text{य}^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

$$\text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}} = 1 - \text{य}\sqrt{-1} - \frac{\text{य}^2}{1 \cdot 2} + \frac{\text{य}^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

इन दोनों को परस्पर घटा और जोड़ देने से,

$$\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}} - \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\left(\text{य} - \frac{\text{य}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\text{य}^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right)$$

$$\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}} + \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}} = 2\left(1 - \frac{\text{य}^2}{1 \cdot 2} + \frac{\text{य}^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

इस लिये दूसरे उदाहरण को देखने से,

$$\frac{\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}} - \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{ज्याय}। \quad \frac{\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}} + \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}}}{2} = \text{कोज्याय} \cdots (3)$$

(३) समीकरण से,

$$\text{इ}^{\pm\text{य}\sqrt{-1}} = \text{कोज्याय} \pm \text{ज्याय}\sqrt{-1}$$

$$\therefore\ \text{इ}^{\pm\text{मय}\sqrt{-1}} = (\text{कोज्याय} \pm \text{ज्या}\sqrt{-1})^{\text{म}} \cdots\cdots \ (\text{क})।$$

परन्तु (३) समीकरण में यदि य = मय

$$\text{तो}\quad \frac{\text{इ}^{\text{मय}\sqrt{-1}} - \text{इ}^{-\text{मय}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{ज्यामय}।$$

$$\frac{\text{इ}^{\text{मय}\sqrt{-1}} + \text{इ}^{-\text{मय}\sqrt{-1}}}{2} = \text{कोज्यामय}।$$

$$\therefore\ \text{इ}^{\pm\text{मय}\sqrt{-1}} = \text{कोज्यामय} \pm \text{ज्यामय}\sqrt{-1} \cdots (\text{ख})।$$

इस लिये (क) और (ख) ये दोनों समान हुए अर्थात्

$$(\text{कोज्याय} \pm \text{ज्याय}\sqrt{-1})^{\text{म}} = \text{कोज्यामय} \pm \text{ज्यामय}\sqrt{-1} \cdots (\text{ग})।$$

इसी को "डेमाइवर" (De moivre) का सिद्धान्त कहते हैं।

(७) छठवें उदाहरण के (ख) समीकरण से,

$$\text{इ}^{\text{मय}\sqrt{-1}} = \text{कोज्यामय} + \text{ज्यामय}\sqrt{-1}।$$

$$\text{इ}^{-\text{मय}\sqrt{-1}} = \text{कोज्यामय} - \text{ज्यामय}\sqrt{-1}।$$

परस्पर भाग देने से,

$$\frac{\text{इ}^{\text{मय}\sqrt{-1}}}{\text{इ}^{-\text{मय}\sqrt{-1}}} = \text{इ}^{2\,\text{मय}\sqrt{-1}} = \frac{\text{कोज्यामय} + \text{ज्यामय}\sqrt{-1}}{\text{कोज्यामय} - \text{ज्यामय}\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1 + \text{स्पमय}\sqrt{-1}}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}}$$ । दोनों का लघुरिक्थ लेने से,

$$2\,\text{मय}\sqrt{-1} = \text{ला}(1 + \text{स्पमय}\sqrt{-1}) - \text{ला}(1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1})$$

अब यहां पांचवें उदाहरण से $\text{य} = \pm\text{स्पमय}\sqrt{-1}$

ऐसा मान लघुरिक्थों का अन्तर निकालो तो

$$2\,\text{मय}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}\left(\text{स्पमय} - \frac{\text{स्प}^3\text{मय}}{3} + \frac{\text{स्प}^5\text{मय}}{5} - \frac{\text{स्प}^7\text{मय}}{7} + \cdots\right)$$

$$\therefore\ \text{मय} = \text{स्पमय} - \frac{\text{स्प}^3\text{मय}}{3} + \frac{\text{स्प}^5\text{मय}}{5} - \frac{\text{स्प}^7\text{मय}}{7} + \cdots\cdots।$$

यह ठीक चौथे उदाहरण के ऐसा उत्पन्न होता है।

इसी प्रकार जब, $\text{इ}^{2\,\text{मय}\sqrt{-1}} = \dfrac{1 + \text{स्पमय}\sqrt{-1}}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}}$

$$\therefore\ \text{इ}^{2\,\text{मय}\sqrt{-1}} + 1 = \frac{2}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}}$$

और $\text{इ}^{2\,\text{मय}\sqrt{-1}} - 1 = \dfrac{2\,\text{स्पमय}\sqrt{-1}}{1 - \text{स्पमय}\sqrt{-1}}$ । परस्पर भाग देने से,

$$\frac{इ^{२मय\sqrt{-१}} - १}{इ^{२मय\sqrt{-१}} + १} = स्पमय \sqrt{-१}$$

इन दोनों का वर्ग एक में घटा देने से,

$$\frac{४ इ^{२मय\sqrt{-१}}}{(इ^{२मय\sqrt{-१}} + १)^२} = १ + स्प^२मय = छे^२मय$$

$$\therefore \quad \frac{२ इ^{मय\sqrt{-१}}}{इ^{२मय\sqrt{-१}} + १} = छेमय ।$$

प्रसङ्ग से और उदाहरणों को दिखाते हैं।

(८) जब कि स्पष्ट है कि

$य = 0, \pm \pi, \pm २ \pi, \pm ३ \pi$ इत्यादि हो तो ज्याय $= 0$ तो

ज्याय $=$ अ $\cdot$ य $(\pi^२ - य^२)(२^२\pi^२ - य^२)(३^२ \pi^२ - य^२) \cdots$ ऐसा कल्पना कर सकते हैं, इस में यदि क $=$ अ $\cdot \pi^२ \cdot २^२ \pi^२ \cdot ३^२ \pi^२ \ldots\ldots$

$$\text{तो}\quad ज्याय = क \cdot य \left(१ - \frac{य^२}{\pi^२}\right)\left(१ - \frac{य^२}{२^२ \pi^२}\right)\left(१ - \frac{य^२}{३^२ \pi^२}\right) \cdots$$

$$\text{और}\quad \frac{ज्याय}{य} = क \left(१ - \frac{य^२}{\pi^२}\right)\left(१ - \frac{य^२}{२^२ \pi^२}\right)\left(१ - \frac{य^२}{३^२ \pi^२}\right) \cdots\cdots\cdots$$

अब यहां यदि $य = 0$ तो $\frac{ज्याय}{य} = १ = क$

$$\text{इस लिये}\ ज्याय = य \left(१ - \frac{य^२}{\pi^२}\right)\left(१ - \frac{य^२}{२^२ \pi^२}\right)\left(१ - \frac{य^२}{३^२ \pi^२}\right) \cdots\cdots \quad (१)\ ।$$

इसी प्रकार जब $य = \pm \frac{\pi}{२}, \pm \frac{३\pi}{२}, \pm \frac{५\pi}{२}$ इत्यादि

तो, कोज्याय $= 0$, इस लिये

$$कोज्याय = अ \left(\frac{\pi^२}{२^२} - य^२\right)\left(\frac{३^२\pi^२}{२^२} - य^२\right)\left(\frac{५^२\pi^२}{२^२} - य^२\right) \cdots\cdots \quad \text{इत्यादि}$$

ऐसा मान सकते हैं। यहां भी यदि क $=$ अ $\cdot \frac{\pi^२}{२^२} \cdot \frac{३^२\pi^२}{२^२} \cdots\cdots\cdots$

$$\text{तो, कोज्याय} = \text{क}\left(१ - \frac{२^२ \text{य}^२}{\pi^२}\right)\left(१ - \frac{२^२ \text{य}^२}{३^२ \pi^२}\right)\left(१ - \frac{२^२ \text{य}^२}{५^२ \pi^२}\right)\cdots।$$

यहां भी यदि $\text{य} = 0$ तो $\text{कोज्याय} = १ = \text{क}$

$$\text{इस लिये कोज्याय} = \left(१ - \frac{२^२ \text{य}^२}{\pi^२}\right)\left(१ - \frac{२^२ \text{य}^२}{३^२ \pi^२}\right)\left(१ - \frac{२^२ \text{य}^२}{५^२ \pi^२}\right)\cdots (२)।$$

(९) आठवें उदाहरण में (१) इस में यदि दूसरे पक्ष का स्वरूप $\text{य}\left(१ - \frac{\text{य}^२}{\pi}\right)$ इत्यादि का घात कर के बनावो

$$\text{तो, ज्याय} = \text{य}\left\{१ - \frac{\text{य}^२}{\pi^२}\left(\frac{१}{१^२} + \frac{१}{२^२} + \frac{१}{३^२} + \cdots\right)\right\} + \cdots\cdots\cdots$$

परन्तु दूसरे उदाहरण से,

$$\text{ज्याय} = \text{य}\left(१ - \frac{\text{य}^२}{२ \cdot ३} + \frac{\text{य}^४}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} - \cdots\right)$$

इस लिये य के समान घातों के गुणकों को समान करने से,

$$\frac{१}{\pi^२}\left(\frac{१}{१^२} + \frac{१}{२^२} + \frac{१}{३^२} + \cdots\right) = \frac{१}{६}।$$

$$\text{वा, } \frac{१}{१^२} + \frac{१}{२^२} + \frac{१}{३^२} + \frac{१}{४^२} + \cdots = \frac{\pi^२}{६} \cdots\cdots (१)।$$

इसी प्रकार आठवें उदाहरण के (२) इस में भी यदि घात कर दूसरे पक्ष का रूप बनावो तो,

$$\text{कोज्याय} = १ - \frac{२^२ \text{य}^२}{\pi^२}\left(\frac{१}{१^२} + \frac{१}{३^२} + \frac{१}{५^२} + \cdots\right) + \cdots$$

परन्तु दूसरे उदाहरण के समीकरण से,

$$\text{कोज्याय} = १ - \frac{\text{य}^२}{२} + \frac{\text{य}^४}{२ \cdot ३ \cdot ४} - \cdots\cdots\cdots$$

इस लिये यहां भी दोनों पक्षों में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से,

$$\frac{२^२}{\pi^२}\left(\frac{१}{१^२} + \frac{१}{३^२} + \frac{१}{५^२} + \cdots\cdots\right) = \frac{१}{२}$$

$$\therefore \frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\frac{१}{७^२}+\cdots\cdots=\frac{\pi^२}{८}\cdots\cdots (२)\ ।$$

(१०) नवें उदाहरण के (१) और (२) समीकरणों का अन्तर करने से,

$$\frac{१}{२^२}+\frac{१}{४^२}+\frac{१}{६^२}+\frac{१}{८^२}+\cdots\cdots=\frac{\pi^२}{२४}\cdots\cdots (१)$$

दोनों को जोड़ देने से,

$$२\left(\frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{१}{२^२}+\frac{१}{४^२}+\frac{१}{६^२}+\cdots\right)=\frac{७\pi^२}{२४}$$

$$\therefore \frac{२}{७}\left(\frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\cdots\right)+\frac{१}{७}\left(\frac{१}{२^२}+\frac{१}{४^२}+\frac{१}{६^२}+\cdots\right)=\frac{\pi^२}{२४}$$

इस प्रकार जोड़ घटा कर अनेक समीकरण बना सकते हो ।

(११) जब आठवें उदाहरण से यह सिद्ध है कि,

$$ज्याय = य\left(१-\frac{य^२}{\pi^२}\right)\left(१-\frac{य^२}{२^२\pi^२}\right)\left(१-\frac{य^२}{३^२\pi^२}\right)\cdots\cdots$$

तो दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से,

$$र = ला\,(ज्याय) = लाय + ला\left(१-\frac{य^२}{\pi^२}\right)+ला\left(१-\frac{य^२}{२^२\pi^२}\right)+\cdots (१)\ ।$$

(१) इस का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\frac{तार}{ताय}=\frac{कोज्याय}{ज्याय}=\frac{१}{य}-\frac{\frac{२य}{\pi^२}}{१-\frac{य^२}{\pi^२}}-\frac{\frac{२य}{२^२\pi^२}}{१-\frac{य^२}{२^२\pi^२}}-\cdots\cdots\cdots$$

$$वा,\ \frac{१}{स्पय}=\frac{१}{य}-\frac{\frac{२य}{\pi^२}}{१-\frac{य^२}{\pi^२}}-\frac{\frac{२य}{\pi^२}}{२^२-\frac{य^२}{\pi^२}}-\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

अब यदि $\frac{य^२}{\pi^२}=प^२$ तो $य^२=\pi^२\cdot प^२\ \therefore\ य=\pi प$,

और $\frac{२य}{\pi^२} = \frac{२ष}{\pi}$ इन पर से दूसरे समीकरण का रूप,

$$\frac{१}{स्प \pi ष} = \frac{१}{\pi \cdot ष} - \frac{२ष}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२ - ष^२} + \frac{१}{२^२ - ष^२} + \frac{१}{३^२ - ष^२} + \cdots\right\} \cdots (३)$$

इसी प्रकार यदि $\frac{य^२}{\pi^२} = -ष^२$ तो, $य = \pi \cdot ष\sqrt{-१}$

और $\frac{२य}{\pi^२} = \frac{२ष\sqrt{-१}}{\pi}$ और सातवें उदाहरण से,

$$स्प(\pi \cdot ष\sqrt{-१}) = \frac{१}{\sqrt{-१}} \cdot \frac{इ^{-२\pi ष} - १}{इ^{-२\pi ष} + १} = \frac{१}{\sqrt{-१}} \cdot \frac{१ - इ^{२\pi ष}}{१ + इ^{२\pi ष}}$$

$$\therefore \frac{१}{स्प(\pi ष\sqrt{-१})} = \frac{१ + इ^{२\pi ष}}{१ - इ^{२\pi ष}}\sqrt{-१}$$

$$= \frac{१}{\pi ष\sqrt{-१}} - \frac{२ष\sqrt{-१}}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२ + ष^२} + \frac{१}{२^२ + ष^२} + \frac{१}{३^२ + ष^२} + \cdots\right\} \cdots (४) ।$$

(३) समीकरण में समशोधन करने से,

$$\frac{१}{\pi ष} - \frac{१}{स्प \pi ष} = \frac{२ष}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२ - ष^२} + \frac{१}{२^२ - ष^२} + \frac{१}{३^२ - ष^२} + \cdots\right\}$$

वा, $$\frac{१}{२ष^२} - \frac{\pi}{२ष \cdot स्प \pi ष} = \frac{१}{१^२ - ष^२} + \frac{१}{२^२ - ष^२} + \frac{१}{३^२ - ष^२} + \cdots (५) ।$$

इसी प्रकार चौथे समीकरण से,

$$\frac{\pi}{२ष} \cdot \frac{इ^{२\pi ष} + १}{इ^{२\pi ष} - १} - \frac{१}{२ष^२} = \frac{१}{१^२ + ष^२} + \frac{१}{२^२ + ष^२} + \frac{१}{३^२ + ष^२} + \cdots (६) ।$$

(१२) आठवें उदाहरण से जो

$$कोज्याय = \left(१ - \frac{२^२ य^२}{\pi^२}\right)\left(१ - \frac{२^२ य^२}{३^२ \pi^२}\right)\left(१ - \frac{२^२ य^२}{५^२ \pi^२}\right) \cdots$$

यह सिद्ध है, इस का लघुरिक्थ लेने से,

$$\text{ला(कोज्याय)}=\text{ला}\left(१-\frac{२^२ य^२}{\pi^२}\right)+\text{ला}\left(१-\frac{२^२ य^२}{३^२\pi^२}\right)+\text{ला}\left(१-\frac{२^२ य^२}{५^२\pi^२}\right)\cdots\ (१)$$

(१) इस के दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्ध निकाल ऋण एक से गुण देने से,

$$\frac{\text{ज्याय}}{\text{कोज्याय}}=\frac{\frac{८य}{\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{८य}{३^२\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{३^२\pi^२}}+\frac{\frac{८य}{५^२\cdot\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{५^२\pi^२}}+\cdots\cdots$$

$$=२य\left\{\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{३^२\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{३^२\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{५^२\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{५^२\pi^२}}+\cdots\right\}$$

$$=२य\left\{\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{१-\frac{२^२ य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{३^२-\frac{२^२ य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{५^२-\frac{२^२ य^२}{\pi^२}}+\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots(२)$$

यहां भी कल्पना करो कि $\frac{२^२ य^२}{\pi^२}=\text{ब}^२\ \therefore\ य=\frac{\pi\cdot\text{ब}}{२}$

और $२य\cdot\frac{२^२}{\pi^२}=\frac{४\text{ब}}{\pi}$ तो दूसरे समीकरण का रूप,

$$\text{स्पय}=\text{स्प}\ \frac{\pi\cdot\text{ब}}{२}=\frac{४\text{ब}}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२-\text{ब}^२}+\frac{१}{३^२-\text{ब}^२}+\frac{१}{५^२-\text{ब}^२}+\cdots\right\}$$

$$\therefore\ \frac{१}{१^२-\text{ब}^२}+\frac{१}{३^२-\text{ब}^२}+\frac{१}{५^२-\text{ब}^२}+\cdots=\frac{\pi}{४\text{ब}}\cdot\text{स्प}\ \frac{\pi\cdot\text{ब}}{२}\cdots(३)$$

इसी प्रकार यदि $\frac{२^२य^२}{\pi^२}=-\text{ब}^२$ तो $२य=\pi\text{ब}\sqrt{-१}$

$२य\sqrt{-१}=-\pi\text{ब}$ और $२य\ \frac{२^२}{\pi^२}=\frac{४\text{ब}\sqrt{-१}}{\pi}$

अब यहां भी सातवें उदाहरण से,

$$\text{स्पय} = \text{स्प}\frac{\pi\text{प}\sqrt{-१}}{२} = \frac{\text{इ}^{-\pi\cdot\text{प}}-१}{\text{इ}^{-\pi\text{प}}+१}\cdot\frac{१}{\sqrt{-१}} = \frac{१-\text{इ}^{\pi\text{प}}}{१+\text{इ}^{\pi\text{प}}}\cdot\frac{१}{\sqrt{-१}}$$

$$= \frac{४\text{प}\sqrt{-१}}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२+\text{प}^२}+\frac{१}{३^२+\text{प}^२}+\frac{१}{५^२+\text{प}^२}+\cdots\right\}$$

$$\therefore \frac{१}{१^२+\text{प}^२}+\frac{१}{३^२+\text{प}^२}+\frac{१}{५^२+\text{प}^२}+\cdots = -\frac{\pi}{४\text{प}}\cdot\frac{१-\text{इ}^{\pi\text{प}}}{१+\text{इ}^{\pi\text{प}}}$$

$$= \frac{\pi}{४\text{प}}\cdot\frac{\text{इ}^{\pi\text{प}}-१}{\text{इ}^{\pi\text{प}}+१}$$

(१३) बारहवें उदाहरण के (३) समीकरण में

जो $\frac{\pi}{४\text{प}}\cdot\text{स्प}\frac{\pi\cdot\text{प}}{२}$ है इस को $\frac{\pi}{४\text{प}}\cdot\frac{\pi\cdot\text{प}}{२}\cdot\frac{\text{स्प}\frac{\pi\text{प}}{२}}{\frac{\pi\cdot\text{प}}{२}}$

$= \frac{\pi^२}{८}\cdot\frac{\text{स्प}\frac{\pi\text{प}}{२}}{\frac{\pi\cdot\text{प}}{२}}$ ऐसे भी लिख सकते हो,

अब उसी समीकरण में यदि प = ० शून्य मानो तो दहने ओर का पक्ष $\frac{\pi^२}{८}$ के तुल्य होगा और बायें ओर का पक्ष $\frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\cdots$ इस के तुल्य होगा,

इस लिये $\frac{\pi^२}{८} = \frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\cdots\cdots$

यही ठीक नवें उदाहरण के (२) समीकरण से भी सिद्ध हुआ है।

(१४) यदि ज्यास = म · ज्याय तो स = ज्या$^{-१}$(म · ज्याय) = ज्या$^{-१}$र
यहां र = म · ज्याय, अब यहां य = ० तो त = ०।
फिर तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{र}^२}} \quad \text{परन्तु} \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{म} \cdot \text{कोज्याय}$$

$$\therefore \frac{\text{तास}}{\text{तार}} \times \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{म} \cdot \text{कोज्याय}}{\sqrt{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}}} = \text{म} = \text{त}_१ \text{ यदि य} = 0 \text{।}$$

$$\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताय}^२}$$

$$= \frac{-\text{म} \cdot \text{ज्याय}\sqrt{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}} + \text{म}^३ \cdot \text{कोज्या}^२\text{य}(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}} \cdot \text{ज्याय}}{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}}$$

यहां यदि $\text{य} = 0$, तो $\text{त}_२ = 0$।

$$\frac{\text{ता}^३\text{स}}{\text{ताय}^३}$$

$$= \frac{-\text{म} \cdot \text{कोज्याय}\sqrt{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}} + \text{म}^३ \cdot \text{ज्या}^२\text{य} \cdot \text{कोज्याय}(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}}{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}}$$

$$- \frac{२\text{म}^३ \cdot \text{ज्या}^२\text{य} \cdot \text{कोज्याय}(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}}{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}}$$

$$+ \frac{\text{म}^३ \cdot \text{कोज्या}^३\text{य}(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}}{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}}$$

$$+ \frac{\text{म}^५ \cdot \text{कोज्या}^३\text{य} \cdot \text{ज्या}^२\text{य}(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^{-\frac{३}{२}}}{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}}$$

$$+ \text{ता}\left\{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}\right\}$$

$$\frac{\left\{\text{म} \cdot \text{ज्याय}\sqrt{१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य}} - \text{म}^३ \cdot \text{कोज्या}^२\text{य} \cdot \text{ज्याय}(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}\right\}}{(१ - \text{म}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{य})^२}$$

अब, यदि $\text{य} = 0$ तो, $\text{त}_३ = -\text{म} + \text{म}^३ = \text{म}(\text{म}^२ - १)$

इन को (२०) वें प्रक्रम में जो म्याक्लारिन् का सिद्धान्त है उस में उत्थापन देने से,

$$स = म \cdot य + \frac{म(म^2-1)}{2 \cdot 3} य^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= म \cdot य + \frac{म(म+1)(म-1)}{\lfloor 3} य^3 + \frac{म(म^2-1)(3म+1)(3म-1)}{\lfloor 5} य^5 + \cdots$$

अथ वा इस उदाहरण में जो $\frac{तास}{ताय} = \frac{म \cdot कोज्याय}{\sqrt{1 - म^2 \cdot ज्या^2 य}}$
यह सिद्ध हुआ है इस में दहने पक्ष का रूप यघातवृद्धि में बना कर
उसे $त_1 + 2 त_2 \frac{य}{2} + 3 त_3 \frac{य^2}{2 \cdot 3} + \cdots\cdots$
इस के समान कर य के समानघातों के गुणकों को तुल्य मानने
से भी $त_1$, $त_2$ इत्यादि व्यक्त हो जायंगे।

(१५) $स = इ^{अ \cdot ज्या^{-1} कय}$ इस में य के घातवृद्धि में स का
मान ले आना है, यहां मानो कि $ज्या^{-1} कय = र$

$$\left.\begin{array}{l} तो \quad स = इ^{अ \cdot र} \\ \therefore \frac{तास}{तार} = अ \cdot इ^{अर} \end{array}\right\} \begin{array}{l} ज्यार = कय \\ \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{क}{\sqrt{1 - क^2 य^2}} \end{array}$$

$$और, \frac{तास}{ताय} = \frac{अ \cdot क \cdot इ^{अर}}{\sqrt{1 - क^2 य^2}} ।$$

$$वा, \frac{तास}{ताय} = \frac{अ \cdot क \cdot स}{\sqrt{1 - क^2 य^2}}$$

परन्तु म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से,

$$स = त + त_1 \cdot य + त_2 \cdot \frac{य^2}{1 \cdot 2} + त_3 \cdot \frac{य^3}{2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

$$\frac{तास}{ताय} = त_1 + 2 त_2 \cdot \frac{य^2}{1 \cdot 2} + 3 त_3 \cdot \frac{य^2}{2 \cdot 3} + \cdots$$

और द्वियुक्पद सिद्धान्त से,

$$= (१ - क^२ \cdot य^२)^{-\frac{१}{२}} = १ + \frac{१}{२} क^२ \cdot य^२ + \frac{१ \cdot ३}{२ \cdot ४} क^४ \cdot य^४ + \frac{१ \cdot ३ \cdot ५}{२ \cdot ४ \cdot ६} \cdot क^६ \cdot य^६ + \cdots\cdots$$

इस लिये

$$\frac{अ \cdot क \cdot स}{\sqrt{१ - क^२ \cdot य^२}} = अक \left\{ त + त_१ \cdot य + त_२ \cdot \frac{य^२}{१ \cdot २} + त_३ \frac{य^३}{२ \cdot ३} + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. त \cdot \frac{क^२ \cdot य^२}{२} + त_१ \cdot क^२ \cdot \frac{य^३}{१ \cdot २} + \cdots \right\}$$

इन पर से,

$$त_१ + २ त_२ \frac{य}{२} + ३ त_३ \cdot \frac{य^२}{२ \cdot ३} + ४ त_४ \cdot \frac{य^३}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \cdots\cdots$$
$$= अ \cdot क \left\{ त + त_१ \cdot य + \frac{य^२}{२}(त_२ + क^२ \cdot त) + \frac{य^३}{२ \cdot ३}(त_३ + ३ त_१ \cdot क^२) + \cdots \right\}$$

य के समानघातों का गुणक समान करने से,

$अकत = त_१,\;\; अकत_१ = त_२,\;\; त_३ = अक(त_२ + क^२ \cdot त)$

ऐसा हुआ। परन्तु प्रथम समीकरण में यदि $य = 0$

तो $त = १$ इस लिये $त_१ = अक$। $अ^२ क^२ = त_२$।

$त_३ = अक(अ^२ क^२ + क^२)$।

$$त_४ = (त_३ + ३ त_१ क^२) अक = अक(अ^३ \cdot क^३ + ४ अ \cdot क^३)$$
$$= अ^२ \cdot क^४ (अ^२ + २^२), \text{ इत्यादि}$$

इन का उत्थापन म्याक्लरिन के सिद्धान्त में देने से,

$$स = १ + अ \cdot क \cdot य + \frac{अ^२ \cdot क^२}{१} \cdot \frac{य^२}{२} + अ \cdot क^३ (अ^२ + १) \cdot \frac{य^३}{२ \cdot ३}$$
$$+ अ^२ \cdot क^४ (अ^२ + २^२) \cdot \frac{य^४}{\underline{|४}} + अ \cdot क^५ (अ^२ + १)(अ^२ + ३^२) \cdot \frac{य^५}{\underline{|५}} + \cdots$$
$$= १ + अ \cdot \frac{क \cdot य}{१} + अ^२ \cdot \frac{क^२ \cdot य^२}{१ \cdot २} + अ(अ^२ + १) \cdot \frac{क^३ \cdot य^३}{२ \cdot ३}$$
$$+ अ^२ (अ^२ + २^२) \cdot \frac{क^४ \cdot य^४}{\underline{|४}} + अ(अ^२ + १)(अ^२ + ३^२) \cdot \frac{क^५ \cdot य^५}{\underline{|५}} + \cdots$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि प्रत्येक पदों में, क · य के घातों का गुणकाङ्क $गु_१$, $गु_२$, $गु_३$ इत्यादि माना जहां क · य के शून्य घात का गुणक $गु_१ = १$ है।

तो, $गु_{न+२} = \frac{अ^२ + (न-१)^२}{१} \cdot गु_न$ ऐसा सिद्ध होता है।

इन गुणकों को और प्रकार से भी जान सकते हो।

(१६) $स = ज्या(म \cdot ज्या^{-१}य)$, इस का मान य के घातवृद्धि में लाना है।

माना $र = ज्या^{-१}य$, तो $\frac{तास}{तार} = म \cdot कोज्यामर$

परन्तु $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{\sqrt{१-य^२}}$ $\therefore$ $\frac{तास}{ताय} = \frac{म \cdot कोज्या(म \cdot ज्या^{-१}य)}{\sqrt{१-य^२}}$।

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} = \frac{-म^२ \cdot ज्या(म \cdot ज्या^{-१}य) + य \cdot म \cdot कोज्या(म \cdot ज्या^{-१}य)(१-य^२)^{-\frac{१}{२}}}{१-य^२}$$

$$\therefore (१-य^२)\frac{ता^२स}{ताय^२}$$

$$= -म^२ \cdot ज्या(म \cdot ज्या^{-१}य) + य \cdot म \cdot कोज्या(म \cdot ज्या^{-१}य)(१-य^२)^{-\frac{१}{२}}$$

और $\frac{तास}{ताय} य = य \cdot म \cdot कोज्या(म \cdot ज्या^{-१}य)(१-य^२)^{-\frac{१}{२}}$

दोनों का अन्तर करने से,

$$य \cdot \frac{तास}{ताय} - (१-य^२)\frac{ता^२स}{ताय^२} = म^२ \cdot ज्या(म \cdot ज्या^{-१}य) = म^२ \cdot स।$$

परन्तु म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से,

$$स = त + त_१ \cdot य + त_२ \cdot \frac{य^२}{२} + त_३ \cdot \frac{य^३}{२ \cdot ३} + त_४ \cdot \frac{य^४}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \cdots\cdots$$

$$\frac{तास}{ताय} = त_१ + २त_२ \cdot \frac{य}{२} + ३त_३ \cdot \frac{य^२}{२ \cdot ३} + ४त_४ \cdot \frac{य^३}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \cdots\cdots$$

$$\frac{ता^2 स}{ताय^2} = त_2 + त_3\, य + त_4 \cdot \frac{य^2}{२} + त_5 \cdot \frac{य^3}{२\cdot ३} + \cdots\cdots$$

इन पर से,

$$य \cdot \frac{तास}{ताय} = त_1\, य + २\, त_2 \cdot \frac{य^2}{२} + ३\, त_3 \cdot \frac{य^3}{२\cdot ३} + \cdots\cdots\cdots$$

$$(१ - य^2)\frac{ता^2 स}{ताय^2} = त_2 + त_3 य + त_4 \cdot \frac{य^2}{२} + त_5 \cdot \frac{य^3}{२\cdot ३} + \cdots\cdots$$

$$- त_2 य^2 - त_3 य^3 - त_4 \frac{य^4}{२} - \cdots$$

$$= त_2 + त_3 य + \frac{य^2}{२}(त_4 - २\, त_2) + \frac{य^3}{२\cdot ३}(त_5 - ६\, त_3) + \cdots$$ और

$$य \cdot \frac{तास}{ताय} - (१ - य^2)\frac{ता^2 स}{ताय^2} = - त_2 + य(त_1 - त_3) + \frac{य^2}{२}(४त_2 - त_4) + \cdots$$

इस लिये, $म^2 \cdot त + म^2 \cdot त_1 य + म^2 \cdot त_2 \frac{य^2}{२} + म^2 \cdot त_3 \cdot \frac{य^3}{२\cdot ३} + \cdots\cdots$

$$= म^2 \cdot स = - त_2 + (त_1 - त_3)य + (४त_2 - त_4)\frac{य^2}{२} + (९\, त_3 - त_5)\frac{य^3}{२\cdot ३} \cdots$$

य के समानघातों का गुणकसमान करने से,

$- म^2 \cdot त = त_2$, $म^2 \cdot त_1 = त_1 - त_3$ $\therefore$ $त_3 = (१ - म^2)\, त_1$ ।

और $म^2 \cdot त_2 = ४\, त_2 - त_4$ $\therefore$ $त_4 = (४ - म^2)\, त_2$ ।

$म^2 \cdot त_3 = ९\, त_3 - त_5$ $\therefore$ $त_5 = (९ - म^2)\, त_3$ ।

सामान्यतः $त_{न+२} = (न^2 - म^2)\, त_न$

परन्तु पूर्व समीकरण में यदि $य = 0$ तो $स = 0 = त$

इस लिये, $त_2 = 0$ और $\frac{तास}{ताय}$ इस का मान $= म$, यदि $य = 0$

अर्थात् $त_1 = म$,

ऊपर $त_1, त_2$ इत्यादि मानों को देखने से स्पष्ट है कि जब $त_2 = 0$ तो $त_2, त_4, त_6$ इत्यादि सब शून्य के तुल्य हों गे, और $त_1 = म$ इस लिये, केवल $त_3, त_5$ इत्यादि के मान $त_{न+२} = (न^2 - म^2)\, त_न$ इस पर से लाकर म्याक्लरिन् के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$स = ज्या\,(म \cdot ज्या^{-1} य)$$

$$= म \cdot य + म\,(१^२ - म^२)\,\frac{य^३}{\underline{|३}} + \frac{म\,(१^२ - म^२)\,(३^२ - म^२)}{\underline{|५}}\, य^५ + \cdots\cdots \quad (१)$$

इसी प्रकार यदि $स = कोज्या\,(म \cdot ज्या^{-1} य)$ तो $स = कोज्या\,(म \cdot ज्या^{-1} य)$

$$= १ - \frac{म^२}{\underline{|२}} \cdot य^२ - \frac{म^२\,(२^२ - म^२)}{\underline{|४}}\, य^४ - \frac{म^२(२^२ - म^२)(४^२ - म^२)}{\underline{|६}}\, य^६ - \cdots\cdots \quad (२)$$

(१) समीकरण के वर्ग को एक में घटाकर बीजगणित की रीति से मूल लेने से भी (२) समीकरण उत्पन्न हो सकता है।

(१७) $\dfrac{य}{इ^य - १} = स$, इसे य के घातवृद्धि में ले आना चाहिये।

यहां छठवें उदाहरण के (२) समीकरण से,

$$इ^य = १ + य + \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{\underline{|३}} + \frac{य^४}{\underline{|४}} + \cdots$$ इस लिये,

$$\frac{य}{इ^य - १} = \frac{१}{१ + \frac{य}{२} + \frac{य^२}{\underline{|३}} + \frac{य^३}{\underline{|४}} + \frac{य^४}{\underline{|५}} + \cdots}$$

केवल भागहार से अब सिद्ध हो जायगा कि,

$$\frac{य}{इ^य - १} = १ - \frac{य}{२} + \frac{य^२}{१२} - \frac{य^४}{७२०} + \cdots\cdots$$

$$= १ - \frac{य}{२} + \frac{१}{६} \cdot \frac{य^२}{२} - \frac{१}{३०} \cdot \frac{य^४}{\underline{|४}} + \cdots\cdots$$

$$= १ - \frac{य}{२} + ब_१ \cdot \frac{य^२}{\underline{|२}} - ब_३ \cdot \frac{य^४}{\underline{|४}} + ब_५ \frac{य^६}{\underline{|६}} - ब_७ \cdot \frac{य^८}{\underline{|८}} + \cdots$$

यहां $ब_१ = \frac{१}{६}$, $ब_३ = \frac{१}{३०}$, $ब_५ = \frac{१}{४२}$, $ब_७ = \frac{१}{३०}$

और $ब_९ = \frac{५}{६६}$ इत्यादि सिद्ध होते हैं।

इस $ब_1, ब_3$ इत्यादि के मान को बर्नेली (Bernoulli) की संख्या कहते हैं क्यों कि सब से पहले इन संख्याओं को जेम्स बर्नेली (James Bernoulli) साहब ने प्रकाश किया था इस लिये उन के आदरार्थ उन के नाम के साथ ये संख्यायें बोली जाती हैं। यद्यपि इन संख्याओं का परस्पर सम्बन्ध अभीं नहीं देख पड़ता है तथापि इन से बहुत उदाहरणों की लाघव से सिद्धि हो जाती है।

$\frac{य}{इ^{य}-१}$ = फ (य) यदि कल्पना करो तो स्पष्ट है कि फ (य) − फ (−य) इस में केवल य के जितने विषमघात हों गे उन के दूने तुल्य शेष बचेंगे क्यों कि समघात तो दोनों समीकरणों में धन ही होगा इस लिये घटाने में सब उड़ जायं गे, परन्तु जब $फ(य) = \frac{य}{इ^{य}-१}$

$$इस लिये फ(-य) = -\frac{य}{इ^{-य}-१} = -\frac{य \cdot इ^{य}}{१-इ^{य}} = \frac{य \cdot इ^{य}}{इ^{य}-१}$$

$$और, फ(य) - फ(-य) = -य\left(\frac{इ^{य}-१}{इ^{य}-१}\right) = -य$$

इस से भी सिद्ध होता है कि $\frac{य}{इ^{य}-१}$ इस के मान में य का एक घात छोड़ और कोई विषमघात नहीं है।

जब, $\frac{य}{इ^{य}-१} = फ(य)$, तो $इ^{य} \cdot फ(य) = य + फ(य)$ ...... (१)।

(१) इस समीकरण में दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा निकाल म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से भी $ब_1, ब_3$ इत्यादि के मान प्रगट हो सकते हैं। इस प्रकार म्याक्लरिन् के सिद्धान्त के बल से अनेक प्रकार के चमत्कृत नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं।

इन सत्रहों उदाहरणों पर विद्यार्थियों को चाहिये कि विशेष ध्यान दें क्यों कि इन के बल से अनेक उदाहरण बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं।

२१। यदि फ(य+च) यह य+च का फल हो तो य को चल, और च को स्थिरमान इस का जो तात्कालिकसम्बन्ध होगा वही तात्कालिकसम्बन्ध च को चल, और य को स्थिर मानने से भी सिद्ध होता है क्यों कि,

यदि य+च=ल तो प्रथमस्थिति में अर्थात् य को चल और च को स्थिरमान,

$$\frac{\text{ताफ}(\text{य}+\text{च})}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफ}(\text{ल})}{\text{ताल}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफ}(\text{ल})}{\text{ताल}} = \text{फ}'(\text{ल})$$

क्यों कि, य+च=ल $\therefore$ $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = १$।

और दूसरी स्थिति में अर्थात् य को स्थिरमान और च को चल

$$\frac{\text{ताफ}(\text{य}+\text{च})}{\text{ताच}} = \frac{\text{ताफ}(\text{ल})}{\text{ताल}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताच}} = \frac{\text{ताफ}(\text{ल})}{\text{ताल}} = \text{फ}'(\text{ल})$$

क्यों कि, यहां भी $\frac{\text{ताल}}{\text{ताच}} = १$।

२२। फ(य+च) का मान च के घातवृद्धि में जानना है। कल्पना करो कि,

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{अ} + \text{अ}_१\text{च} + \text{अ}_२\text{च}^२ + \text{अ}_३ \cdot \text{च}^३ + \cdots\cdots \quad (१)$$

जहां अ, $\text{अ}_१$ इत्यादि च के अपेक्षा स्वतन्त्र हैं।

$$\text{तब,}\ \frac{\text{ताफ}(\text{य}+\text{च})}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताअ}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताअ}_१}{\text{ताय}}\text{च} + \frac{\text{ताअ}_२}{\text{ताय}} \cdot \text{च}^२ + \cdots\cdots \quad (२)$$

$$\text{और}\ \frac{\text{ताफ}(\text{य}+\text{च})}{\text{ताच}} = \text{अ}_१ + २\text{अ}_२\text{च} + ३\text{अ}_३\text{च}^२ + \cdots\cdots \quad (३)$$

परन्तु २१ प्रक्रम से दूसरा और तीसरा सरूप समीकरण अवश्य परस्पर तुल्य होंगे इस लिये च के समानघातों के गुणकों को परस्पर तुल्य करने से,

$$\text{अ}_१ = \frac{\text{ताअ}}{\text{ताय}},\quad \text{अ}_२ = \frac{\text{ताअ}_१}{२\text{ताय}} = \frac{१}{१\cdot२} \cdot \frac{\text{ता}^२\text{अ}}{\text{ताय}^२}\ ।$$

$$\text{अ}_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{ताअ}_2}{\text{ताय}} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} \frac{\text{ता}^3\text{अ}}{\text{ताय}^3}, \cdots\cdots$$

और च का मान शून्य मानने से (१) समीकरण में फ(य) = अ

इन पर से (१) समीकरण का रूप

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{च}\cdot\text{फ}'(\text{य}) + \frac{\text{च}^2}{1\cdot2}\text{फ}''(\text{य}) + \frac{\text{च}^3}{1\cdot2\cdot3}\text{फ}'''(\text{य})$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}} \cdot \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{फ}(\text{य})}{\text{ताय}^{\text{न}}} \cdots\cdots (4)$$

२३ । (४) समीकरण में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उसे टेलर (Taylor) साहब वा डाक्टर ब्रूक टेलर (Dr. Brook Taylor) साहब ने सन् १७१५ में प्रकाश किया था इसी लिये उन के आदरार्थ इसे * टेलर का सिद्धान्त कहते हैं ।

---

* टेलर के सिद्धान्त की उपपत्ति मिस्टर होमरशम काक्स् साहब (Mr. Homersham cox) की की हुयी । कल्पना करो कि फ(य) का मान शून्य के समान होता है यदि य = अ और य = क तो फ(य) अवश्य य के अ और क मान के बीच में घटता बढ़ता रहेगा अर्थात् कुछ मान तक बढ़ेगा फिर आगे घटेगा इस दशा में फ'(य) अवश्य य के अ और क के बीच किसी मान में शून्य होगा क्योंकि यदि ऐसा न मानो तो कल्पना करो कि फ'(य) यह घटता वा बढ़ता ही चला जाता है य के अ और क मान तक इस लिये फिर फ(य) भी य के अ मान से ले क मान तक घटता ही वा बढ़ता ही चला जायगा इस लिये फ (य) का मान य के क मान में कभीं शून्य के समान न होगा और कल्पना तो ऐसा किया है कि फ(य) य के क मान में भी शून्य के समान है इस लिये यह असम्भव है तब यही सिद्ध होता है कि फ'(य) अवश्य य के अ और क मान के बीच किसी मान में शून्य होगा इसी प्रकार आगे भी सिद्ध कर सक्ते हो कि फ''(य) भी य के अ और क_1 मान के बीच किसी मान में शून्य होगा यहां जिस मान में फ'(य) शून्य होता है उस मान का मान क_1 है । इसी प्रकार फ'''(य) इत्यादि भी शून्य के समान अ और क मान के बीच में किसी मान में हों गे यह भी सिद्ध हो जायगा ।

अब देखो कि,

$$\text{फ}(\text{अ}+\text{य}) - \text{फ}(\text{अ}) - \text{यफ}'(\text{अ}) - \frac{\text{य}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{अ}) - \cdots - \frac{\text{य}^{(\text{न})}}{\underline{|\text{न}}}\text{फ}^{\text{न})}(\text{अ}) - \frac{\text{ऋ}\cdot\text{य}^{\text{न}+1}}{\underline{|\text{न}+1}} \cdots (1)$$

यह शून्य के तुल्य होता है, यदि य = च और ऋ =

$$\frac{\underline{|\text{न}+1}}{\text{च}^{\text{न}+1}}\left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{च}) - \text{फ}(\text{अ}) - \text{चफ}'(\text{अ}) - \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{अ}) - \cdots - \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{अ}) \cdots (2)\right.$$

"चलनकलन" के विस्तार का मूल यही टेलर का सिद्धान्त है इस के बल से म्याक्लरिन् का भी सिद्धान्त उत्पन्न हो सकता है केवल २२ वें प्रक्रम के (४) समीकरण में य = ० कल्पना कर, च के स्थान में य का उत्थापन दे न का मान अनन्त मानना पड़ेगा।

म्याक्लरिन् साहब ने म्याक्लरिन् के सिद्धान्त को सन् १७४२ में प्रकाश किया था परन्तु इसे स्टर्लिङ्ग (Stirling) साहब ने भी उसी सन् के लगभग में प्रकाश किया इस लिये कभीं कभीं म्याक्लरिन् के सिद्धान्त को स्टर्लिङ्ग का भी सिद्धान्त कहते हैं।

२४। इस प्रक्रम में टेलर के सिद्धान्त का अच्छी भांति बोध होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) यदि फ(य+च) = ज्या(य+च) तो टेलर के सिद्धान्त के पदों के जानने के लिये,

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{ज्याय}, \quad \text{फ}'(\text{य}) = \text{कोज्याय}$$

$$\text{फ}''(\text{य}) = -\text{ज्याय}, \quad \text{फ}'''(\text{य}) = -\text{कोज्याय}।$$

इन सब का उत्थापन टेलर के सिद्धान्त में देने से,

मानो कि, ऋ का वही मान है जिसे हम स्पष्ट देखते हैं कि य के अपेक्षा स्वतन्त्र है।

(१) समीकरण, तब भी शून्य होता है यदि य = ० इस लिये य के ० और च मान के बीच में (१) समीकरण अवश्य घटता बढ़ता है इस लिये (१) समीकरण का प्रथम सम्बन्ध–

$$\text{यह, फ}'(\text{अ}+\text{य}) - \text{फ}'(\text{अ}) - \text{य फ}''(\text{अ}) - \cdots - \frac{\text{य}^{\text{न}-१}}{|\underline{\text{न}-१}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{अ}) - \frac{\text{य}^{\text{न}}\cdot\text{ऋ}}{|\underline{\text{न}}} \text{ भी}$$

शून्य होगा यदि य = $\text{य}_१$, $\angle$ च और यदि य = ०। इसी प्रकार वारवार सम्बन्ध निकालने से,

$\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{अ}+\text{य}) - \text{ऋ}$ यह भी य के किसी मान में जो कि च से अल्प है शून्य होगा। मानो कि ऐसा य का मान = पच है, यहां प कोई भिन्न रूपाल्पसंख्या है, तब पक्षान्तर से, ऋ = $\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{अ}+\text{पच})$

(२) समीकरण से और अ के स्थान में य का उत्थापन देने से,

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{च}\cdot\text{फ}'(\text{य}) + \frac{\text{च}^२}{|\underline{२}}\text{फ}''(\text{य}) + \cdots + \frac{\text{च}^{\text{न}}}{|\underline{\text{न}}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{य}) + \frac{\text{च}^{\text{न}+१}}{|\underline{\text{न}+१}}\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{य}+\text{पच})$$

अब इस पर से न का मान अनन्त मानने से टेलर का सिद्धान्त उपपन्न हो जायगा यदि कोई सम्बन्ध शून्य के तुल्य न हो तो।

$$\text{ज्या}(\text{य}+\text{च}) = \text{ज्याय} + \text{कोज्याय}\cdot\text{च} - \text{ज्याय}\frac{\text{च}^2}{1\cdot2} - \text{कोज्याय}\frac{\text{च}^3}{1\cdot2\cdot3}$$

$$+\text{ज्याय}\cdot\frac{\text{च}^4}{\lfloor 4} + \text{कोज्याय}\frac{\text{च}^5}{\lfloor 5} - \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

इसी प्रकार कोज्या (य+च) का मान भी टेलर के सिद्धान्त से यदि ले आवो तो,

$$\text{कोज्या}(\text{य}+\text{च}) = \text{कोज्याय} - \text{ज्याय}\cdot\frac{\text{च}}{1} - \text{कोज्याय}\cdot\frac{\text{च}^2}{1\cdot2}$$

$$+\text{ज्याय}\cdot\frac{\text{च}^3}{1\cdot2\cdot3} + \text{कोज्याय}\cdot\frac{\text{च}^4}{\lfloor 4} - \cdots \quad (2)$$ ऐसा होगा ।

यहां दोनों अर्थात् प्रथम और दूसरे समीकरण में यदि य = ० तो,

$$\text{ज्याच} = \text{च} - \frac{\text{च}^3}{2\cdot3} + \frac{\text{च}^5}{\lfloor 5} - \frac{\text{च}^7}{\lfloor 7} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\text{कोज्याच} = 1 - \frac{\text{च}^2}{1\cdot2} + \frac{\text{च}^4}{\lfloor 4} - \frac{\text{च}^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

ठीक म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से भी ऐसा ही उत्पन्न होता है (म्याक्लरिन् के सिद्धान्तसम्बन्धि दूसरा उदाहरण देखो)।

(२) फ (य + च) = ला (य + च) इस में फ (य + च) का मान च के घातवृद्धि में ले आना है।

यहां फ (य) = लाय

$$\text{फ}'(\text{य}) = \frac{1}{\text{य}} = \text{य}^{-1},\ \text{फ}''(\text{य}) = -\text{य}^{-2}\ ।$$

$$\text{फ}'''(\text{य}) = 2\text{य}^{-3},\quad \text{फ}''''(\text{य}) = -2\cdot3\cdot\text{य}^{-4}\ ।$$

इन का टेलर के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$\text{ला}(\text{य}+\text{च}) = \text{लाय} + \frac{\text{च}}{\text{य}} - \frac{1}{\text{य}^2}\cdot\frac{\text{च}^2}{2} + \frac{1}{\text{य}^3}\cdot\frac{\text{च}^3}{3}$$

$$-\frac{1}{\text{य}^4}\cdot\frac{\text{च}^4}{4} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

(१) इसी समीकरण में यदि य = १ तो,
लाय = 0 इस लिये प्रथम समीकरण का रूप,

$$\text{ला}\ (१+\text{च}) = \text{च} - \frac{\text{च}^२}{२} + \frac{\text{च}^३}{३} - \frac{\text{च}^४}{४} + \cdots\cdots$$

इसी प्रकार टेलर के सिद्धान्त से द्वियुक्पद सिद्धान्त भी बड़े लाघव से उपपन्न हो सकता है।

(३) $\text{फ}(\text{य})\cdot\text{फ}(\text{च}) = \text{फ}(\text{य}+\text{च}) + \text{फ}(\text{य}-\text{च})$

इस में फ(य) का रूप जानना है।

यहां टेलर के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि,

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) + \text{फ}(\text{य}-\text{च}) = २\left\{\text{फ}(\text{य}) + \text{फ}''(\text{य})\frac{\text{च}^२}{१\cdot२} + \text{फ}''''(\text{य})\frac{\text{च}^४}{\underline{|४}} + \cdots\right\}$$

$$= \text{फ}(\text{य})\cdot\text{फ}(\text{च}),$$

दोनों पक्षों में, फ(य) का भाग देने से,

$$\text{फ}(\text{च}) = २\left\{१ + \frac{१}{\text{फ}(\text{य})}\cdot\text{फ}''(\text{य})\frac{\text{च}^२}{१\cdot२} + \frac{१}{\text{फ}(\text{य})}\cdot\text{फ}''''(\text{य})\frac{\text{च}^४}{\underline{|४}} + \cdots\right\}\cdots(१)$$

अब यहां यदि $\dfrac{\text{फ}''(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})} = -\text{र}^२$ तो $\text{फ}''(\text{य}) = -\text{र}^२\cdot\text{फ}(\text{य})$

इस पर से $\text{फ}''''(\text{य}) = -\text{र}^२\cdot\text{फ}''(\text{य}) = \text{र}^४\cdot\text{फ}(\text{य})$ इत्यादि इन का उत्थापन (१) इस में देने से,

$$\text{फ}(\text{च}) = २\left\{१ - \frac{\text{र}^२\cdot\text{च}^२}{२} + \frac{\text{र}^४\cdot\text{च}^४}{\underline{|४}} - \frac{\text{र}^६\cdot\text{च}^६}{\underline{|६}} + \cdots\right\} = २\,\text{कोज्या}\,(\text{र}\cdot\text{च})$$

और इसी समीकरण में च के स्थान में य का उत्थापन देने से,

फ(य) = २ कोज्या (र · य) और त्रिकोणमिति से भी स्पष्ट है कि
२ कोज्या (र · च) · २ कोज्या (र · य)
= फ(य + च) + फ(य − च) = २ कोज्या (रय + रच) + २ कोज्या (रय − रच)

इस लिये फ(य) का रूप २ कोज्या (र · य) यही सिद्ध हुआ।

इस प्रकार से सैकड़ों उदाहरण इस टेलर के और म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से उत्पन्न हो सकते हैं, बहुत लिखना व्यर्थ है। विद्यार्थियों को

चाहिये कि ऊपर लिखे हुए उदाहरणों का अच्छी भांति अभ्यास कर उन के बल से और और भी उदाहरण अपने मन से सेाचैं।

हमारे यहां संस्कृत ज्योतिर्षसिद्वान्त ग्रन्थों में जेा कहीं कहीं असकृद्विधि लिखे हैं वे सब प्रायः टेलर और म्याक्लरिन् के सिद्वान्त से उत्पन्न हेा सकते हैं।

२५। टेलर के सिद्वान्त के बल से बहुधा आसन्नमान से समीकरणों में अव्यक्तराशि का मान भी निकल सकता है, क्यों कि जब स्पष्ट है कि किसी समीकरण का रूप $फ(य)=0$ ऐसा है तब माने कि अटकल से एक य का मान $=क$ और वास्तव में $य=(क+च)$ इस लिये $फ(य)=फ(क+च)=0$ अब इस का मान टेलर के सिद्धान्त से,

$$फ(क+च)=0=फ(क)+फ'(क)\frac{च}{१}+फ''(क)\frac{च^२}{१\cdot२}+\cdots(१)$$

(१) इस में यदि च का मान अति अल्प माने तेा च का दूसरा घात छेाड़ देने से,

$$0=फ(क)+फ'(क)\cdot च$$

$$\therefore\ च=-\frac{फ(क)}{फ'(क)}\ \text{इस पर से}\ य=क-\frac{फ(क)}{फ'(क)}\ \cdots\cdots\ (२)$$

पुनः (२) इस में जेा य का मान आया है उस का क के स्थान में उत्थापन देने से बहुत ठीक य का मान व्यवहारार्थ आजायगा और यदि पुनः पुनः क के मान में उत्थापन देकर य का मान लावेा अर्थात् असकृद्विधि करेा तेा बहुत ही सूक्ष्म य का मान निकल सकता है।

जैसे,

(१) $य^४-३य^२+२य-७\frac{१}{२}=0$ इस में य का मान जानना है।

यहां पहले अटकल से $य=२$ कल्पना किया तेा, २५ वें प्रक्रम से $क=२$ और २५ वें प्रक्रम के (२) समीकरण से,

$$\left.\begin{aligned}फ(य)&=य^४-३य^२+२य-७\frac{१}{२}\\ \frac{ताफ(य)}{ताय}&=फ'(य)=४य^३-६य+२\end{aligned}\right\}$$ इन में य के स्थान में क का उत्थापन देने से क्रम से दोनों पक्षों के मान,

$$\text{फ}(\text{क}) = १६ - ३ \times ४ + २ \times २ - ७\frac{१}{२} = \frac{१}{२}$$

$$\text{फ}'(\text{क}) = ४ \times ८ - ६ \times २ + २ \qquad = २२$$

$$\therefore\ \text{च} = -\frac{\text{फ}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})} = -\frac{१}{४४}$$

और $\text{य} = \text{क} - \frac{\text{फ}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})} = २ - \frac{१}{४४} = १\frac{४३}{४४}$ यही आसन्नमान से उत्तर हुआ।

(२) $\text{य}^{५} - २\text{य}^{२} - २५ = 0$ इस में य का मान क्या है?।

यहां अटकल से पहले य = २ कल्पना कर

$\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{५} - २\text{य}^{२} - २५ = -१$ यदि फ(य) = फ(२)

$\text{फ}'(\text{य}) = ५\text{य}^{४} - ४\text{य} \qquad = ७२$ यदि फ'(य) = फ'(२)

$\therefore\ \text{च} = -\frac{\text{फ}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})} = \frac{१}{७२}$ और $\text{य} = २ + \frac{१}{७२}$ यही उत्तर हुआ।

यदि इस य के मान पर से दूसरा य का मान ले आवो तो बहुत ही सूक्ष्म होगा।

(३) दो पुरुष साथ ही परदेश को चले, पहला प्रतिदिन दश दश कोश चलता था और दूसरा पहले दिन एक कोश चल के अपने एक मित्र के घर पर ठहरा और (उस के अनेक मित्र थे जिन का घर एक ही मार्ग में क्रम से २, $२^{२}$, $२^{३}$ इत्यादि द्विगुणोत्तर अन्तर पर थे) दूसरे दिन दूसरे मित्र के घर आ ठहर गया यों प्रत्येक मित्रों के घर पर ठहरता हुआ चला तो बतावो कि उन दोनों पुरुषों से भेंट पुनः कितने दिनों पर होगी?।

यहां प्रश्न की बोली से,

$१0\text{य} = २^{\text{य}} - १$ ऐसा समीकरण होगा। और यदि य = ५, तो, दोनों का मान ५0, ३१ इस लिये वास्तव य के मान से ५ यह अल्प है पुनः यदि य = ६ तो दोनों का मान, ६0, ६३ इस लिये वास्तव य के मान से ६ यह अधिक है अटकल से कल्पना करो कि य = ६।

अब $\text{फ}(\text{य}) = 0 = २^{\text{य}} - १0\text{य} - १ = ६४ - ६0 - १$,

यदि फ(य) = फ'(६)। और $\text{फ}'(\text{य}) = २^{\text{य}}\ \text{ला}\ २ - १0 = ६४ \times \cdot६९३0 - १0$

यदि फ'(य) = फ'(६)। (यहां ला २ अर्थात् इ आधार में दो का लघुरिक्थ = ·६९३०) यह दो का आसन्न लघुरिक्थ लेकर पूर्व पक्ष में उत्थापन देने से फ (६) = ३। फ'(६) = ३४·३३९

$$\therefore \text{ च} = -\frac{\text{फ (क)}}{\text{फ}'\text{(क)}} = \frac{-३}{३४·३३९} = -·०९ \text{ स्वल्पान्तर से,}$$

और य = क + च = ६ − ·०९ = ५·९१ यही उत्तर हुआ।

यदि पुनः ५·९१ इस मान पर से य का दूसरा मान ले आवो तो बहुत ही सूक्ष्म होगा।

२६। टेलर के सिद्धान्त में, यदि य = ह + र कल्पना करो तो फ(य) = फ(ह + र), और फ(ह + र) इस का मान,

$$\text{फ (य)} = \text{फ (ह)} + \text{फ}'\text{(ह)}\frac{\text{र}}{१} + \text{फ}''\text{(ह)}\frac{\text{र}^२}{१·२} + \text{फ}'''\text{(ह)}\frac{\text{र}^३}{२·३} + \cdots \quad (१)$$

ऐसा होगा।

यहां स्पष्ट है कि य के स्थान में यदि ह का उत्थापन दें तो फ(ह) का मान विदित हो जायगा पुनः फ(ह) के मान से फ'(ह), फ''(ह) इत्यादि मान भी प्रगट हो जायं गे।

(१) समीकरण में $\text{फ}'\text{(ह)}\frac{\text{र}}{१}$, $\text{फ}''\text{(ह)}\frac{\text{र}^२}{१·२}$ इत्यादि में यदि किसी एक पद को उड़ाना हो तो फ(ह) पर से उस का मान निकाल उसे शून्य के तुल्य करने से अवश्य एक ऐसा ह का मान आवैगा जिस पर से कि उस पद का मान उड़ जायगा।

जैसे, कल्पना करो कि $९\text{य}^३ + ४५\text{य}^२ + ७५\text{य} - १० = ०$ यह एक समीकरण है तो (१) से स्पष्ट है कि,

$\text{फ (ह)} = ९\text{ह}^३ + ४५\text{ह}^२ + ७५\text{ह} - १०$।

इस लिये,

$\text{फ}'\text{ (ह)} = २७\text{ह}^२ + ९०\text{ह} + ७५$।

$\text{फ}''\text{ (ह)} = ५४\text{ह} + ९०$।

$\text{फ}'''\text{ (ह)} = ५४$।

$\text{फ}''''\text{ (ह)} = ०$।

और $फ(य) = फ(ह) + फ'(ह)\frac{र}{१} + फ''(ह)\frac{र^२}{१\cdot२} + फ'''(ह)\frac{र^३}{२\cdot३} + \cdots$

इस में माने कि दूसरा घात र का अर्थात् फ''(ह) इसे उड़ाना है तो $फ'(ह) = ० = ५४ ह + ९०$ ऐसा होगा,

इस लिये $ह = -\frac{५}{३}$ अब इस पर से फ(ह), फ'(ह) इत्यादि में चाहो जिस का मान ला सकते हो।

टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार।

२७। कभीं कभीं टेलर के सिद्धान्त का (य के विशेष फलों में) व्यभिचार होता है क्यों कि टेलर के सिद्धान्त से फ(य+च) इस का मान सर्वदा च के अभिन्न और धनघात में आता है और सम्भव है कि ऐसा फ(य) हो जिस पर से फ(य+च) इस के मान में च का घात भिन्न वा ऋण हो।

जैसे यदि $फ(य) = (य - क)^{\frac{म}{न}}$ तो फ(य+च)

$= (य - क + च)^{\frac{म}{न}}$ यहां स्पष्ट है कि यदि य = क

तो $फ(य + च) = च^{\frac{म}{न}}$।

परन्तु जब, $फ(य) = (य - क)^{\frac{म}{न}}$

तो $फ'(य) = \frac{म}{न}(य - क)^{\frac{म}{न} - १}$

$फ''(य) = \frac{म}{न}\left(\frac{म}{न} - १\right)(य - क)^{\frac{म}{न} - २}$

अब टेलर के सिद्धान्त से,

$फ(य + च) = (य - क)^{\frac{म}{न}} + \frac{म}{न}(य - क)^{\frac{म}{न} - १}\cdot च + \cdots\cdots$

$\cdots\cdots + \frac{म}{न}\left(\frac{म}{न} - १\right)\cdots\cdots(य - क)^{\frac{म}{न} - प}$

यहां जब $\frac{म}{न} < प > प - १$ होगा तब सब पदों का मान अनन्त

के समान होगा य = क ऐसा मानने से इस लिये ऐसी दशा में टेलर के सिद्वान्त का व्यभिचार हुआ ।

इसी प्रकार यदि $फ(य) = \frac{म}{(य - क)^{न}}$

तो $फ(य + च) = \frac{म}{(य - क + च)^{न}}$ यहां यदि य = क

तो $फ(य + च) = \frac{म}{च^{न}} = म \cdot च^{-न}$ परन्तु यदि टेलर के सिद्वान्त से यहां फ(य + च) का मान लावो और उस में य = क के मानों तो प्रत्येक पद अनन्त के तुल्य हों गे ।

इस लिये जब फ(य) का मान शुद्धकरणी में हो वा अनन्त के तुल्य हो किसी निश्चित य के मान में तो टेलर के सिद्वान्त का व्यभिचार होता है ।

२८ । इस प्रक्रम में स्मरणार्थ सब सिद्वान्तों को एकट्ठा कर लिखते हैं ।

(१) लेबनिज़ का सिद्वान्त,

$$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}} = ल \cdot \frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} + न \cdot \frac{ता^{न-१}र}{ताय^{न-१}} \cdot \frac{ताल}{ताय} + \frac{न(न-१)}{२} \cdot \frac{ता^{न-२}र}{ताय^{न-२}} \cdot \frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} + \cdots\cdots + र \cdot \frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}} ।$$

(२) म्याक्लरिन् का सिद्वान्त,

$$स = त + त_{१} \cdot य + त_{२} \cdot \frac{य^{२}}{१ \cdot २} + त_{३} \cdot \frac{य^{३}}{१ \cdot २ \cdot ३} + \cdots\cdots$$

यहां $त = फ(य)$ यदि $य = 0$

$त_{१} = फ'(य)$ यदि $य = 0$

$त_{२} = फ''(य)$ यदि $य = 0$ इत्यादि

(३) डेमाइवर का सिद्वान्त,

$$(कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-१})^{म} = कोज्यामय \pm ज्यामय\sqrt{-१} ।$$

(४) टेलर का सिद्वान्त,

$$फ(य + च) = फ(य) + फ'(य)\frac{च}{१} + फ''(य)\frac{च^{२}}{१ \cdot २} + फ'''(य)\frac{च^{३}}{\underline{|३}} + \cdots\cdots$$

(५) टेलर के सिद्धान्त से किसी समीकरण में अज्ञातराशि का आसन्नमान,

$$य = क - \frac{फ(क)}{फ'(क)}$$ । (य का अटकल से पहला मान = क)

यहां समीकरण का रूप ऐसा बनाना चाहिये जिस में फ(य) = 0 हो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $र = छे^{-1}\left(\frac{क - ख \cdot य}{ख - कय}\right)$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध क्या है? ।

उत्तर $\frac{तार}{ताय} = \frac{\sqrt{क^2 - ख^2}}{(क - ख \cdot य)\sqrt{1 - य^2}}$ ।

(२) $र = \frac{२५ य^2 + ३० य}{५१}$ इस का दूसरा सम्बन्ध निकालो? ।

उत्तर $\frac{ता^2 र}{ताय^2} = \frac{५०}{५१}$ ।

(३) $र = ज्या^{-1}\left(\frac{य}{क}\right)$ इस का तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध क्या है? ।

उत्तर $\frac{ता^3 र}{तार^3} = \frac{1 + \frac{३ य^2}{क^2 - य^2}}{(क^2 - य^2)^{\frac{3}{2}}}$ ।

(४) $र = \frac{३}{२ + य^2}$ इस का चौथा तात्कालिकसम्बन्ध क्या है? ।

उत्तर $\frac{ता^4 र}{ताय^4} = ७२ \frac{५ य^4 - २० य^2 + ४}{(२ + य^2)^5}$ ।

(५) $र = इू^{य} \cdot ज्याय$ इस का न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा? ।

उत्तर $\frac{ता^न र}{ताय^न} = २^{\frac{न}{२}} \cdot इू^{य} \cdot ज्या\left(य + \frac{न\pi}{४}\right)$ ।

(६) य = क · कोज्याप + अ · ज्याप और र = क · ज्याप − अ · कोज्याप तो सिद्ध करो कि यदि न विषम हो तो

$$\frac{ता^{न}य}{ताव^{न}} \times \frac{ता^{न}र}{ताव^{न}} = ज्या\,२\,व\left(\frac{अ^{२} - क^{२}}{२}\right) + अक \cdot कोज्या\,२\,व \text{ ।}$$

(७) $य \cdot ला_{य} = र$, इस का तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ? ।

उत्तर $\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}} = -\frac{१}{य^{२}}$ ।

(८) $ज्याय \cdot ला_{य} = र$, इस का दूसरा सम्बन्ध निकालो ? ।

उत्तर $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = \frac{२\,कोज्याय}{य} - र - \frac{ज्याय}{य^{२}}$ ।

(९) $र = य^{न} \cdot ला_{य}$ तो सिद्ध करो कि $\frac{ता^{न+१}र}{ताय^{न+१}} = \frac{\lfloor न}{य}$

(१०) $र = ज्या\,२\,य + स्प\,२\,य$ तो दूसरा सम्बन्ध क्या होगा ? ।

उत्तर $४\left(\frac{२\,स्प\,२\,य}{कोज्या^{२}\,२\,य} - ज्या\,२\,य\right) = \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}$ ।

(११) यदि $र = कोज्याय \cdot ज्या\,३\,य$ तो न संख्यक तात्कालिक-सम्बन्ध क्या होगा ? ।

उत्तर, $\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = २^{न-१}\left\{ज्या\left(२\,य + \frac{न \cdot \pi}{२}\right) + २^{न} \cdot ज्या\left(४\,य + \frac{न \cdot \pi}{२}\right)\right\}$ ।

(१२) यदि $र = ४\,ज्याय \cdot ज्या\,३\,य \cdot ज्या\,४\,य$ तो न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ? ।

$$उत्तर,\ \frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = २^{न}\left\{ज्या\left(२\,य + \frac{न \cdot \pi}{२}\right) + ३^{न}ज्या\left(६य + \frac{न \cdot \pi}{२}\right)\right.$$

$$\left. + ४^{न}(-१)^{न} \cdot ज्या\left(\pi\frac{न+४}{२} - ८\,य\right)\right\} \text{ ।}$$

(१३) $र = ज्याय \cdot कोज्याय$ तो लेब्निज़ के सिद्धान्त से

सिद्ध करो कि $२^{न-१} \cdot ज्या\left(२\,य + \frac{\pi \cdot न}{२}\right)$

$$= कोज्याय \cdot ज्या\left(य + \frac{न \cdot \pi}{२}\right) + न \cdot ज्या\left(य + \pi\frac{न-१}{२}\right) \cdot कोज्या\left(य + \frac{\pi}{२}\right)$$

$$+ न\frac{(न-१)}{२}\cdot ज्या\left(य+\pi\,\frac{न-२}{२}\right)\cdot कोज्या\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$$

$$+\frac{न(न-१)(न-२)}{२\cdot ३}\,ज्या\left(य+\pi\cdot\frac{न-३}{२}\right)\cdot कोज्या\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$$

$$+\cdots\cdots+ज्याय\cdot कोज्या\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)।$$

(१४) $र = इ^{य}\cdot ज्याय$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = इ^{य}\left\{ज्याय + न\cdot ज्या\left(य+\frac{\pi}{२}\right)+\frac{न(न-१)}{२}\,ज्या\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)+\cdots\right\}।$$

(१५) $र = य^{न}\cdot इ^{य}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} = इ^{य}\cdot\underline{|न}\left\{१+न\cdot य+\frac{न(न-१)}{\underline{|२}\;\underline{|२}}\cdot य^{२}+\frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}\;\underline{|३}}य^{३}\right.$$

$$\left.+\frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{\underline{|४}\;\underline{|४}}य^{४}+\cdots\cdots\right\}।$$

(१६) $र = ज्याय$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{२न}र}{ताय^{२न}} = र$$ । (यहां न समसंख्या है)।

(१७) $र = स्प\,(लाय)$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा।

उत्तर $\dfrac{र^{२}+१}{य} = \dfrac{तार}{ताय}$।

(१८) $र = अ\cdot क\cdot स्प^{-१}\dfrac{य+क}{अ}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} =$$

$$\frac{क\,\underline{|न-१}}{अ^{न-१}}\,कोज्या\left\{\left(न\cdot स्प^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)+(न-१)\frac{\pi}{२}\right\}\left\{कोज्या^{न}\left(स्प^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)\right\}।$$

(१९) $य = म\cdot स्प\,(र-नय)$ इस में य के घातवृद्धि में र का मान निकालो ?।

$$\text{उत्तर, } र = \left(न + \frac{१}{म}\right) य - \frac{१}{३ म^{३}} \cdot य^{३} + \frac{१}{५ म^{५}} \cdot य^{५} - \cdots\cdots ।$$

(२०) $य = म \cdot ज्या (र + नय)$ यहां र का यघातवृद्धि में क्या मान है ? ।

$$\text{उत्तर } र = \left(\frac{१}{म} - न\right) य + \frac{१}{२} \cdot \frac{य^{३}}{३ म^{३}} + \frac{१ \cdot ३}{२ \cdot ४} \cdot \frac{य^{५}}{५ म^{५}} + \cdots\cdots ।$$

(२१) $३ \cdot इ^{य} + २$ इस का लघुरिक्थ य के घातवृद्धि में लावो ? ।

$$\text{उत्तर } ला (३ इ^{य} + २) = ला_{५} + \frac{३}{५} य + \frac{३}{२५} \cdot य^{२} - \frac{१}{१२५} \cdot य^{३} \text{ इत्यादि ।}$$

(२२) $इ^{य \cdot छेय} = र$, यहां र का मान य के घातवृद्धि में लावो? ।

$$\text{उत्तर } र = १ + य + \frac{य^{२}}{२} + \frac{२}{३} \cdot य^{३} + \cdots\cdots ।$$

(२३) $ला (१ + स्पय)$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो? ।

$$\text{उत्तर } ला (१ + स्पय) = य - \frac{य^{२}}{२} + \frac{२ य^{३}}{३} - \cdots\cdots ।$$

(२४) $ला (ज्याय)$ इस का मान सिद्ध करो कि

$$-\left\{२ ज्या^{२}\left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२}\right) + २ ज्या^{४}\left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२}\right) + \frac{८}{३} ज्या^{६}\left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२}\right) + \frac{१६}{४} ज्या^{८}\left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२}\right) + \frac{३२}{५} ज्या^{१०}\left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२}\right) + \cdots\right\}$$

ऐसा होगा ? ।

(२५) $(ज्याय)^{न} = र$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो? ।

$$\text{उत्तर } र = य^{न} \left\{१ - न \frac{य^{२}}{\underline{|३}} + \frac{न (५ न - २)}{३} \cdot \frac{य^{४}}{\underline{|५}} - \cdots\cdots\right\} ।$$

(२६) $र = ला \{१ + (य^{२} + क \cdot य)\}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ? ।

$$\text{उत्तर, } ला \{१ + (य^{२} + क \cdot य)\}$$
$$= क \cdot य + (२ - क^{२}) \frac{य^{२}}{२} + क (क^{२} - ३) \frac{य^{३}}{३} + \cdots\cdots ।$$

(२७) ला $\left\{ क\left(य + [१ + य^{२}]^{\frac{१}{२}} \right) \right\}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

उत्तर, ला $\left\{ क\left(य + [१ + य^{२}]^{\frac{१}{२}} \right) \right\}$

$$= लाक + य - \frac{य^{३}}{२ \cdot ३} + \frac{१ \cdot ३}{२ \cdot ४ \cdot ५} \cdot य^{५} - \cdots ।$$

(२८) ला (१ + उज्याय) इस का मान य के घातवृद्धि में लाओ ?।

$$उत्तर\ ला\,(१ + उज्याय) = \frac{य^{२}}{\underline{|२}} - \frac{य^{४}}{\underline{|३}} + \frac{२३}{५} \cdot \frac{य^{६}}{\underline{|५}} - \cdots\cdots ।$$

(२९) ला (छेय) इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

$$उत्तर\ ला\,(छेय) = \frac{य^{२}}{२} + \frac{य^{४}}{३ \cdot ४} + \cdots\cdots ।$$

(३०) $ला_{य} = (य^{१} - य^{-१}) - \frac{१}{२}(य^{२} - य^{-२}) + \frac{१}{३}(य^{३} - य^{-३})$

$- \frac{१}{४}\; य^{४} - य^{-४}) + \cdots\cdots$ इसे सिद्ध कर

तब इसी पर से सिद्ध करो कि

$$ज्याय = \frac{१}{२}(य + ज्या\,२\,य) - \frac{१}{३}\,ज्या\,३\,य + \frac{१}{४}\,ज्या\,४\,य - \frac{१}{५}\,ज्या\,५\,य + \cdots ।$$

(३१) तीसवें प्रश्न पर से इसे सिद्ध करो कि,

$$कोज्याय = \frac{१}{२} + कोज्या\,२\,य - कोज्या\,३\,य + कोज्या\,४\,य - कोज्या\,५\,य + \cdots$$

(३२) $\dfrac{य^{न} \cdot ला\,(य^{२} + य + १)}{न + १}$ इसे यदि म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से य के घातवृद्धि में लावें तो पहले पद का क्या प्रमाण होगा ?।

उत्तर $\dfrac{य^{न+१}}{न + १}$ ।

(३३) य · ज्या$^{-१}$य · स्प$^{-१}$य इसे म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से य के घातवृद्धि में लावें तो तीसरे पद का क्या प्रमाण होगा ?।

उत्तर $\dfrac{१५८\,य^{७}}{\underline{|६}}$ ।

(३४) $\sqrt{१ - कोज्याय}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

$$उत्तर\ \sqrt{२}\left\{ \frac{य}{२} - \frac{य^{३}}{८\underline{|३}} + \frac{य^{५}}{३२\underline{|५}} - \cdots\cdots \right\} ।$$

(३५) यदि चाप (य) बहुत छोटा हो तो सिद्ध करो कि

$य = \sqrt[3]{२(स्पय - ज्याय)}$ स्वल्पान्तर से।

(३६) डेमाइवर के सिद्धान्त से यह सिद्ध करो कि

$$कोज्या^{म}य \mp \frac{म(म-१)}{२} \cdot कोज्या^{म-२}य \cdot ज्या^{२}य$$

$$\pm \frac{म(म-१)(म-२)(म-३)}{\lfloor ४} कोज्या^{म-४}य \cdot ज्या^{४}य$$

$$\mp \cdots + (-१)^{\frac{म}{२}} \cdot ज्या^{म}य = कोज्यामय$$

और $\pm म \cdot कोज्या^{म-१}य \cdot ज्याय \mp \frac{म(म-१)(म-२)}{\lfloor ३} \cdot कोज्या^{म-३}य \cdot ज्या^{३}य$

$$\pm \frac{म(म-१)(म-२)(म-३)(म-४)}{\lfloor ५} \cdot कोज्या^{म-५}य \cdot ज्या^{५}य \mp \cdots = \pm ज्यामय$$

(यहां म सम संख्या है)।

(३७) इसे सिद्ध करो कि

$$\frac{४-\pi}{८} = \frac{१}{२^{४}-१} + \frac{१}{२^{४}\cdot २^{२}-१} + \frac{१}{२^{४}\cdot ३^{२}-१} + \frac{१}{२^{४}\cdot ४^{२}-१} + \cdots ।$$

(३८) इसे सिद्ध करो कि

$$\pi \frac{इ^{\pi}+१}{इ^{\pi}-१} = २^{२}\left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{५} + \frac{१}{१०} + \frac{१}{३७} + \frac{१}{६५} + \cdots\cdots\right\} ।$$

(३९) इसे सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{८} = \frac{१}{३} + \frac{१}{३५} + \frac{१}{९९} + \frac{१}{१९५} + \frac{१}{३२३} + \cdots\cdots ।$$

(४०) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi^{२}}{१६} = \left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{५} + \frac{१}{१७} + \frac{१}{३७} + \cdots\right\}\left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{१०} + \frac{१}{२६} + \frac{१}{५०} + \frac{१}{८२} + \cdots\right\} ।$$

(४१) यदि य बहुत छोटा हो तो सिद्ध करो कि

$छेय = १ + \frac{४४ य^{२}}{\pi^{४}}$ स्वल्पान्तर से।

(४२) टेलर के सिद्धान्त से यह सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^{-1}\text{२य} = \text{ज्या}^{-1}\text{य} + \frac{\text{य}}{\sqrt{\text{१} - \text{य}^{\text{२}}}} + \frac{\text{य}^{\text{३}}}{(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{३}}{\text{२}}}} \cdot \frac{\text{१}}{\text{२}}$$

$$+ \frac{\text{१} + \text{२य}^{\text{२}}}{(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{५}}{\text{२}}}} \cdot \frac{\text{य}^{\text{३}}}{\underline{|\,\text{३}}} + \frac{\text{३य}(\text{३} + \text{२य}^{\text{२}})}{(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{७}}{\text{२}}}} \cdot \frac{\text{य}^{\text{४}}}{\underline{|\,\text{४}}} + \cdots\cdots \text{।}$$

(४३) यदि $\text{र} = \text{कोज्या}^{-1}(\text{य} + \text{च})$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{र} = \text{ज्या}^{-1}(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}} - \frac{\text{च}}{\sqrt{\text{१} - \text{य}^{\text{२}}}} - \frac{\text{य}}{(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{३}}{\text{२}}}} \frac{\text{च}^{\text{२}}}{\underline{|\,\text{२}}}$$

$$- \frac{\text{१} + \text{२य}^{\text{२}}}{(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{५}}{\text{२}}}} \cdot \frac{\text{च}^{\text{३}}}{\underline{|\,\text{३}}} - \frac{\text{३य}(\text{३} + \text{२य}^{\text{२}})}{(\text{१} - \text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{७}}{\text{२}}}} \cdot \frac{\text{च}^{\text{४}}}{\underline{|\,\text{४}}} - \cdots\cdots \text{।}$$

(४४) यह सिद्ध करो कि

$$\text{छे}(\text{य} + \text{च}) = \text{छेय} + \text{छे}^{\text{२}}\text{य} \cdot \text{ज्याय} \cdot \text{च} + \text{छे}^{\text{३}}\text{य}(\text{१} + \text{ज्या}^{\text{२}}\text{य}) \cdot \frac{\text{च}^{\text{२}}}{\underline{|\,\text{२}}} + \cdots \text{।}$$

(४५) यह सिद्ध करो कि

$$\text{छे}^{-1}(\text{य}+\text{च}) = \text{ज्या}^{-1}\frac{\sqrt{\text{य}^{\text{२}}-\text{१}}}{\text{य}} + \frac{\text{च}}{\text{य}\sqrt{\text{य}^{\text{२}}-\text{१}}} + \frac{\text{१}-\text{२य}^{\text{२}}}{\text{य}^{\text{२}}\sqrt{\text{य}^{\text{२}}-\text{१}}} \cdot \frac{\text{च}^{\text{२}}}{\underline{|\,\text{२}}} + \cdots \text{।}$$

(४६) टेलर के सिद्धान्त से पहले सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{-1}(\text{य} + \text{च}) = \text{स्प}^{-1}\text{य} + \text{च} \cdot \text{ज्या}^{\text{२}}\text{ष} - \frac{\text{च}^{\text{२}}}{\text{२}} \cdot \text{ज्या}^{\text{२}}\text{ष} \cdot \text{ज्या २ ष}$$

$$+ \frac{\text{च}^{\text{३}}}{\text{३}} \text{ज्या}^{\text{३}}\text{ष} \cdot \text{ज्या ३ ष} - \frac{\text{च}^{\text{४}}}{\text{४}} \cdot \text{ज्या}^{\text{४}}\text{ख} \cdot \text{ज्या ४ ष} + \cdots\cdots$$

(यहां $\text{ष} = \frac{\pi}{\text{२}} - \text{स्प}^{-1}\text{य}$) तब इस पर से यह सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{-1}\text{य} = \text{कोज्याष} \cdot \text{ज्याष} + \frac{\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{ष} \cdot \text{ज्या २ ष}}{\text{२}} + \frac{\text{कोज्या}^{\text{३}}\text{ष} \cdot \text{ज्या ३ ष}}{\text{३}}$$

$$+ \frac{\text{कोज्या}^{\text{४}}\text{ष} \cdot \text{ज्या ४ ष}}{\text{४}} + \cdots\cdots\cdots \text{।}$$

(४७) यदि र = फ (य) तो सिद्ध करो कि

$$फ\left(\frac{९य}{५}\right) = र + \frac{तार}{ताय} \cdot \frac{४य}{५} + \frac{ता^२र}{ताय^२} \cdot \frac{१६}{२५} \cdot \frac{य^२}{\lfloor २} + \frac{ता^३र}{ताय^३} \cdot \frac{६४}{१२५} \cdot \frac{य^३}{\lfloor ३} + \cdots ।$$

(४८) र = फ (य) और फ (अ − य) = स तो सिद्ध करो कि,

$$र = स + \frac{तास}{ताय}(२य - अ) + \frac{ता^२स}{ताय^२}(२य - अ)^२ \cdot \frac{१}{\lfloor २}$$

$$+ \frac{ता^३स}{ताय^३}(२य - अ)^३ \cdot \frac{१}{\lfloor ३} - \cdots\cdots ।$$

(४९) $\sqrt{य^३ + १४य^२ - २८८}$ इसे यदि टेलर के सिद्धान्त में फ (य) कल्पना करैं उस पर से फ (य + च) इस का मान लावैं तो य किस के तुल्य करने से टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा? ।

$$उत्तर \begin{cases} य = -१२ । \\ य = +४ । \\ य = -६ । \end{cases}$$

(५०) $य^५ - य = य^४ + १५$ इस समीकरण में आसन्नमान से य का एक मान कौन है? । उत्तर $य = २\frac{२}{४७}$ ।

(५१) $२य^३ + ३य^२ + २य = ८८$ इस में य का एक मान कौन है? । उत्तर $य = ३\frac{१}{७४}$ ।

(५२) एक जात्यत्रिभुज का क्षेत्रफल ३० $\frac{१}{२}$ और भुजकर्ण का अन्तर ८ है तो भुज, कोटि और कर्ण का पृथक् पृथक् क्या मान होगा? ।

उत्तर $भु = ५\frac{१२१}{१८४०}$ $को = १२\frac{५८८}{९३२१}$ $कर्ण = १३\frac{१२१}{१८४०}$ स्वल्पान्तर से ।

(५३) एक काशीवासी को मथुरावृन्दावन जाने की इच्छा हुई उस ने मार्ग चलने का नियम अपने मन में यह ठहराया कि पहले दिन एक कोश दूसरे दिन सोलह कोश तीसरे दिन ८१ कोश य दिन में $य^४$ कोश चलैंगे परन्तु दूसरे क्षण में विचारा कि नहीं ऐसे चलने में क्लेश होगा य दिन के अन्त्य में एकरूप से एक दिन में चलने की जो गति हो उस गति से प्रतिदिन चलैं गे पुनः तीसरे क्षण में विचारा कि

नहीं इस गति की जो गति एक दिन में एकरूप से होगी उस गति से चलैंगे इसी प्रकार उस पुरुष ने दो वार और शोचा तो बतावो अन्त्य में वह मथुरावृन्दावन गया कि नहीं? उत्तर, नहीं ।

(५४) एक साहु ने एक पुरुष को इस नियम पर रक्खा कि पहले वर्ष में ५ रुपये दूसरे वर्ष में ३६ रुपये य वर्ष में $य^५ + ४$ रुपये तुम को मिलैं गे तुम हमारे यहां काम किया करो। य वर्ष के अनन्तर उस पुरुष ने कुछ अपराध किया इस लिये उस साहु ने कहा कि अब पिछले वर्ष के अन्त्य में जो तुमारे तनख़्वाह का एकचाल से एक वर्ष में बढ़ने का प्रमाण है उतना इस वर्ष में दूंगा और दूसरे वर्ष में पिछली तनख़्वाह का एकचाल से जो एक वर्ष में गति हो उतना दूंगा यों प्रतिवर्ष में पिछली तनख़्वाह के गतितुल्य तनख़्वाह उस साहु ने देना नियत किया। अन्त्य में उस पुरुष ने विचारा कि नियमानुसार अब इस वर्ष के अन्त्य में साहु जी मुझे छोड़ावैं गे तो इस से अच्छा कि पहले ही से मैं छोड़ूं इस लिये उस ने छ महीना काम कर अपनी नोकरी को छोड़ा तो बतावो कि छोड़ती समय उस पुरुष ने कितना रुपया पाया? ।

उत्तर ६०) रुपये ।

इति चतुर्थोध्याय ।

पञ्चमाध्याय ५ ।

लुप्तभिन्न के मान जानने के विषय में ।

२९ । अज्ञातराशियों से जो भिन्न उत्पन्न होता है उस के अंश और हर में कभीं कभीं अज्ञातराशियों के स्थान में किसी नियतसंख्या का उत्थापन देने से अंश और हर दोनों का मान शून्य के तुल्य हो जाता है तब ऐसे स्थल में यह नहीं जाना जाता कि उस भिन्न का क्या मान है क्यों कि शून्य में शून्य का भाग देने से लब्धि शून्य के तुल्य वा किसी नियतसंख्या के तुल्य या अनन्त के तुल्य हो सकती है तो यहां क्यों कर यह निश्चय हो कि कौन सी लब्धि ठीक है। जैसे $\frac{य-१}{य^२-१}$ इस भिन्न के अंश और हर में यदि य के स्थान में एक का उत्थापन दें तो स्पष्ट है कि भिन्न का मान $= \frac{0}{0}$ ऐसा होगा अब यहां कैसे निश्चय हो

कि ठीक भिन्न का क्या मान है क्यों कि $\frac{0}{0} = \frac{अ \times 0}{क \times 0}$ इस लिये यथार्थ अंश और हरों का यहां अवश्य लोप हो गया है।

३० । जिस भिन्न का मान, अज्ञातराशि के स्थान में किसी नियतसंख्या का उत्थापन देने से $\frac{0}{0}$ इस के तुल्य हो, उस भिन्न को लुप्तभिन्न कहते हैं और जब $\frac{0}{0} = \frac{अ \times 0}{क \times 0}$ इस लिये $\frac{अ}{क}$ यही उस भिन्न का ठीक मान होगा, परन्तु $\frac{0}{0}$ इस के बीच में से $\frac{अ}{क}$ को कैसे निकालना यही इस अध्याय का मुख्य प्रयोजन है।

३१ । कल्पना करो कि $स = \frac{फ(य)}{फि(य)}$ यह एक भिन्न है यहां यदि $य = ग$ तो $फ(य) = 0$ और $फि(य) = 0$ ऐसा होता है तो भिन्न का अंश और छेद दोनों $य - ग$ इस से वा इस के किसी घात से अवश्य निःशेष हों गे, मानो कि $फ(य)$ में $य - ग$ का भाग देने से लब्धि $= अ_1$ और शेष $=$ शे तो $फ(य) = अ_1 (य - ग) + शे$ ऐसा समीकरण होगा इस में यदि $य = ग$ तो $फ(ग) = 0 = अ_1 (ग - ग) + शे = शे$ इस लिये यह सिद्ध हुआ कि $फ(य)$ अवश्य $य - ग$ इस से निःशेष होगा इसी प्रकार लब्धि जो $अ_1$ के तुल्य आई है उस में यदि य के स्थान में ग का उत्थापन देने से उस का मान $= 0$ हो तो लब्धि भी $य - ग$ इस से निःशेष होगी वा $फ(य)$। $य - ग$ इस के वर्ग से निःशेष होगा इसी प्रकार आगे भी समझ लेना तो सिद्ध हो जायगा कि $(य - ग)$ इस के किसी घात से $फ(य)$ यह अवश्य निःशेष होगा इसी प्रकार से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि $फि(य)$ अर्थात् हर भी $य - ग$ के किसी घात से निःशेष होगा।

इस लिये $\frac{फ(य)}{फि(य)}$ इसे $\frac{अ_1 (अ - ग)^म}{क_1 (अ - ग)^न}$ ऐसा भी लिख सकते हो, अब यहां स्पष्ट है कि यदि $म = न$ तो भिन्न का मान $= \frac{अ_1}{क_1}$

यदि $म > न$ तो भिन्न का मान $= \dfrac{अ_1 (य - ग)^{म-न}}{क_1} = \dfrac{0}{क_1} = 0$ और

यदि $म < न$ तो भिन्न का मान $= \dfrac{अ_1}{क_1 (य - ग)^{न-म}} = \dfrac{अ_1}{0} = \dfrac{1}{0} = \infty$

ऐसा होगा इस से यह सिद्ध होता है कि अज्ञातराशि के स्थान में जिस संख्या का उत्थापन देने से भिन्न का मान लुप्त हो उस संख्या को अज्ञातराशि में घटाकर शेष से भिन्न के अंश और हर दोनों में लगातार भाग देने से म और न के मान और $अ_1$ और $क_1$ के मान प्रगट हो जायंगे तब उन पर से भिन्नसंख्या का मान भी यथार्थ निकल आवैगा।

जैसे $\dfrac{2य^2 - 4य + 2}{य^4 - य^3 - य + 1}$ इस भिन्न का मान जानना है जब कि $य = 1$ तो य में एक घटाकर लगातार अंश और हर में भाग देने से,

$$\frac{2य^2 - 4य + 2}{य^4 - य^3 - य + 1} = \frac{2(य-1)^2}{(य^2 + य + 1)(य - 1)^2} \text{ इस लिये}$$

$म = न = 2$, $अ_1 = 2$, $क_1 = य^2 + य + 1$

और भिन्न का मान $= \dfrac{2}{य^2 + य + 1}$ इस में $य = 1$ तुल्य करने से लुप्तभिन्न का मान $= \frac{2}{3}$ यह सिद्ध हुआ।

३२। ३१ वें प्रक्रम में जो विधि लुप्तभिन्न का मान जान ने के लिये लिखा है उस के अपेक्षा प्रायः चलनकलन से बड़े लाघव से लुप्तभिन्न का मान निकल सकता है यदि म और न अभिन्न हों।

जैसे $स = \dfrac{फ(य)}{फि(य)}$ यहां यदि $य = ग$ तो $फ(य) = 0$

और $फि(य) = 0$। जब $स = \dfrac{फ(य)}{फि(य)}$ तो $स \cdot फि(य) = फ(य)$

दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\frac{तास}{ताय} \cdot फि(य) + स \cdot फि'(य) = फ'(य) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)\text{।}$$

यहां स्पष्ट है कि यदि य = ग तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\cdot$ फि (य) = ०

इस लिये,

$$\left.\begin{aligned} \text{स} \cdot \text{फि}'(\text{य}) &= \text{फ}'(\text{य}) \\ \text{और}\ \ \text{स} &= \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फि}'(\text{य})} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(२)$$

पहला सिद्धान्त ।

इस से यह सिद्ध होता है कि अंश के तात्कालिकसम्बन्ध में हर के तात्कालिकसम्बन्ध का भाग देकर लब्धि में य का मान ग के तुल्य करने से लुप्तभिन्न का मान प्रगट हो जायगा । परन्तु यदि य के स्थान में ग का उत्थापन देने से, फ' (य) = ० और फि' (य) = ० तो स का मान फिर लुप्त हुआ इस लिये फिर अंश और हर का तात्कालिकसम्बन्ध निकाल यही क्रिया करो अर्थात् इस नये अंश के तात्कालिकसम्बन्ध में नये हर के तात्कालिकसम्बन्ध का भाग दे कर लुप्तभिन्न का मान लावो और यदि यहां भी य के स्थान में ग का उत्थापन देने से अंश और हर दोनों शून्य हो जायं तो फिर पहले ऐसी क्रिया करो यों बार बार करने से लुप्तभिन्न का मान प्रगट हो जायगा ।

जैसे $\frac{\text{ला}(१+\text{य})}{\text{य}}$ = स जब य = ० तब स का क्या मान होगा ? ।

यहां इसी प्रक्रम के दूसरे समीकरण से,

$$\text{स} = \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फि}'(\text{य})} = \frac{\frac{१}{१+\text{य}}}{१},\ \text{इस लिये जब य} = ०$$

$$\text{तो स} = \frac{\text{फ}'(०)}{\text{फि}'(०)} = \frac{१}{१} = १\ \text{यही उत्तर हुआ ।}$$

इस उदाहरण में यदि ला (१ + य) इस का मान य के घात-वृद्धि में लावो तो

$$\text{स} = \frac{\text{य} - \frac{\text{य}^२}{२} + \frac{\text{य}^३}{३} - \cdots\cdots}{\text{य}}\ \ \text{अब (३१) वें प्रक्रम के विधि से}$$

अंश और हर दोनों में $(य-0=य)$ इस का भाग देने से $म=न=१$,
और $अ_१=१-\frac{य}{२}+\cdots\cdots$, $क_१=१$
इस लिये,

$$स=\frac{१-\frac{य}{२}+\frac{य^२}{३}-\cdots\cdots}{१}$$ यहां $य=0$ करने से लुप्तभिन्न का मान $=१$ ।

देखो इस रीति की अपेक्षा पहली रीति से बड़े लाघव से उत्तर सिद्ध होता है ।

दूसरा उदाहरण, यदि $स=\frac{ज्याय}{य}$ तो इस भिन्न का क्या मान होगा यदि $य=0$ ।

यहां इसी प्रक्रम के (२) समीकरण से,

$$स=\frac{फ'(य)}{फि'(य)}=\frac{कोज्याय}{१}=१ \text{ यदि } य=0 ।$$

और यदि ज्याय का मान य के घातवृद्धि में लावो तो

$$स=\frac{य-\frac{य^३}{६}+\cdots}{य}$$ तब ३१ वें प्रक्रम से $स=१-\frac{य^२}{३}+\cdots=१$, यदि $य=0$ ।

३३ । यदि म और न की संख्या दोनों भिन्न हों तो स्पष्ट है कि तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा निकालने से अन्त्य में ऐसे मान आने लगें गे कि यदि $य=ग$ करो तो उन का मान $=\frac{१}{0}$ तुल्य होगा क्यों कि जब भिन्न का मान $=\frac{अ_१(य-ग)^म}{क_१(य-ग)^न}$ ऐसा है तो स्पष्ट है कि प्रत्येक तात्कालिकसम्बन्ध में अंश और हर दोनों में $(य-ग)$ का घात एक एक कम होता चला जायगा और जब तक इस घात की संख्या धनात्मक होगी तब तक तात्कालिकसम्बन्धों का मान $=\{फा(य)\}\{(य-ग)^प\}$ ऐसा होगा यहां $फा(य)=$ कोई य का फल है इस में य के स्थान में ग का उत्थापन देने से स्पष्ट है कि लुप्तभिन्न ही होगा और जब प का

मान ऋण होगा तब भिन्न का मान $= \frac{\text{फा}(\text{य})}{(\text{य}-\text{ग})^{\text{प}}}$ यहां य के स्थान में ग का उत्थापन देने से भिन्न का मान अनन्त आवै गा इस लिये म और न जब दोनों भिन्न हैं तब ठीक ३२ वें प्रक्रम की क्रिया से लुप्तभिन्न का मान नहीं निकलैगा परन्तु यदि उस भिन्न का इतना घात किया जाय कि अंश और छेद में जो म और न की भिन्न संख्यायें हैं उन के स्थान में कोई अभिन्न संख्यायें हो जायं तो स्पष्ट है कि (३२) वें प्रक्रम के विधि से उस भिन्न के उस घात का मान निकल आवै गा फिर इस मान का उतना घातमूल लेने से यथार्थ लुप्तभिन्न का मान प्रगट हो जाय गा ।

जैसे यदि $\text{स} = \frac{(\text{य}^{२} - \text{ग}^{२})^{\frac{१}{२}}}{\sqrt{\text{य} - \text{ग}}}$ यहां एकतीसवें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

जब य $=$ ग के तो लुप्तभिन्न का प्रमाण $= \sqrt{२\text{ग}}$

परन्तु यदि दोनों का वर्ग कर डालो तो $\text{स}^{२} = \frac{\text{य}^{२} - \text{ग}^{२}}{\text{य} - \text{ग}}$ अब ३२ वें

प्रक्रम से जब य $=$ ग, तो $\text{स}^{२} = \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फि}'(\text{य})} = \frac{२\text{य}}{१} = २\text{ग} \;\therefore\; \text{स} = \sqrt{२\text{ग}}$

यों भिन्न का रूप देखने ही से मालूम हो जाय गा कि भिन्न का के घात करें जिस में तात्कालिकसम्बन्ध में य के स्थान में ग का उत्थापन देने से मान अनन्त के तुल्य न हो ।

३४ । देखो (३२) वें प्रक्रम से यदि एक ही समय में अंश और हर के तात्कालिकसम्बन्ध नियतसंख्या के तुल्य हों तो लुप्तभिन्न का मान भी संख्यात्मक निकलै गा, यदि एक ही काल में अंश का तात्कालिकसम्बन्ध शून्य के तुल्य हो और हर का तात्कालिकसम्बन्ध किसी नियतसंख्या के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि लुप्तभिन्न का मान शून्य के तुल्य होगा और इसी प्रकार जब हर का तात्कालिकसम्बन्ध शून्य के तुल्य हो और अंश का किसी नियतसंख्या के तुल्य हो तो लुप्तभिन्न का मान अनन्त होगा ।

३५ । कभीं कभीं अज्ञातराशि का रूपान्तर करने से भी बड़े लाघव से लुप्तभिन्न का मान निकलता है ।

जैसे तेंतीसवें प्रक्रम के उदाहरण में

$$स = \frac{(य^२ - ग^२)^{\frac{१}{२}}}{(य - ग)^{\frac{१}{२}}}$$ यहां कल्पना करो कि $य = ग + च$

तो $स = \frac{(२गच)^{\frac{१}{२}}}{(च)^{\frac{१}{२}}} = \sqrt{२ग}$। च को शून्य मानने से भी यही मान रहेगा।

इसी प्रकार कभी कभी द्वियुक्पद सिद्धान्त से भी लुप्तभिन्न का मान लाघव से निकलता है।

जैसे $\left(१ + \frac{१}{य}\right)^य$ इस का मान यदि द्वियुक्पद सिद्धान्त से निकालो

$$\text{तो } \left(१ + \frac{१}{य}\right)^य = १ + १ + \frac{य(य-१)}{२य^२} + \frac{य(य-१)(य-२)}{२ \cdot ३ \cdot य^३} + \cdots\cdots$$

$$= १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{|\underline{३}} + \frac{१}{|\underline{४}} + \cdots - \frac{१}{२य} - \frac{१}{२य} + \frac{१}{३य^२} + \cdots$$

यहां यदि $य = \infty$ तो स्पष्ट है कि

$$\left(१ + \frac{१}{य}\right)^य = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{|\underline{३}} + \frac{१}{|\underline{४}} + \cdots = इ ।$$

इस लिये $\left(१ + \frac{१}{य}\right)^य$ इस का जब य का मान अनन्त हो तो मान इ के समान होगा।

इस प्रकार बुद्धिमान को चाहिये कि जहां जिस प्रकार से लाघव देख पड़े वहां उस प्रकार से लुप्तभिन्न का मान निकाले।

२६। लुप्तभिन्न सात प्रकार का होता है।

पहला	$\frac{0}{0}$	इस प्रकार का
दूसरा	$\frac{\infty}{\infty}$	इस प्रकार का
तीसरा	$\infty \pm \infty$	इस प्रकार का

चैाथा $0 \times \infty$ इस प्रकार का

पांचवां 0^0 इस प्रकार का

छठवां 1^∞ इस प्रकार का

सातवां ∞^0 इस प्रकार का

इन में पहला लुप्तभिन्न का मान निकालने का विधि पिछले प्रक्रमों में लिख आये हैं बाक़ी छवो लुप्तभिन्नों का थोड़ा सा परिवर्त्तन करने से उन का रूप पहले लुप्तभिन्न के ऐसा हो जाय गा ।

दूसरा सिद्दान्त ।

जैसे दूसरा $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{1}{0} \times \frac{0}{1} = \frac{0}{0}$ ।

इस लिये यह तो ठीक पहले ही के ऐसा हुआ तब इस का मान $= \frac{\infty}{\infty} = \frac{फ(य)}{फि(य)} = \frac{फ'(य)}{फि'(य)}$

इस का उदाहरण,

$\frac{\frac{1}{ज्याय}}{कोस्पय}$ इस का मान जब $य = 0$ तो $\frac{\infty}{\infty}$ ऐसा होगा

इस लिये दूसरे सिद्दान्त से

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0} = \frac{फ'(य)}{फि'(य)} = \frac{\frac{कोज्याय}{ज्या^2य}}{\frac{1}{ज्या^2य}} = कोज्याय = 1 \text{ जब } य = 0 \text{ ।}$$

$$\text{वा } \frac{\frac{1}{ज्याय}}{कोस्पय} = \frac{1}{ज्याय \cdot कोस्पय} = \frac{1}{कोज्याय} = 1 \text{ जब } य = 0 \text{ ।}$$

इस प्रकार से भी कर सकते हो ।

तीसरा सिद्धान्त ।

तीसरे में यदि धन चिन्ह हो अर्थात् भिन्न $\infty + \infty$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि लुप्तभिन्न का मान अनन्त ही होगा क्यों कि अनन्त में अनन्त को मिलाने से भी अनन्त ही होगा ।

परन्तु यदि ऋण चिन्ह हो तो मानो कि $फ(य) - फि(य) = \infty - \infty = र$

$$इस\ लिये\ इ^{र} = इ^{फ(य) - फि(य)} = \frac{इ^{फ(य)}}{इ^{फि(य)}} = \frac{इ^{-फि(य)}}{इ^{-फ(य)}}$$

यहां स्पष्ट है कि जब $य = ग$ तो $फ(य) = \frac{१}{०}$ और $फि(य) = \frac{१}{०}$

$$इस\ लिये\ \frac{इ^{-फि(य)}}{इ^{-फ(य)}} = \frac{0}{0}$$ क्यों कि इ एक से अधिक संख्या है ।

अब ठीक इस अध्याय के पहले सिद्धान्त से,

$\frac{इ^{-फि(य)}}{इ^{-फ(य)}} = इ^{र}$ इस का मान निकाल उस का लघुरिक्थ लेने से र का वा $फ(य) - फि(य)$ इस का मान निकल आवे गा परन्तु इस में लघुरिक्थ जानना चाहिये । इस लिये इसे इस रीति से करो,

कल्पना करो कि $फ(य) = \frac{१}{फा(य)}$ और $फि(य) = \frac{१}{फी(य)}$

$$तो\ फ(य) - फि(य) = \frac{१}{फा(य)} - \frac{१}{फी(य)} = \frac{फी(य) - फा(य)}{फा(य) \cdot फी(य)}$$ ।

यहां स्पष्ट है कि जब $फ(य) = \infty$ और $फि(य) = \infty$

तो $फा(य) = 0$ और $फी(य) = 0$ इस लिये $\frac{फी(य) - फा(य)}{फा(य) \cdot फी(य)} = \frac{0}{0}$

अब इस पर से पहले सिद्धान्त से लुप्तभिन्न का मान निकालो ।

उदाहरण, स्पय − छेय इस का मान जब $य = \frac{\pi}{२}$ तो $\infty - \infty$ ऐसा होगा ।

इस लिये $फ(य) = स्पय = \frac{१}{कोस्पय}$ और $फा(य) = कोस्पय$,

और, $\text{फि}(\text{य}) = \text{छेय} = \frac{1}{\text{कोज्याय}}$ $\therefore$ $\text{फी}(\text{य}) = \text{कोज्याय}$,

तब $\text{फा}'(\text{य}) = -\text{कोछे}^2\text{य}$ और $\text{फी}'(\text{य}) = -\text{ज्याय}$ इस लिये

$$\left\{\frac{\text{फी}(\text{य}) - \text{फा}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})\cdot\text{फी}(\text{य})}\right\} = \frac{\text{फी}'(\text{य}) - \text{फा}'(\text{य})}{\text{फा}'(\text{य})\cdot\text{फी}(\text{य}) + \text{फा}(\text{य})\cdot\text{फी}'(\text{य})}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^2\text{य} - \text{ज्याय}}{-\text{कोज्याय}\cdot\text{कोछे}^2\text{य} - \text{ज्याय}\cdot\text{कोस्पय}} = \frac{\text{कोस्प}^2\text{य} + 1 - \text{ज्याय}}{-\text{कोज्याय}(\text{कोछे}^2\text{य} + 1)}$$

यहां यदि $\text{य} = \frac{\pi}{२}$ तो फिर लुप्तभिन्न ही हुआ जिस का रूप $\frac{0}{0}$ ऐसा है। इस लिये

$-\frac{\text{कोस्प}^2\text{य} + 1 - \text{ज्याय}}{\text{कोज्याय}(\text{कोछे}^2\text{य} + 1)}$ इस के अंश और छेद का फिर तात्कालिकसम्बन्ध लेने से,

$$\frac{२\,\text{कोस्पय}\cdot\text{कोछे}^2\text{य} + \text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}(\text{कोछे}^2\text{य} + 1) - \text{कोज्याय}\cdot\text{फे}'(\text{य})}$$ ऐसा हुआ।

यहां $\text{फे}'(\text{य}) = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}(\text{कोछे}^2\text{य} + 1)$ ।

अब यदि यहां $\text{य} = \frac{\pi}{२}$ तो

$$\frac{२\,\text{कोस्पय}\cdot\text{कोछे}^2\text{य} + \text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}\cdot\text{फे}(\text{य}) - \text{कोज्याय}\cdot\text{फे}'(\text{य})} = \frac{0+0}{२-0} = \frac{0}{२} = 0$$ यही लुप्तभिन्न का मान हुआ।

चौथा सिद्धान्त।

जब लुप्तभिन्न का मान $0 \times \infty$ ऐसा हो

कल्पना करो कि $\text{फ}(\text{य})\cdot\text{फि}(\text{य}) = 0 \times \infty$ जब $\text{य} = \text{ग}$ अर्थात् $\text{फ}(\text{य}) = 0$, $\text{फि}(\text{य}) = \infty$ तो स्पष्ट है कि $\text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$

$= \frac{\text{फ}(\text{य})}{\frac{1}{\text{फि}(\text{य})}}$ परन्तु जब $\text{फि}(\text{य}) = \infty$ तो $\frac{1}{\text{फि}(\text{य})} = 0$ इस लिये

$\dfrac{\text{फ}(\text{य})}{\dfrac{१}{\text{फि}(\text{य})}} = \dfrac{0}{0}$ जब य = ग, अब इस रूप पर से लुप्तभिन्न का मान पहले सिद्धान्त से निकाल लो।

उदाहरण, $\dfrac{१-\text{य}^{\text{य}}}{१+\text{य}^{२}} \cdot \dfrac{१}{१-\text{य}^{२}}$ इस का मान जब य = १ के तो ०×∞ ऐसा होगा

इस लिये $\text{फ}(\text{य}) = \dfrac{१-\text{य}^{\text{य}}}{१+\text{य}^{२}}$ और $\dfrac{१}{\text{फि}(\text{य})} = १-\text{य}^{२}$

तब $\text{फ}'(\text{य}) = -\left\{\dfrac{\text{य}^{\text{य}}(\text{लाय}+१)}{१+\text{य}^{२}} + \dfrac{२\text{य}(१-\text{य}^{\text{य}})}{(१+\text{य}^{२})^{२}}\right\} = -\dfrac{१}{२}$

यदि य = १। और $\dfrac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left\{\dfrac{१}{\text{फि}(\text{य})}\right\} = -२\text{य} = -२$ यदि य = १

∴ लुप्तभिन्न का मान $= \dfrac{१}{४}$।

पांचवां सिद्धान्त।

जब कि लुप्तभिन्न 0^{0}, १^{∞} और ∞^{0} इस प्रकार का है यहां कल्पना करो कि भिन्न $= \text{फ}(\text{य})^{\text{फि}(\text{य})}$। दोनों का लघुरिक्थ लेकर भिन्न बनाने से भिन्न $= \text{इ}^{\text{फि}(\text{य})\,\text{लाफ}(\text{य})}$ यहां अब यदि फि(य) लाफ(य) इस का मान प्रगट हो तो स्पष्ट है कि लुप्तभिन्न का मान भी प्रगट हो जायगा।

परन्तु 0^{0} इस में फि(य)·लाफ(य) = ०×∞ क्यों कि एक के लघुरिक्थ में शून्य का लघुरिक्थ घटा देने से अनन्त का लघुरिक्थ होगा परन्तु एक का लघुरिक्थ शून्य है और अनन्त का लघुरिक्थ अनन्त ही होना चाहिये इस लिये जब फ(य) शून्य के तुल्य होगा तब इस का लघुरिक्थ अवश्य अनन्त के तुल्य होगा।

१^{∞} इस में फि(य)·लाफ(य) = ∞×०

और ∞^{0} इस में भी फि(य)·लाफ(य) = ०×∞ इस लिये 0^{0}, १^{∞} और ∞^{0} इन तीनों रूपों में फि(य) लाफ(य) इस का मान ०×∞ यही हुआ।

अब चौथे सिद्धान्त से फि(य)लाफ(य) इस का मान सहज में निकल जायगा और उस मान पर से तब लुप्तभिन्न का मान भी आ जायगा ।

उदाहरण, देखो $\left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{य}}+\left(\frac{१}{३}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}^{य}$ यहां जब $य = 0$

तब इस का मान 0^0 ऐसा होगा । इस लिये

$$फि(य)लाफ(य) = य \cdot ला\left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{य}}+\left(\frac{१}{३}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}$$

$$= \frac{ला\left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{य}}+\left(\frac{१}{३}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}}{\frac{१}{य}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{ला\left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{र}+\left(\frac{१}{३}\right)^{र}\right\}}{र} \quad यदि\ र = \frac{१}{य}$$

इस पर से

$$\frac{ता}{तार} ला\left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{र}+\left(\frac{१}{३}\right)^{र}\right\} = \frac{ला\left(\frac{१}{२}\right)\left(\frac{१}{२}\right)^{र}+ला\left(\frac{१}{३}\right)\left(\frac{१}{३}\right)^{र}}{\left(\frac{१}{२}\right)^{र}+\left(\frac{१}{३}\right)^{र}}$$

$$= \frac{ला\left(\frac{१}{२}\right)+ला\left(\frac{१}{३}\right)\left(\frac{\frac{१}{३}}{\frac{१}{२}}\right)^{र}}{१+\left(\frac{\frac{१}{३}}{\frac{१}{२}}\right)^{र}} = ला\left(\frac{१}{२}\right) \quad यदि\ र = \infty$$

और इस पर से लुप्तभिन्न का मान $= \frac{१}{२}$ ।

इस उदाहरण को और प्रकार से भी कर सकते हो ।

जैसे $\left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{य}}+\left(\frac{१}{३}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}^{य}$ इस का मान जब $य = 0$ तब जानना है

$$तो\ \left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{य}}+\left(\frac{१}{३}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}^{य} = \left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}^{य}\left\{१+\left(\frac{\frac{१}{३}}{\frac{१}{२}}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}^{य}$$

$$=\frac{१}{२}\left\{१+\left(\frac{२}{३}\right)^{\frac{१}{य}}\right\}^{य}=\frac{१}{२}\text{ यदि } य=0\text{ ।}$$

दूसरा उदाहरण, देखो $\left(\frac{अ^{\frac{१}{य}}+क^{\frac{१}{य}}}{२}\right)^{२य}$ यहां जब $य=\infty$

तब इस का मान $=\left(\frac{अ^{0}+क^{0}}{२}\right)^{२\times\infty}=१^{\infty}$, इस लिये यहां भी

$$फि(य)\,लाफ(य)=\infty\times 0=२य\cdot ला\left(\frac{अ^{\frac{१}{य}}+क^{\frac{१}{य}}}{२}\right)=\frac{ला\left(\frac{अ^{\frac{१}{य}}+क^{\frac{१}{य}}}{२}\right)}{\frac{१}{२य}}$$

$$=\frac{ला\left(\frac{अ^{२र}+क^{२र}}{२}\right)}{र}\text{ यदि } र=\frac{१}{२य}\text{ । अब इस पर से,}$$

$$\frac{ता}{तार}\,ला\left(\frac{अ^{२र}+क^{२र}}{२}\right)=\frac{\frac{२लाअ\cdot अ^{२र}+२लाक\cdot क^{२र}}{२}}{\frac{अ^{२र}+क^{२र}}{२}}$$

$$=\frac{२लाअ\cdot अ^{२र}+२लाक\cdot क^{२र}}{अ^{२र}+क^{२र}}=लाअ+लाक\text{ यदि } र=0$$

तब इस पर से लुप्तभिन्न का मान $=अ\cdot क$ यह हुआ ।

तीसरा उदाहरण, देखो $\left(\frac{अ}{य}\right)^{य^{२}}$ यहां जब $य=0$ तब इस का मान ∞^{0} ऐसा होगा इस लिये पूर्व सिद्धान्तों से,

$$फि(य)\,लाफ(य)=य^{२}\cdot ला\left(\frac{अ}{य}\right)=\frac{ला\left(\frac{अ}{य}\right)}{\frac{१}{य^{२}}}=\frac{ला(अ\cdot र)}{र^{२}}$$

यदि $र=\frac{१}{य}$ । इस पर से,

$\frac{ता}{तार}\,ला(अ\cdot र)=\frac{अ}{अ\cdot र}=\frac{१}{र}$ और $\frac{ता}{तार}(र^{२})=२र$ इस लिये इस

लुप्तभिन्न का मान $=\frac{१}{२र^{२}}=0$ जब $र=\infty$

इस पर से $\left(\frac{अ}{य}\right)^{य^2}$ इस का मान = १ जब य = ० या र = ∞ ।

३७ । कभीं कभीं ऊपर कहे हुए लुप्तभिन्नों का मान निकालने के लिये बीजगणित की प्रक्रिया भी बहुत काम आती है ।

जैसे $\frac{फ(य)}{य}$ यहां जब य = ∞ तब यदि फ(य) = ∞ तो स्पष्ट है कि लुप्तभिन्न का वही मान होगा जो कि फ'(य) इस का है क्यों कि फि(य) = य ∴ फि'(य) = १ परन्तु जब य = ∞ तो बीजगणित की प्रक्रिया से

फ(य) = फ(य + च) = फ(य + १) इत्यादि होगा

$$इस\ लिये\ फ'(य) = \frac{फ(य+च) - फ(य)}{च} = \frac{फ(य+१) - फ(य)}{च}$$

$= \frac{फ(य+१) - फ(य)}{१}$ ऐसा होगा क्यों कि $\frac{फ(य+च)}{च} = फ(य+च)$

और $\frac{फ(य)}{च} = फ(य)$ । तब फ(य + १) − फ(य) इस का जो मान होगा वही लुप्तभिन्न का भी मान होगा ।

इसी प्रकार जब लुप्तभिन्न का मान = $\{फ(य)\}^{\frac{१}{य}}$

यहां भी यदि य = ∞ तो फ(य) = ∞ ऐसा कल्पना करो तो पूर्व सिद्धान्तों से यहां $\frac{१}{य}$ ला फ(य) इस का मान जानना चाहिये

अर्थात् $\frac{ता}{ताय}\left\{ला फ(य)\right\}$ इस का मान जानना है परन्तु इस का मान इसी प्रक्रम की ऊपर लिखी हुई युक्ति से

ला फ(य + १) − ला फ(य) = ला $\frac{फ(य+१)}{फ(य)}$ ऐसा होगा

इस लिये तब लुप्तभिन्न का मान = $\frac{फ(य+१)}{फ(य)}$ यही होगा ।

उदाहरण, $\left(\frac{य+1}{अ}\right)^{\frac{1}{य}}$ इस का मान जब $य=\infty$ तब क्या होगा यह जानना है ।

देखो यहां स्पष्ट है कि जब $य=\infty$ तो $\frac{य+1}{अ}=\infty$ इस लिये

$\frac{फ(य+1)}{फ(य)}=\frac{य+1+1}{अ}\cdot\frac{अ}{य+1}=1+\frac{1}{य+1}=1$ जब $य=\infty$ इस लिये लुप्तभिन्न का मान = १ यही निकला ।

३८ । इस प्रक्रम में विद्यार्थियों के अच्छी तरह बोध होने के लिये सब सिद्धान्तों को एकट्ठा कर लिखते हैं ।

प्रथम सिद्धान्त ।

जब लुप्तभिन्न का रूप $=\frac{0}{0}$ ऐसा हो तो $\frac{फ(य)}{फि(य)}$

$$=\frac{0}{0}=\frac{फ'(य)}{फि'(य)}=\text{लुप्तभिन्न}।$$

इस पहले सिद्धान्त ही का सर्वत्र प्रयोजन पड़ता है इस लिये इस का श्लोक और दोहा बनाकर लिख देते हैं ।

श्लोक ।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धो लवस्य हरजेन सः ।
तत्सम्बन्धेन भक्तः स्याल्लुप्तभिन्नमितिर्ध्रुवम् ॥

दोहा ।

हरसम्बन्ध को भाग दे लवसम्बन्ध में जान ।
लब्धी को कहिये तुरत लुप्तभिन्न को मान ॥

श्लोक ।

अज्ञातराशेर्नियताङ्कमाने यद्यंशहारौ वियता समानौ ।
स्यातामभीष्टस्य फलस्य यस्य तदा तदाख्यं किल लुप्तभिन्नम् ॥

दोहा ।

नियतमान अज्ञात के जौं हो शून्य समान ।
अंश हार दोउ भिन्न के लुप्तभिन्न सो जान ॥

दूसरा सिद्धान्त ।

जब भिन्न $\frac{\infty}{\infty}$ ऐसा हो तो

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0} = \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फि}'(\text{य})} = \text{लुप्तभिन्न} ।$$

तीसरा सिद्धान्त ।

जब भिन्न $\infty - \infty$ ऐसा हो तो फ(य) − फि(य)

$$= \frac{1}{\frac{1}{\text{फ}(\text{य})}} - \frac{1}{\frac{1}{\text{फि}(\text{य})}} = \frac{1}{\text{फा}(\text{य})} - \frac{1}{\text{फी}(\text{य})} = \frac{\text{फी}(\text{य}) - \text{फा}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})\cdot\text{फी}(\text{य})}$$

$$= \frac{\text{फी}'(\text{य}) - \text{फा}'(\text{य})}{\text{फा}'(\text{य})\cdot\text{फी}(\text{य}) + \text{फा}(\text{य})\cdot\text{फी}'(\text{य})} = \text{लुप्तभिन्न} ।$$

चौथा सिद्धान्त ।

जब भिन्न $0 \times \infty$ ऐसा हो तो फ(य)·फि(य)

$$= \frac{\text{फ}(\text{य})}{\frac{1}{\text{फि}(\text{य})}} = \frac{0}{0} = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फी}(\text{य})} \text{ और लुप्तभिन्न} = \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फी}'(\text{य})} ।$$

पांचवां सिद्धान्त ।

जब भिन्न $0^0, 1^\infty, 0^\infty$ ऐसा हो तो फि(य)·लाफ(य) $= 0 \times \infty = \infty \times 0$ इस पर से चौथे सिद्धान्त से लुप्तभिन्न का मान जान सकते हो ।

सैंतीसवें प्रक्रम का सिद्धान्त ।

जब भिन्न $\{\text{फ}(\text{य})\}^{\frac{1}{\text{य}}}$ ऐसा हो और

यहां जब $\text{य} = \infty$ तो $\text{फ}(\text{य}) = \infty$ तब $\text{लुप्तभिन्न} = \frac{\text{फ}(\text{य}+1)}{\text{फ}(\text{य})}$ ।

३९ । इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण रूपान्तर कर के दिखाते हैं ।

(१) $\frac{\text{ला}(1+\text{य})^2}{\text{य} + \text{ज्याय}}$ इस का क्या मान होगा जब $\text{य} = 0$ ।

यहां $\text{ला}(1+\text{य})^2 = 2\,\text{ला}(1+\text{य}) = 2\left(\text{य} - \frac{\text{य}^2}{2} + \cdots\right)$

$$\text{और } य + ज्याय = य + य - \frac{य^३}{६} + \cdots = २य - \frac{य^३}{६} + \cdots$$

$$\therefore \frac{ला(१+य)^२}{य + ज्याय} = \frac{२\left(य - \frac{य^२}{२} + \cdots\right)}{२य - \frac{य^३}{६} + \cdots} = \frac{२\left(१ - \frac{य}{२} + \cdots\right)}{२ - \frac{य^२}{६} + \cdots}$$

$$= १ \text{ यदि } य = 0 ।$$

(२) $\frac{ला(१+य+२य^२)^२}{य^२+३ ज्याय}$ इस का क्या मान होगा जब $य = 0$ ।

$$\text{यहां } ला(१+य+२य^२)^२ = २ला(१+य+२य^२)$$

$$= २\left\{(य+२य^२) - \frac{१}{२}(य+२य^२)^२ + \cdots\cdots\right\}$$

$$\text{और } य^२ + ३ ज्याय = य^२ + ३\left(य - \frac{य^३}{६} + \cdots\right)$$

$$\text{इस लिये, } \frac{ला(१+य+२य^२)^२}{य^२+३ ज्याय}$$

$$= \frac{२\left\{(य+२य^२) - \frac{१}{२}(य+२य^२)^२ + \cdots\right\}}{य^२ + ३\left(य - \frac{य^३}{६} + \cdots\cdots\right)}$$

$$= \frac{२\left\{(१+२य) - \frac{१}{२}(य+४य^२+४य^३) + \cdots\cdots\right\}}{य + ३\left(१ - \frac{य^२}{६} + \cdots\cdots\right)} = \frac{२}{३} \text{ यदि } य = 0 ।$$

(३) $\frac{छेय \cdot कोउज्याय \cdot ला(य + कोज्याय)}{३ ज्याय}$ इस का क्या मान होगा जब $य = 0$ ।

यहां देखो जब $य = 0$ तो छेय और कोउज्याय ये दोनों एक के बराबर हों गे इस लिये केवल $\frac{ला(य + कोज्याय)}{३ ज्याय}$ इसी का मान जानना चाहिये ।

अब यहां $ला\,(य + कोज्याय) = ला\left(य + १ - \frac{य^२}{२} + \cdots\right)$

$$= ला\left\{१ + \left(य - \frac{य^२}{२} + \cdots\right)\right\} = \left(य - \frac{य^२}{२}\right) - \frac{१}{२}\left(य - \frac{य^२}{२}\right)^२ + \cdots\cdots$$

और $ज्याय = ३\left(य - \frac{य^३}{६} + \cdots\cdots\right)$

$$इस\ लिये\ \frac{ला\,(य + कोज्याय)}{३\,ज्याय} = \frac{\left(य - \frac{य^२}{२}\right) - \frac{१}{२}\left(य - \frac{य^२}{२}\right)^२ + \cdots}{३\left(य - \frac{य^३}{६} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{\left(१ - \frac{य}{२}\right) - \frac{१}{२}\left(य - य^२ + \frac{य^३}{४}\right) + \cdots}{३\left(१ - \frac{य^२}{६} + \cdots\right)} = \frac{१}{३}\ यदि\ य = ० ।$$

(४) $\left\{\frac{य^य}{\lfloor य}\right\}^{\frac{१}{य}}$ इस का क्या मान होगा जब $य = \infty$

यहां पांचवें सिद्धान्त से $\frac{१}{य}\,ला\left(\frac{य^य}{\lfloor य}\right) = र = ० \times \infty$

परन्तु $\frac{१}{य}\,ला\left(\frac{य^य}{\lfloor य}\right) = \frac{ला\left(\frac{य^य}{\lfloor य}\right)}{य} = \frac{\infty}{\infty} = र$

इस लिये यहां $ला\left(\frac{य^य}{\lfloor य}\right)$ इसी का तात्कालिकसम्बन्ध जानना चाहिये

परन्तु $ला\left(\frac{य^य}{\lfloor य}\right) = य \cdot लाय - लाय - ला\,(य - १) - ला\,(य - २) - \cdots\cdots$

इस लिये $\frac{ता}{ताय}\left\{ला\left(\frac{य^य}{\lfloor य}\right)\right\} = १ + लाय - \frac{१}{य} - \frac{१}{य - १} - \frac{१}{य - २} - \cdots$

$$= १ + \text{लाय} - \left(\frac{१}{१} + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \cdots\right) = १ + \text{लाय} - \text{लाय}$$

$$= १ \text{ ।} \left\{ \begin{array}{l} \text{क्यों कि ला } १ = 0 \text{ और ला } (0) = -\left(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \cdots\right) \\ \text{इस लिये ला } \left(\frac{१}{०}\right) = \text{लाय} = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \cdots\cdots \end{array} \right\}$$

तब $\left(\frac{\text{य}^{\text{य}}}{\lfloor\text{य}}\right)^{\frac{१}{\text{य}}} = \text{इ}^{\text{र}} = \text{इ}$ जब $\text{य} = \infty$ । क्यों कि यहां $\text{र} = १$ ।

इस प्रकार विद्यार्थियों को चाहिये कि जहां तक हो लाघव से उत्तर निकालें इसी चौथे उदाहरण के सिद्ध होने के लिये टाड्हण्टर साहब ने अपने चलनकलन (Differential Calculus) में १६१ और १६२ ये दो नये प्रक्रम बनाये हैं परन्तु ऊपर की युक्ति से इन दोनों प्रक्रमों का कुछ भी काम नहीं पड़ता ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

नीचे लिखे हुए भिन्नों का (उन के सामने जो य का मान लिखा है उस मान में) मान बतावो ? ।

(१) $\frac{\text{य} - १}{\text{य}^{\text{न}} + \text{नय} - \text{न} - १}$ जब $\text{य} = १$, उत्तर $\frac{१}{२\text{न}}$ ।

(२) $\frac{२\text{इ}^{\text{य}} + \text{इ}^{\text{य}^२} - ३}{\text{य} + \text{इ}^{\text{य}} - १}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर १ ।

(३) $\frac{\text{लाक्षेय}}{\text{य}^२}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\frac{१}{२}$ ।

(४) $\frac{\text{ला}\left(\text{इ}^{\text{ज्याय}}\right)}{४\text{य}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\frac{१}{४}$ ।

(५) $\frac{\text{स्प}^{४}\text{य}}{५\,\text{य}^{४}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\frac{१}{५}$ ।

(६) $\frac{\text{ला}\left(\text{कोज्या}^{३}\text{य}\right)}{\text{य}^२}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $-\frac{३}{२}$ ।

(७) $\frac{१ - \text{स्पय}}{\frac{१}{२} - \text{ज्याय}}$ जब $\text{य} = \frac{\pi}{४}$, उत्तर $२\sqrt{२}$ ।

(८) $\dfrac{\text{कोछेय} - \text{ज्याय}}{\frac{\pi}{२} - \text{य}}$ जब $\text{य} = \frac{\pi}{२}$, उत्तर 0 ।

(९) $\dfrac{\text{स्पय} + \text{ज्याय}}{\text{य} + \text{उज्याय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर २ ।

(१०) $\dfrac{\text{इ}^{\text{स्पय}} - \text{इ}^{\text{उज्याय}}}{६\ \text{ज्याय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\frac{१}{६}$ ।

(११) $\dfrac{\text{ला}(१ + २\text{य} + ३\text{य}^२) + \text{य}}{\text{य}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर ३ ।

(१२) $\dfrac{\text{ला}(\text{इ}^{\text{य}} + \text{य})}{९\text{य}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\frac{२}{९}$ ।

(१३) $\dfrac{\text{स्पय}}{\text{ला}\left(\frac{\pi}{२} - \text{य}\right)}$ जब $\text{य} = \frac{\pi}{२}$, उत्तर ∞ ।

(१४) $\dfrac{\text{ला}(१ + \text{य})}{\text{ला}\left(१ + \frac{१}{\text{य}}\right)}$ जब $\text{य} = -१$, उत्तर १ ।

(१५) $\dfrac{\text{ला}(\text{इ}^{\text{य}} - १)}{\frac{१}{\text{य}}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर 0 ।

(१६) $\dfrac{\frac{१}{\text{य}} + \frac{१}{\text{ज्याय}}}{\text{कोस्पय} + \text{कोछेय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर १ ।

(१७) $\dfrac{\frac{\text{य}+२}{\text{य}-२} + \text{य}}{\frac{\text{य}-२}{\text{य}-३} - \text{य}}$ जब $\text{य} = ३$, उत्तर ५ ।

(१८) $\dfrac{\frac{\text{म}+१}{\text{य}}}{\text{लाकोस्पय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर ∞ ।

(१९) $\dfrac{\frac{१}{\text{उज्याय}} + \frac{१}{\text{ज्याय}}}{\text{कोस्पय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर ∞ ।

(२०) $\dfrac{(२)^{\text{य}} + (३)^{\text{य}}}{(४)^{\text{य}}}$ जब $\text{य} = \infty$, उत्तर 0 ।

(२१) $\frac{\text{य} \cdot \text{स्पय} + \text{कोज्याय}}{\text{उज्याय} \cdot \text{छेय} + \text{ज्याय}}$ जब $\text{य} = \frac{\pi}{२}$, उत्तर $\frac{\pi}{२}$ ।

(२२) $\frac{\text{क} \cdot \text{य}^{\text{न}}}{\text{ख} \cdot \text{इ}^{\text{य}}}$ (न कोई धन अभिन्न संख्या है)

जब $\text{य} = \infty$, उत्तर 0 ।

(२३) $\frac{२}{\text{य}} - \frac{३}{\text{य}^२}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर ∞ ।

(२४) $\frac{\text{कोज्याय}}{\text{स्पय}} - \frac{१}{\text{ज्याय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर 0 ।

(२५) $\frac{\text{क}}{\text{लाय}} - \frac{\text{कय}}{\text{लाय}}$ जब $\text{य} = १$, उत्तर $-$क ।

(२६) $\frac{\text{क}(\text{य}^२ + \text{य} + १)}{\text{ला}(\text{य}^२ + \text{य} - २)} - \frac{४\text{क}}{\text{ला}(\text{य}^२ + \text{य} - २)}$

जब $\text{य} = १$, उत्तर क ।

(२७) $\frac{\text{कोज्याय}}{\text{ला}(\text{य} + १)} - \frac{\text{ला}(\text{इ} + \text{य})}{\text{ज्याय}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर ∞ ।

(२८) $\frac{\text{कोज्याय}}{\text{य}^२ - १} - \frac{२\,\text{कोज्याय} - \text{य} \cdot \text{कोज्याय}}{\text{य}^२ - १}$

जब $\text{य} = १$, उत्तर $\frac{\text{कोज्या}(१)}{२}$ ।

(२९) $\frac{३}{\text{य}^२} - \frac{३\pi}{\text{य} \cdot \text{स्प}\pi\text{य}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\pi^२$ ।

(३०) $\frac{\pi^२}{२\text{य}} \cdot \frac{\text{इ}^{२\pi\text{य}} + १}{\text{इ}^{२\pi\text{य}} - १} - \frac{\pi}{२\text{य}^२}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर $\frac{\pi^३}{६}$

(३१) $\frac{१}{\text{इ}^{\text{य}} - १} - \frac{१}{\text{य}}$ जब $\text{य} = 0$, उत्तर ∞ ।

(३२) $\frac{\sqrt{\text{य} + \text{क}} + \sqrt{\text{य} - \text{क}}}{\sqrt{\text{य}^२ - \text{क}^२}} - \frac{१}{\sqrt{\text{य} - \text{क}}}$

जब य = क, उत्तर $\frac{१}{\sqrt{२\text{क}}}$ ।

(३३) ज्याय · कोस्पय जब य = 0, उत्तर १ ।

(३४) य · कोस्पय जब य = 0, उत्तर १ ।

(३५) $\text{स्पय}^{\text{न}} \cdot \text{कोछे}^{\text{न}}\text{य}$ जब य = 0, उत्तर १ ।

(३६) $(\text{क}-\text{य})(\text{क})^{\frac{१}{\text{य}-\text{क}}}$ जब य = क और क > १,

उत्तर ∞ ।

(३७) $\text{ला}(१+२\text{य}+३\text{य}^{२})^{\frac{\text{क}+\text{य}}{\text{य}}}$ जब य = 0, उत्तर २क ।

(३८) $\text{ला}(२\text{य}-१)\cdot\text{स्प}\left(\text{य}+\frac{\pi}{२}-१\right)$ जब य = १, उत्तर −२ ।

(३९) $(\text{क}-\text{य})\cdot\text{स्प}\,\frac{\pi\cdot\text{य}}{२\text{क}}$ जब य = क, उत्तर $\frac{२\text{क}}{\pi}$ ।

(४०) $\text{य}^{\text{म}}\cdot\left\{\text{ला}(\text{य})\right\}^{\text{न}}$ जब य = 0, उत्तर 0 ।

(४१) $\frac{\pi}{४\text{य}}\,\text{स्प}\,\frac{\pi\cdot\text{य}}{२}$ जब य = 0, उत्तर $\frac{\pi^{२}}{८}$ ।

(४२) $\frac{\pi^{२}}{३२\text{य}}\cdot\frac{\text{इ}^{\pi\text{य}}-१}{\text{इ}^{\pi\text{य}}+१}$ जब य = 0, उत्तर $\frac{\pi^{३}}{६४}$

(४३) $(\text{इ}-\text{य})^{\text{य}-\text{इ}}$ जब य = इ, उत्तर १

(४४) $\text{क}^{\text{य}}\cdot\text{स्प}^{-१}\frac{\text{ख}}{\text{क}^{\text{य}}}$ (यहां क > १) जब य = ∞,

उत्तर ख ।

(४५) $(१-\text{ख}\cdot\text{क}^{\frac{\text{ग}}{\text{य}}}+\text{ख})^{\text{य}}$ जब य = ∞, उत्तर $\text{क}^{-\text{खग}}$ ।

(४६) $(\frac{\text{क}}{\text{य}}+१)^{\text{य}\cdot\text{ग}}$ जब य = ∞, उत्तर $\text{इ}^{\text{क}\cdot\text{ग}}$ ।

(४७) $\left(\frac{\text{ज्या}^{-१}\text{य}}{\text{य}}\right)^{\frac{१}{\text{य}}}$ जब य = 0, उत्तर १ ।

(४८) $\left(\frac{\text{ज्याय}}{\text{य}}\right)^{\frac{१}{\text{य}^{२}}}$ जब य = 0, उत्तर $\frac{१}{\text{इ}^{\frac{१}{६}}}$ ।

(४९) $(\text{छेय})^{\frac{1}{य^2}}$ जब $य = 0$, उत्तर $\sqrt{इ}$

(५०) $\left\{ \sqrt{\frac{इ^य + 1}{2}} \right\}^{\frac{1}{य}}$ जब $य = 0$, उत्तर $\sqrt[4]{इ}$

(५१) $\text{ज्याय}^{\frac{1}{1 - \text{ज्याय}}}$ जब $य = \frac{\pi}{2}$, उत्तर $\frac{1}{इ}$ ।

(५२) $\frac{\text{ला}\left\{(1 - य)\, इ^य\right\}}{\text{उज्या}\, 2\, य}$ जब $य = 0$, उत्तर $-\frac{1}{4}$ ।

(५३) $\frac{अ^{कय} - क^{अय}}{अकय}$ जब $य = 0$, उत्तर $\text{ला}\left(\frac{अ^{\frac{1}{अ}}}{क^{\frac{1}{क}}}\right)$ ।

(५४) $\frac{\text{ज्यायक} - \text{ज्याकग}}{इ^{यक} - इ^{कग}}$ जब $य = ग$, उत्तर $\frac{\text{कोज्याकग}}{इ^{कग}}$ ।

(५५) $\left\{ \frac{न}{(1)^{\frac{1}{य}} + (2)^{\frac{1}{य}} + \cdots + (न)^{\frac{1}{य}}} \right\}^{नय}$

जब $य = \infty$, उत्तर $\frac{1}{\lfloor न}$ ।

(५६) $\frac{य + \text{स्प}^{-1} य - 6\, \text{स्प}^{-1} \frac{य}{3}}{य^3}$ जब $य = 0$,

उत्तर $-\frac{7}{27}$ ।

(५७) $\left\{ \frac{\text{लास्प}^{-1} य}{\text{स्प}^{-1} य} \right\}^{\frac{1}{\text{स्प}^{-1} य}}$ जब $\text{स्प}^{-1} य = \infty$,

उत्तर १ ।

(५८) $(य^2 + य)^3\, \text{ला}\left(1 + \frac{1}{य^2 + य}\right) - \frac{2 य^4 + 4 य^3 + य^2 - य}{2}$

यह किस के तुल्य होगा? जब $य = \infty$, उत्तर $\frac{1}{3}$ ।

(५९) $क \cdot य^3 - र \cdot य^2 + 2 र = 3 र - रय - क$ इस समीकरण में र का मान बताओ जब $य = 1$, उत्तर $र = 2 क$ ।

(६०) $\text{ला}(1 + य) + यक - रय \cdot \text{ज्याय} \cdot \text{कोस्पय} = \text{स्प}^{-1} य \cdot र \cdot य$ इस में र का मान क्या है? जब $य = 0$, उत्तर $र = क + 1$ ।

(६१) र · य^{४} − य^{य} = र − १ इस समीकरण में र का मान क्या होगा? जब य = १, उत्तर र = $\frac{१}{४}$ ।

(६२) स्पय − रय = र · उज्याय − ज्याय इस में र का क्या मान होगा? जब य = ०, उत्तर र = २ ।

(६३) र^{२} · य^{२} · स्प$^{\pi}$·य + ३$^{\pi}$·य = ३ स्प$^{\pi}$·य इस में र का क्या मान है? जब य = ०, उत्तर र = π ।

(६४) क, ख और ग तीन पण्डित किसी राजा के यहां शास्त्रार्थ के लिये गये, राजा ने क से कहा कि कल से आप लोगों के बिदाई का नियम हम ने ऐसा किया है कि कल से दूसरे दिन क को एक रुपया तीसरे दिन दो रुपये य दिन में य − १ इतने रुपये मिलैं गे और ऊपर जो दिन का क्रम है उसी क्रम से ग को य दिन में य^{३} − १ इतने रुपये मिलैं गे और ग के बिदाई से क के बिदाई में भाग देने से जो लब्धि हो ख, उतनी बिदाई पावै गा इस बात को सुन वे लोग अप्रसन्न हो उस के प्रातःकाल एक दिन नगर देख दूसरे दिन के आरम्भ ही में राजा के सन्मुख बिदा होने के लिये उपस्थित हुए तो बतावो कि नियमानुसार राजा ने किस को और कितनी बिदाई दी? ।

उत्तर ख को ।-)८ दिया ।

(६५) एक धनी के यहां एक दीन जा लगा उस की प्रशंसा करने धनी ने अपने मन में यह नियम किया कि प्रशंसा करने के बाद जो यह एक घंटा रहै गा तो १, दो घंटे में ४, तीन घंटे में २७, चार घंटे में २५६, यों एकोत्तर घंटे में एकोत्तर घाततुल्य रुपये दूं गा परन्तु वह दीन धनी की प्रशंसा कर तुरन्त ही लौट चला तो बतावो धनी ने कुछ दिया या नहीं और दिया तो कितना दिया? । उत्तर १) दिया ।

इति पञ्चमाध्याय ।

षष्ठाध्याय ६ ।

अनेक स्वतन्त्रराशियों के फलादि के विषय में ।

४० । जब स = फ(य, र) ऐसा हो तो यहां ऐसा समझना चाहिये कि, य और र ये दोनों स्वतन्त्रराशि हैं (अर्थात् य का चलन

न "र" के आधीन है न "र" का चलन य के आधीन है) और इन दोनों के फल से स बना हुआ है यहां भी फ(य, र) इस का अर्थ ठीक वैसा ही समझना चाहिये जैसा फ(य) इस का अर्थ है विशेष इतना ही है कि फ(य) में केवल य चलराशि और स्थिराङ्क हैं फ(य,र) इस में य और र दो चलराशि और स्थिराङ्क हैं।

४१। देखो स = फ(य,र) यहां जब य और र दोनों चल हैं तब दो प्रकार का तात्कालिकसम्बन्ध निकल सकता है अर्थात् एक य के तात्कालिकवेग और स के तात्कालिकवेग का दूसरा र के तात्कालिकवेग और स के तात्कालिकवेग का। इन दोनों सम्बन्धों के निकालने में परस्पर एक एक चलराशि स्थिर माना जाता है जैसे यदि

$$स = य^३र + य^२र^२ + र$$

तो र को स्थिर मानने से $\frac{तास}{ताय} = ३रय^२ + २र^२य$ .... (१)

और य को स्थिर मानने से $\frac{तास}{तार} = य^३ + २रय^२ + १$ ...... (२)

(१) समीकरण में मानो कि य स्थिर है तो

द्वितीय सम्बन्ध $= \frac{ता^२स}{तायतार} = ३य^२ + ४रय$ .... (३)

इसी प्रकार (२) में र को स्थिर मानने से

द्वितीय सम्बन्ध $= \frac{ता^२स}{तारताय} = ३य^२ + ४रय$ .... (४)

देखो (३) और (४) दोनों समीकरणों में दहने ओर के पक्ष समान हैं इस लिये $\frac{ता^२स}{तायतार} = \frac{ता^२स}{तारताय}$ यह सिद्ध हुआ।

सामान्यतः टेलर के सिद्धान्त से नीचे लिखी हुई युक्ति से सिद्ध कर सकते हो,

जब स = फ(य,र) तो मानो कि पहले र स्थिर है और य की चतुल्य वृद्धि हुई तब टेलर के सिद्धान्त से,

$$स' = फ(य + च, र) = स + \frac{तास}{ताय}\cdot च + \frac{ता^२स}{ताय^२}\cdot\frac{च^२}{२} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \text{स}' - \text{स} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \cdot \text{च} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} \cdot \frac{\text{च}^2}{2} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \text{फ}(\text{य} + \text{च}, \text{र}) - \text{फ}(\text{य}, \text{र}) \cdots\cdots\cdots (\text{५})$$

अब (५) इस में माने कि य स्थिर है और र की जतुल्य वृद्धि हुई

तब $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ इस का रूप $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\text{तार}} \cdot \text{ज} + \cdots$ ऐसा होगा।

और $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ इस का रूप $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\right)}{\text{तार}} \cdot \text{ज} + \cdots$ ऐसा होगा।

इस लिये पांचवें समीकरण का रूप

$$\text{फ}(\text{य} + \text{च}, \text{र} + \text{ज}) - \text{फ}(\text{य}, \text{र} + \text{ज})$$

$$= \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \cdot \text{च} + \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\text{तार}} \cdot \text{ज} \cdot \text{च} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} \cdot \frac{\text{च}^2}{2} + \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\right)}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{च}^2 \cdot \text{ज}}{2} + \cdots\cdots \quad (\text{६})$$

अब छठवें में पांचवें को घटाकर ज · च का भाग देने से,

$$\frac{\text{फ}(\text{य} + \text{च}, \text{र} + \text{ज}) - \text{फ}(\text{य} + \text{च}, \text{र}) + \text{फ}(\text{य}, \text{र}) - \text{फ}(\text{य}, \text{र} + \text{ज})}{\text{च} \cdot \text{ज}}$$

$$= \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\right)}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{च}}{2} + \cdots\cdots$$

यहां स्पष्ट है कि ज और च दोनों को शून्य मानने से बायें ओर का पक्ष $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\text{तार}}$ इस के तुल्य होगा।

इसी प्रकार यदि स = फ(य, र) इस में पहले र को चल मान और फिर य को चल मान सब क्रिया करो तो बायें ओर का पक्ष ज्यों का त्यों रहे गा और दहिने पक्ष में $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)}{\text{ताय}}$ यह आवै गा।

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\text{तार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}}$$

ऐसा सिद्ध हुआ।

४२। एकतालीसवें प्रक्रम में जो विधि दिखलाया है उसे थोड़ा सा विचार करने से बीजगणित की रीति से सिद्ध कर सकते हो क्यों कि जब स के वेग का वेग दोनों में एक ही है और दोनों में य और र की गति वही है तो भागहार की विधि से $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}\cdot\text{तार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}\cdot\text{ताय}}$ ऐसा होगा। दोनों में ताय का भाग देने से,

$$\text{इसी प्रकार } \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^2\text{तार}} = \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तारताय}^2} \text{ ऐसा होगा।}$$

ऐसे ही टेलर के सिद्धान्त से वा बीजगणित के भागाहार से,

$$\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तार}^2\text{ताय}} = \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तारतायतार}},\ \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^2\text{तार}} = \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तायतारताय}} \text{ इत्यादि}$$

सिद्ध कर सकते हो।

४३। यदि स = फ(य, र, ल) हो तो यहां भी ऊपर की युक्तियों से एक एक को चलमान

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}},\ \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तालताय}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायताल}} \text{ इत्यादि}$$

$$\text{और } \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तायतारताल}} = \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तारतायताल}} = \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तालतायतार}} \text{ इत्यादि भी}$$

सिद्ध कर सकते हो।

विद्यार्थियों को चाहिये कि टेलर के सिद्धान्त से इन सब का रूप फैला कर अच्छी तरह से इन सब को पक्का करें ।

४४ । इस प्रक्रम में पूर्व कहे हुए विधियों का अच्छी तरह अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

(१) स = य · स्पर + र · स्पय इस में दिखाना चाहिये कि

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}} ।$$

यहां पहले र को स्थिर मानने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{स्पर} + \text{र} \cdot \text{छे}^2\text{य},$$ इस में य को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \text{छे}^2\text{र} + \text{छे}^2\text{य} \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

इसी प्रकार स = य · स्पर + र स्पय, इस में य को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{य} \cdot \text{छे}^2\text{र} + \text{स्पय},$$ इस में र को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}} = \text{छे}^2\text{र} + \text{छे}^2\text{य} \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

देखो (१) और (२) में दहिना पक्ष तुल्य है

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}} = \text{छे}^2\text{य} + \text{छे}^2\text{र} ।$$

(२) $\text{स} = \text{ला}\left(\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{र}}\right)$ यहां देखना है कि $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारताय}}$ ।

यहां पहले र को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{र}}{\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{र}}\,(\text{य}^2 + \text{र}^2)},$$ इस में य को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{र}}(\text{य}^2 - \text{र}^2) + \text{यर}}{\left\{\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{र}}(\text{य}^2 + \text{र}^2)\right\}^2} \cdots\cdots \quad (१)$$

इसी प्रकार $\text{स} = \text{ला}\left(\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{र}}\right)$ । इस में पहिले य को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = -\frac{\text{य}}{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{र}}(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})},$$ इस में र को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तारताय}} = \frac{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{र}}(\text{य}^{२}-\text{र}^{२})+\text{यर}}{\left\{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{र}}(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})\right\}^{२}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

देखो (१) और (२) दोनों का दहिना पक्ष तुल्य है

इस लिये $\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तारताय}}$ यह सिद्ध हुआ।

(३) $\text{स} = \text{अ}_{१}\,\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'} + \text{क}_{१}\,\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'} + \text{ख}_{१}\,\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'} + \cdots\cdots$

जहां $\text{अ}+\text{अ}' = \text{क}+\text{क}' = \text{ख}+\text{ख}' = \cdots\cdots = \text{न}$

यहां सिद्ध करना है कि

$$\text{य}^{२}\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}} + २\,\text{यर}\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तायतार}} + \text{र}^{२}\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तार}^{२}} = \text{न}(\text{न}-१)\,\text{स}।$$

पहले र को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{अ}_{१}\text{अय}^{\text{अ}-१}\text{र}^{\text{अ}'} + \text{क}_{१}\text{कय}^{\text{क}-१}\text{र}^{\text{क}'} + \text{ख}_{१}\text{खय}^{\text{ख}-१}\text{र}^{\text{ख}'} + \cdots \quad (१)$$

और $$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}} = \text{अ}_{१}\text{अ}(\text{अ}-१)\,\text{य}^{\text{अ}-२}\text{र}^{\text{अ}'} + \text{क}_{१}\text{क}(\text{क}-१)\,\text{य}^{\text{क}-२}\text{र}^{\text{क}'} + \cdots$$

$$\therefore\ \text{य}^{२}\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}} = \text{अ}_{१}\text{अ}(\text{अ}-१)\,\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'} + \text{क}_{१}\text{क}(\text{क}-१)\,\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}$$
$$+\,\text{ख}_{१}\text{ख}(\text{ख}-१)\,\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'} + \cdots\cdots \quad (\text{क})$$

(१) इस समीकरण में य को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तायतार}} = \text{अ}_{१}\text{अअ}'\text{य}^{\text{अ}-१}\text{र}^{\text{अ}'-१} + \text{क}_{१}\text{कक}'\text{य}^{\text{क}-१}\text{र}^{\text{क}'-१}$$
$$+\,\text{ख}_{१}\text{खख}'\text{य}^{\text{ख}-१}\text{र}^{\text{ख}'-१} + \cdots\cdots$$

$$\therefore\ २\,\text{यर}\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{तायतार}} = २\,\text{अ}_{१}\text{अअ}'\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'} + २\,\text{क}_{१}\text{कक}'\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}$$
$$+\,२\,\text{ख}_{१}\text{खख}'\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'} + \cdots\cdots \quad (\text{ख})$$

इसी प्रकार पहले य को स्थिर मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{अ}_1\text{अ}'\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'-1} + \text{क}_1\text{क}'\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'-1} + \text{ख}_1\text{ख}'\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'-1} + \cdots$$

और $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} = \text{अ}_1\text{अ}'(\text{अ}'-1)\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'-2} + \text{क}_1\text{क}'(\text{क}'-1)\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'-2} + \cdots$

$$\therefore \quad \text{र}^2\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} = \text{अ}_1\text{अ}'(\text{अ}'-1)\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'} + \text{क}_1\text{क}'(\text{क}'-1)\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}$$
$$+ \text{ख}_1\text{ख}'(\text{ख}'-1)\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'} + \cdots \qquad (\text{ग})$$

(क) (ख) और (ग) तीनों को जोड़कर समान गुणकों को अलग करने से $\text{य}^2\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + 2\,\text{यर}\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} + \text{र}^2\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2}$

$$= \text{अ}_1\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'}\left\{\text{अ}(\text{अ}-1) + \text{अ}'(\text{अ}'-1) + 2\,\text{अअ}'\right\}$$
$$+ \text{क}_1\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}\left\{\text{क}(\text{क}-1) + \text{क}'(\text{क}'-1) + 2\,\text{कक}'\right\}$$
$$+ \text{ख}_1\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'}\left\{\text{ख}(\text{ख}-1) + \text{ख}'(\text{ख}'-1) + 2\,\text{खख}'\right\} + \cdots\cdots$$
$$= \text{अ}_1\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'}\left\{\text{अ}^2 + \text{अ}'^2 + 2\,\text{अअ}' - (\text{अ}+\text{अ}')\right\}$$
$$+ \text{क}_1\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}\left\{\text{क}^2 + \text{क}'^2 + 2\,\text{कक}' - (\text{क}+\text{क}')\right\} + \cdots\cdots$$
$$= \text{अ}_1\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'}\left\{(\text{अ}+\text{अ}')^2 - (\text{अ}+\text{अ}')\right\}$$
$$+ \text{क}_1\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}\left\{(\text{क}+\text{क}')^2 - (\text{क}+\text{क}')\right\} + \cdots\cdots$$
$$= \text{अ}_1\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'}(\text{न}^2 - \text{न}) + \text{क}_1\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'}(\text{न}^2 - \text{न})$$
$$+ \text{ख}_1\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'}(\text{न}^2 - \text{न}) + \cdots\cdots$$
$$= (\text{न}^2 - \text{न})(\text{अ}_1\text{य}^{\text{अ}}\text{र}^{\text{अ}'} + \text{क}_1\text{य}^{\text{क}}\text{र}^{\text{क}'} + \text{ख}_1\text{य}^{\text{ख}}\text{र}^{\text{ख}'} + \cdots\cdots)$$

$= \text{न}(\text{न}-1)\,\text{स}$ यह सिद्ध हुआ ।

(४) $\text{स} = \text{इ}^{\text{यरलव}}$ यहां $\frac{\text{ता}^4\text{स}}{\text{तायतारतालताव}}$ इस का मान जानना है ।

पहले केवल य को चल मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{रलवइ}^{\text{यरलव}}$$

इस में केवल र को चल मानने से,

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}\,\text{तार}} = \text{लव}\cdot\text{इ}^{\text{यरलव}} + \text{यरल}^2\text{व}^2\text{इ}^{\text{यरलव}}$$

इस में केवल ल को चल मानने से,

$$\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}\,\text{तार}\,\text{ताल}} = \text{वइ}^{\text{यरलव}} + \text{यरलव}^2\text{इ}^{\text{यरलव}} + २\,\text{यरलव}^2\text{इ}^{\text{यरलव}} + \text{य}^2\text{र}^2\text{ल}^2\text{व}^3\text{इ}^{\text{यरलव}}$$

इस में केवल व को चल मानने से,

$$\frac{\text{ता}^4\text{स}}{\text{ताय}\,\text{तार}\,\text{ताल}\,\text{ताव}} = \text{इ}^{\text{यरलव}} + \text{यरलवइ}^{\text{यरलव}} + २\,\text{यरलवइ}^{\text{यरलव}} + \text{य}^2\text{र}^2\text{ल}^2\text{व}^2\text{इ}^{\text{यरलव}} + ४\,\text{यरलवइ}^{\text{यरलव}} + २\,\text{य}^2\text{र}^2\text{ल}^2\text{व}^2\text{इ}^{\text{यरलव}} + ३\,\text{य}^2\text{र}^2\text{ल}^2\text{व}^2\text{इ}^{\text{यरलव}} + \text{य}^3\text{र}^3\text{ल}^3\text{व}^3\text{इ}^{\text{यरलव}}$$

$$= (१ + ७\,\text{यरलव} + ६\,\text{य}^2\text{र}^2\text{ल}^2\text{व}^2 + \text{य}^3\text{र}^3\text{ल}^3\text{व}^3)\text{इ}^{\text{यरलव}}$$

यह सिद्ध हुआ ।

इस प्रकार विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरणों को कर इन तात्कालिकसम्बन्धों को अच्छी तरह से सीखें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $\text{स} = \text{य}^{\text{रल}}$ इस में सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}\,\text{तार}\,\text{ताल}} = \text{य}^{\text{रल}-१}(१ + ३\,\text{र}\cdot\text{ल}\cdot\text{लाय} + \text{र}^2\cdot\text{ल}^2\cdot\text{ला}^2\text{य})\text{ ।}$$

(२) $\text{स} = \text{ज्याय}\cdot\text{कोज्यार}$ इस में सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^2\text{तार}} = \text{कोज्या}(\text{य} - \text{र})\text{ ।}$$

(३) $\text{स} = \text{लाय} + \text{लार}$ इस में सिद्ध करो कि $\dfrac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^2\text{तार}} = 0$ ।

(४) $\text{स} = \text{ज्या}^{-१}\dfrac{\sqrt{\text{र}^2 - \text{य}^2}}{\text{र}}$ इस में सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}\,\text{तार}}\right)^2 = \frac{\text{र}^2}{(\text{र}^2 - \text{य}^2)^3}\text{ ।}$$

(५) $स = ला \left(\frac{\sqrt{य^२ + र^२} + र}{य + र}\right)$ इस में $\frac{ता^२स}{तायतार}$ इसे निकालो ।

(६) $स = अ_१ \, य^{अ} र^{अ'} ल^{अ''} + क_१ \, य^{क} र^{क'} ल^{क''} + ख_१ \, य^{ख} र^{ख'} ल^{ख''} + \cdots$

तो सिद्ध करो कि $नस = \frac{तास}{ताय} य + \frac{तास}{तार} र + \frac{तास}{ताल} ल$

और $न(न-१) स = य^२ \cdot \frac{ता^२स}{ताय^२} + र^२ \cdot \frac{ता^२स}{तार^२} + ल^२ \cdot \frac{ता^२स}{ताल^२}$

$$+ २ यर \frac{ता^२स}{तायतार} + २ यल \frac{ता^२स}{ताय \cdot ताल} + २ रल \frac{ता^२स}{तारताल} ।$$

यहां $अ + अ' + अ'' = क + क' + क'' = ख + ख' + ख'' = \cdots = न$ ।

(७) $स = \frac{१}{\sqrt{(अ - य)^२ + (क - र)^२ + (ख - ल)^२}}$ इस में सिद्ध करो कि $\frac{ता^२स}{ताय^२} + \frac{ता^२स}{तार^२} + \frac{ता^२स}{ताल^२} = 0$ ।

(८) $स = (य + र + ल)^न$ इस में सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^नस}{ताय^{न-१}तार} = \frac{ता^नस}{तार^{न-१}ताय} = \frac{ता^नस}{तार^{न-१}ताल} = \frac{ता^नस}{ताल^{न-१}ताय} = \underline{|न} ।$$

(९) $स = ज्या^{-१}\sqrt{\frac{क + य - र}{क + य + र}}$ इस में सिद्ध करो कि

$$य \cdot \frac{तास}{ताय} + र \cdot \frac{तास}{तार} + \frac{क\sqrt{र}}{(क + य + र)\sqrt{२क + २य - २र}} = 0 ।$$

(१०) $स = \frac{य^२र}{अ^२ - ल^२}$ इस में सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^३स}{तायतारताल} = \frac{४ यल}{(अ^२ - ल^२)^२}$$

(११) क और ख के पास जितने रुपये होते हैं उन के वर्ग योग में उन्हीं का घात मिलाने से जो हो उतने रुपये ग के पास हो जाते

हैं तो बतावो जब क के पास ५ और ख के पास १० रुपये होते हैं उस समय क के रुपये की वृद्धि से ग के रुपये की वृद्धि के गुणित है? ।

उत्तर २० गुणित ।

(१२) क और ख शहरों में जितनी बस्ती है उन के वर्गों को उन्हीं से परस्पर गुण जोड़ देने से जो हो उतनी बस्ती ग शहर में है तो बतावो जिस समय क की बस्ती १०००० और ग की बस्ती २००००० इतनी है उस समय ख के बस्ती की वृद्धि से ग के बस्ती की वृद्धि के गुणित है? ।

$$\text{उत्तर } १००००० \sqrt{\frac{(१०००००)^३ + ८०००००}{१०००००}} \text{ गुणित ।}$$

इति षष्ठाध्याय समाप्त ।

सप्तमाध्याय ७ ।

ल्याग्रांज और ल्याप्ल्यास के सिद्धान्त के विषय में ।

४५ । मानो कि र = ह + य · फ (र) यह एक समीकरण है इस पर से फि (र) इस का मान य के घातवृद्धि में लाना है (यहां ह और य परस्पर स्वतन्त्र हैं) तो म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से,

$$स = स_० + य \cdot \frac{तास_०}{ताय} + \frac{य^२}{१ \cdot २} \cdot \frac{ता^२स_०}{ताय^२} + \frac{य^३}{१ \cdot २ \cdot ३} \cdot \frac{ता^३स_०}{ताय^३} + \cdots$$

यहां फि (र) = स, और स, $\frac{तास}{ताय}$, $\frac{ता^२स}{ताय^२}$ इत्यादि में जब य = ०

तो स$_०$, $\frac{तास_०}{ताय}$, $\frac{ता^२स_०}{ताय^२}$ इत्यादि होते हैं ।

(म्याक्लरिन् का सिद्धान्त देखो) ।

यहां र = ह + यफ (र) .... (१)

इस पर से फि (र) इसे ले आने के लिये पहले यह सिद्ध करते हैं कि

$$\frac{ता}{ताय}\left\{फा(व)\frac{ताव}{ताह}\right\} = \frac{ता}{ताह}\left\{फा(व)\frac{ताव}{ताय}\right\} \quad \text{.................} \quad (२)$$

तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से बाएं पक्ष का रूप

$$फा'(व)\frac{ताव}{ताय}\cdot\frac{ताव}{ताह}+फा(व)\frac{ता^2व}{ताहताय}$$ ऐसा

और दहने पक्ष का रूप

$$फा'(व)\frac{ताव}{ताह}\cdot\frac{ताव}{ताय}+फा(व)\frac{ता^2व}{तायताह}$$ ऐसा होगा ।

परन्तु एकतालीसवें प्रक्रम से $\frac{ताव}{ताय}\cdot\frac{ताव}{ताह}=\frac{ताव}{ताह}\cdot\frac{ताव}{ताय}$

और $\frac{ता^2व}{तायताह}=\frac{ता^2व}{ताहताय}$

इस लिये $\frac{ता}{ताय}\left\{फा(व)\frac{ताव}{ताह}\right\}=\frac{ता}{ताह}\left\{फा(व)\frac{ताव}{ताय}\right\}$ यह सिद्ध हुआ ।

अब (१) समीकरण से,

$\frac{तार}{ताय}=फ(र)+यफ'(र)\frac{तार}{ताय}$ यहां, $\frac{ता}{तार}फ(र)=फ'(र)$

इस लिये समशोधन कर भाग लेने से,

$$\frac{तार}{ताय}=\frac{फ(र)}{1-य\cdot फ'(र)} \quad \cdots\cdots\cdots (अ)$$

और (१) दूसी समीकरण से,

$$\frac{तार}{ताह}=1+य\cdot फ'(र)\frac{तार}{ताह}$$

इस लिये $\frac{तार}{ताह}=\frac{1}{1-यफ'(र)}$

इस का उत्थापन (अ) में देने से,

$$\frac{तार}{ताय}=फ(र)\frac{तार}{ताह}$$

इस के दोनों पक्षों को $\frac{तास}{तार}$ इस से गुण देने से,

$$\frac{तास}{ताय}=फ(र)\frac{तास}{ताह}=फ(र)फि'(र)\frac{तार}{ताह} \quad \cdots\cdots\cdots (३)$$

$$\left\{\text{क्यों कि फि}(\text{र})=\text{स} \quad \therefore \quad \frac{\text{तास}}{\text{ताह}}=\text{फि}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताह}}\right\}$$

(३) समीकरण से,

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}}=\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left\{\text{फ}(\text{र})\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\}=\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left\{\text{फ}(\text{र})\,\text{फि}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताह}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left\{\text{फ}(\text{र})\,\text{फि}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right\}=\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left\{\text{फ}(\text{र})\,\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right\} \text{ (२) समीकरण से,}$$

$$\left\{\text{क्यों कि फ}(\text{र})\cdot\text{फि}'(\text{र})=\text{फा}(\text{र})\right\}$$

इस में (३) का उत्थापन देने से,

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}}=\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,२}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\} \text{ फिर } \frac{\text{ता}^{३}\text{स}}{\text{ताय}^{३}}=\frac{\text{ता}^{२}}{\text{तायताह}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,२}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ता}^{२}}{\text{ताहताय}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,२}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\} \text{ (४१) वें प्रक्रम से,}$$

$$=\frac{\text{ता}^{२}}{\text{ताह}^{२}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,२}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right\} \text{ (२) समीकरण से,}$$

$$=\frac{\text{ता}^{२}}{\text{ताह}^{२}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,३}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\} \text{ (३) समीकरण से,}$$

यहां सामान्यतः मानो कि ३ = न

$$\text{तो } \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}}=\frac{\text{ता}^{\text{न}-१}}{\text{ताह}^{\text{न}-१}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,\text{न}}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\} \text{ इस पर से,}$$

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}}=\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{तायताह}^{\text{न}-१}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,\text{न}}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताह}^{\text{न}-१}\text{ताय}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,\text{न}}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\} \text{ (४१) वें प्रक्रम से,}$$

$$=\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताह}^{\text{न}}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,\text{न}}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right\} \text{ (२) समीकरण से,}$$

$$=\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताह}^{\text{न}}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,\text{न}+१}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\} \text{ (३) समीकरण से,}$$

इस पर से न+१ संख्यक अर्थात् चौथा सम्बन्ध निकलेगा फिर चार के जगह न का उत्थापन देने से पांचवां सम्बन्ध निकलेगा यों चाहो जौन सा सम्बन्ध निकाल सकते हो ।

अब (१) समीकरण में

यदि $य = 0$ तो $र = ह \;\therefore\; फि(र) = फि(ह) = स_0$

इस लिये $\dfrac{तास_0}{ताह} = \dfrac{ताफि(ह)}{ताह} = फि'(ह)$

इस का उत्थापन (३) समीकरण में देने से,

$$\frac{तास_0}{ताय} = फ(ह)\cdot फि'(ह)$$

फिर $\dfrac{ता^{न+1}स}{ताय^{न+1}} = \dfrac{ता^{न}}{ताह^{न}}\left\{\overline{फ(र)}|^{न+1}\,\dfrac{तास}{ताह}\right\}$ इस समीकरण से,

य को शून्य और न को एक मानने से,

$$\frac{ता^2स_0}{ताय^2} = \frac{ता}{ताह}\left\{\overline{फ(ह)}|^2\, फि'(ह)\right\} \text{ इत्यादि}$$

इन सब का म्याक्लरिन् के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$फि(र) = फि(ह) + य\cdot फ(ह)\cdot फि'(ह) + \frac{य^2}{२}\cdot\frac{ता}{ताह}\left\{\overline{फ(ह)}|^2\, फि'(ह)\right\}$$

$$+ \frac{य^3}{\underline{|३}}\;\frac{ता^2}{ताह^2}\left\{\overline{फ(ह)}|^3\, फि'(ह)\right\} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{य^{न}}{\underline{|न}}\;\frac{ता^{न-1}}{ताह^{न-1}}\left\{\overline{फ(ह)}|^{न}\, फि'(ह)\right\} + \cdots$$

इसे ल्याग्रांज (Lagrange) का सिद्धान्त कहते हैं ।
क्यों कि ल्याग्रांज साहब ने इसे पहले पहल प्रकाश किया है ।

४६ । मानो कि $र = फा\{ह + यफ(र)\}$ इस में $फि(र)$ का मान य के घातवृद्धि में लाना है,

कल्पना करो कि $फा = फा\{ह + यफ(र)\}$

और $ह + यफ(र) = ट$ तो $र = फा$ $\therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{ताफा}{ताट} \cdot \frac{ताट}{ताय}$

परन्तु $\frac{ताट}{ताय} = फ(र) + यफ'(र)\frac{तार}{ताय}$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{ताफा}{ताट}\left\{फ(र) + यफ'(र)\frac{तार}{ताय}\right\}$

समशोधनादि से,

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{फ(र)\cdot\frac{ताफा}{ताट}}{1 - यफ'(र)\cdot\frac{ताफा}{ताट}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (अ)$$

और इसी युक्ति से ह को चल मानने से,

$$\frac{तार}{ताह} = \frac{ताफा}{ताट}\cdot\frac{ताट}{ताह} = \frac{ताफा}{ताट}\left\{1 + य\cdot फ'(र)\frac{तार}{ताह}\right\}$$

$$\therefore \frac{तार}{ताह} = \frac{\frac{ताफा}{ताट}}{1 - य\cdot फ'(र)\frac{ताफा}{ताट}}$$

इस का (अ) समीकरण में उत्थापन देने से,

$\frac{तार}{ताय} = फ(र)\frac{तार}{ताह}$ इसे $\frac{तास}{तार}$ इस से गुण देने से,

$\frac{तास}{ताय} = फ(र)\frac{तास}{ताह}$ अब इस पर से (४४) प्रक्रम की युक्ति से,

$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}} = \frac{ता^{न-1}}{ताह^{न-1}}\left\{\overline{फ(र)}|^{न}\frac{तास}{ताह}\right\}$ जहां $स = फि(र)$

अब यदि $र = फा\{ह + य\cdot फ(र)\}$ इस समीकरण में

$य = 0$ तो $र = फा(ह)$

$फ(र) = फ\{फा(ह)\}$

इस पर से न+१ संख्यक अर्थात् चौथा सम्बन्ध निकलै गा फिर चार के जगह न का उत्थापन देने से पांचवां सम्बन्ध निकलै गा यों चाहो जौन सा सम्बन्ध निकाल सकते हो ।

अब (१) समीकरण में

यदि $\text{य} = 0$ तो $\text{र} = \text{ह}$ $\therefore$ $\text{फि}(\text{र}) = \text{फि}(\text{ह}) = \text{स}_0$

इस लिये $\dfrac{\text{तास}_0}{\text{ताह}} = \dfrac{\text{ताफि}(\text{ह})}{\text{ताह}} = \text{फि}'(\text{ह})$

इस का उत्थापन (३) समीकरण में देने से,

$$\frac{\text{तास}_0}{\text{ताय}} = \text{फ}(\text{ह}) \cdot \text{फि}'(\text{ह})$$

फिर $\dfrac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}} = \dfrac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताह}^{\text{न}}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})}^{\,\text{न}+१}\dfrac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\}$ इस समीकरण से,

य को शून्य और न को एक मानने से,

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}_0}{\text{ताय}^{२}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{ह})}^{\,२}\ \text{फि}'(\text{ह})\right\} \text{ इत्यादि}$$

इन सब का म्याक्लरिन् के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$\text{फि}(\text{र}) = \text{फि}(\text{ह}) + \text{य}\cdot\text{फ}(\text{ह})\cdot\text{फि}'(\text{ह}) + \frac{\text{य}^{२}}{२}\cdot\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{ह})}^{\,२}\ \text{फि}'(\text{ह})\right\}$$
$$+ \frac{\text{य}^{३}}{\underline{|३}}\ \frac{\text{ता}^{२}}{\text{ताह}^{२}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{ह})}^{\,३}\ \text{फि}'(\text{ह})\right\} + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\text{य}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\ \frac{\text{ता}^{\text{न}-१}}{\text{ताह}^{\text{न}-१}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{ह})}^{\,\text{न}}\ \text{फि}'(\text{ह})\right\} + \cdots$$

इसे ल्याग्रांज (Lagrange) का सिद्धान्त कहते हैं । क्यों कि ल्याग्रांज साहब ने इसे पहले पहल प्रकाश किया है ।

४६ । मानो कि $\text{र} = \text{फा}\{\text{ह} + \text{यफ}(\text{र})\}$ इस में फि (र) का मान य के घातवृद्धि में लाना है,

कल्पना करो कि $\text{फा} = \text{फा}\{\text{ह} + \text{यफ}(\text{र})\}$

और ह + यफ (र) = ट तो र = फा $\therefore\ \frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{य}} = \frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}} \cdot \frac{\text{ता}\,\text{ट}}{\text{ता}\,\text{य}}$

परन्तु $\frac{\text{ता}\,\text{ट}}{\text{ता}\,\text{य}} = \text{फ}(\text{र}) + \text{य}\text{फ}'(\text{र})\,\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{य}}$

इस लिये $\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{य}} = \frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}} \left\{ \text{फ}(\text{र}) + \text{य}\text{फ}'(\text{र})\,\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{य}} \right\}$

समशोधनादि से,

$$\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{य}} = \frac{\text{फ}(\text{र}) \cdot \frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}}}{1 - \text{य}\text{फ}'(\text{र}) \cdot \frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{अ})$$

और इसी युक्ति से ह को चल मानने से,

$$\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{ह}} = \frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}} \cdot \frac{\text{ता}\,\text{ट}}{\text{ता}\,\text{ह}} = \frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}} \left\{ 1 + \text{य} \cdot \text{फ}'(\text{र})\,\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{ह}} \right\}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{ह}} = \frac{\frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}}}{1 - \text{य} \cdot \text{फ}'(\text{र})\,\frac{\text{ता}\,\text{फा}}{\text{ता}\,\text{ट}}}$$

इस का (अ) समीकरण में उत्थापन देने से,

$\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{य}} = \text{फ}(\text{र})\,\frac{\text{ता}\,\text{र}}{\text{ता}\,\text{ह}}$ इसे $\frac{\text{ता}\,\text{स}}{\text{ता}\,\text{र}}$ इस से गुण देने से,

$\frac{\text{ता}\,\text{स}}{\text{ता}\,\text{य}} = \text{फ}(\text{र})\,\frac{\text{ता}\,\text{स}}{\text{ता}\,\text{ह}}$ अब इस पर से (४४) प्रक्रम की युक्ति से,

$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ता}\,\text{य}^{\text{न}}} = \frac{\text{ता}^{\text{न}-1}}{\text{ता}\,\text{ह}^{\text{न}-1}} \left\{ \overline{\text{फ}(\text{र})|}^{\,\text{न}}\,\frac{\text{ता}\,\text{स}}{\text{ता}\,\text{ह}} \right\}$ जहां स = फि (र)

अब यदि र = फा {ह + य · फ (र)} इस समीकरण में

य = 0 तो र = फा (ह)

फ (र) = फ {फा (ह)}

$$\text{फि}(\text{र}) = \text{फि}\{\text{फा}(\text{ह})\} = \text{स}_0$$

$$\frac{\text{तास}_0}{\text{ताह}} = \frac{\text{ताफि}\{\text{फा}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}$$

और तब म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से,

$$\text{फि}(\text{र}) = \text{फि}\{\text{फा}(\text{ह})\} + \text{य}\cdot\text{फ}\{\text{फा}(\text{ह})\}\frac{\text{ताफि}\{\text{फा}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}$$

$$+\frac{\text{य}^2}{२}\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left[\overline{\text{फ}\{\text{फा}(\text{ह})\}}|^2\frac{\text{ताफि}\{\text{फा}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}\right] + \cdots\cdots$$

$$+\frac{\text{य}^\text{न}}{\underline{|\text{न}}}\frac{\text{ता}^{\text{न}-१}}{\text{ताह}^{\text{न}-१}}\left[\overline{\text{फ}\{\text{फा}(\text{ह})\}}|^\text{न}\frac{\text{ताफि}\{\text{फा}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}\right] + \cdots$$

इसे ल्याप्ल्यास (Laplace) का सिद्धान्त कहते हैं।

४७। यदि ल्याप्ल्यास के सिद्धान्त में फा को उड़ा दो तो ठीक ल्याग्रांज का सिद्धान्त उपपन्न हो जाय गा।

इसी प्रकार यदि $\text{र} = \text{फा}\{\text{ह} + \text{यफ}(\text{र})\} = \text{फा}(\text{र}')\cdots$

ऐसा मानो जहां $\text{ह} + \text{यफ}(\text{र}) = \text{र}'$ तो

(४६) प्रक्रम के आरम्भ के समीकरण का रूप र के स्थान में फा(र') का उत्थापन दे फा को उड़ा देने से,

$\text{र}' = \text{ह} + \text{यफ}\{\text{फा}(\text{र}')\}$ ऐसा होगा।

अब इस पर से ल्याग्रांज के सिद्धान्त के बल से फि(र) या फि{फा(र')} इस का मान ला सकते हो। फ(र) और फि(र) इन के स्थान में केवल फ{फा(र')} और फि{फा(र')} का उत्थापन देना पड़े गा।

ऐसा करने से ल्याप्ल्यास का सिद्धान्त उपपन्न हो जाय गा।

इस तरह से ये दोनों सिद्धान्त परस्पर आश्रित हैं।

परन्तु दोनों का मूल म्याक्लरिन् का सिद्धान्त ही ठहरा।

४८। यदि $\text{य} = \text{अ} + \text{रफ}(\text{य})$ तो ल्याग्रांज के सिद्धान्त से,

$$\text{फि}(\text{य}) = \text{फि}(\text{अ}) + \text{र}\{\text{फ}(\text{य})\,\text{फि}'(\text{य})\} + \frac{\text{र}^2}{\underline{|२}}\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{य})}|^2\,\text{फि}'(\text{य})\right\}$$

$$+\frac{र^3}{\lfloor 3}\frac{ता^2}{ताय^2}\left\{\overline{फ(य)}|^3 फि'(य)\right\}+\cdots\cdots$$

जहां र घात के गुणाङ्कों में तात्कालिकसम्बन्ध लेने के अनन्तर य = अ के करना चाहिये।

ऊपर के समीकरण में यदि र के स्थान में $\frac{य-अ}{फ(य)}$ = फा(य)

इस का उत्थापन दो और $\frac{य-अ}{फा(य)}$ को फ(य) के स्थान में

$$तो\ \ फि(य) = फि(अ) + फा(य)\left\{फि'(य)\frac{य-अ}{फा(य)}\right\}$$

$$+\frac{\{फा(य)\}^2}{\lfloor 2}\frac{ता}{ताय}\left[\frac{फि'(य)(य-अ)^2}{\{फा(य)\}^2}\right]+\cdots$$

यहां भी तात्कालिकसम्बन्ध लेने के अनन्तर य = अ के तुल्य करना अवशिष्ट है। इस लिये फा (य) के घातों के गुणक सब "अ" के फल होंगे।

इस प्रकार से फि(य) के मान की जो श्रेढ़ी उत्पन्न हुई है उसे बरमन् (Burmann) का सिद्धान्त कहते हैं।

४९। यदि स = फि(य) तो $फि^{-1}(स)$ = य

और $फि\{फि^{-1}(स)\}$ = स ऐसा मानो तो य के स्थान में $फा^{-1}(य)$ इस का उत्थापन देने से बरमन् के सिद्धान्त का रूप

$$फि\{फा^{-1}(य)\} = फि(अ) + य\left[\frac{फि'(य)(य-अ)}{फा(य)}\right]$$

$$+\frac{य^2}{\lfloor 2}\frac{ता}{ताय}\left[\frac{फि(य)(य-अ)^2}{\{फा(य)\}^2}\right]$$

$$+\frac{य^3}{\lfloor 3}\cdot\frac{ता^2}{ताय^2}\left[\frac{फि'(य)(य-अ)^3}{\{फा(य)\}^3}\right]+\cdots(1)$$

(१) इस में यदि फि(य) = य तो फि'(य) = १

इस लिये (१) इस समीकरण का रूप,

$$फा^{-1}(य) = अ + य\left[\frac{य-अ}{फा(य)}\right] + \frac{य^2}{\lfloor 2}\frac{ता}{ताय}\left[\frac{(य-अ)^2}{\{फा(य)\}^2}\right]$$

$$+\frac{\text{य}^3}{\underline{|3}}\,\frac{\text{ता}^2}{\text{ताय}^2}\left[\frac{(\text{य}-\text{अ})^3}{\{\text{फा}(\text{य})\}^3}\right]+\cdots$$

यदि $\text{अ}=0$ तो इस समीकरण का रूप

$$\text{फा}^{-1}(\text{य})=\text{य}\left[\frac{\text{य}}{\text{फा}(\text{य})}\right]+\frac{\text{य}^2}{\underline{|2}}\,\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\text{य}^2}{\{\text{फा}(\text{य})\}^2}\right]$$

$$+\frac{\text{य}^3}{\underline{|3}}\cdot\frac{\text{ता}^2}{\text{ताय}^2}\left[\frac{\text{य}^3}{\{\text{फा}(\text{य})\}^3}\right]+\cdots\cdots \quad (\text{२})$$

यहां यदि $\text{य}=\text{र}^2=\text{फा}(\text{र})$ तो $\text{फा}^{-1}\text{य}=\text{र}$ और $\text{फा}(\text{य})=\text{य}^2=\text{र}^4$ तो (२) का रूप

$$\text{र}=\text{र}^2\left(\frac{1}{\text{र}^2}\right)+\frac{\text{र}^4}{\underline{|2}}\cdot\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left(\frac{1}{\text{र}^4}\right)+\frac{\text{र}^6}{\underline{|3}}\cdot\frac{\text{ता}^2}{\text{ताय}^2}\left(\frac{1}{\text{र}^6}\right)+\cdots\cdots$$

ऐसा होगा।

यहां जब $\text{य}=\text{र}^2$ $\therefore$ $\text{ताय}=2\,\text{र}\cdot\text{तार}$ तब ऊपर के समीकरण के रूप का रूपान्तर कर सकते हो। परन्तु ऐसा करने से यहां अनन्त मान आवैगा इस लिये $\text{फा}(\text{य})=\text{य}\,\{\text{फि}(\text{य})+\text{क}\}$ ऐसा होना चाहिये।

देखो (२) इस समीकरण में सर्वदा इस का ध्यान चाहिये कि जब $\text{य}=0$ तो $\text{फा}(\text{य})=0$

५०। यदि $\text{फा}(\text{र})=\text{ह}+\text{यफ}(\text{र})$ तो यहां भी पूर्वविधि से,

$$\text{फा}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{फ}(\text{र})+\text{यफ}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{फ}(\text{र})}{\text{फा}'(\text{र})-\text{यफ}'(\text{र})}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{अ})$$

$$\text{और}\ \text{फा}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताह}}=1+\text{यफ}'(\text{र})\,\frac{\text{तार}}{\text{ताह}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{तार}}{\text{ताह}}=\frac{1}{\text{फा}'(\text{र})-\text{यफ}'(\text{र})}$$

इस का उत्थापन (अ) में देने से $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{फ}(\text{र})\,\dfrac{\text{तार}}{\text{ताह}}$

और $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{फ}(\text{र})\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}$ .... (१)

जहां स = फि(र) अब यहां ठीक पैंतालीसवें प्रक्रम से

$\frac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}} = \frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताह}^{\text{न}}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{र})}|^{\text{न}+१}\frac{\text{तास}}{\text{ताह}}\right\}$ यह सिद्ध हो जाय गा।

और यदि $\text{फा}(\text{र}) = \text{ह} + \text{यफ}(\text{र})$ इस समीकरण में $\text{य} = 0$ तो $\text{फा}(\text{र}) = \text{ह}$ $\therefore$ $\text{र} = \text{फा}^{-१}(\text{ह})$ और $\text{फि}(\text{र}) = \text{फि}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}$ और $\text{फ}(\text{र}) = \text{फ}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}$ ये सब सिद्ध हो जायं गे।

$$\text{तब}\ \text{फि}(\text{र}) = \text{फि}\left[\text{फा}^{-१}(\text{ह})\right]$$
$$+\,\text{यफ}\left[\text{फा}^{-१}(\text{ह})\right]\left[\text{फि}'\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}\right]$$
$$+\,\frac{\text{य}^२}{\lfloor २}\,\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left[\overline{\text{फ}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})}|^२\,\text{फि}'\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\right] + \cdots$$

इसे हम नया सिद्धान्त कह सकते हैं और इस में यदि $\text{फा}^{-१}$ को उड़ा दो तो ल्याग्रांज का सिद्धान्त उपपन्न हो जाय गा

और जब, $\text{फा}(\text{र}) = \text{ह} + \text{यफ}(\text{र})$ तो $\text{र} = \text{फा}^{-१}\{\text{ह} + \text{यफ}(\text{र})\} = \text{फी}\{\text{ह} + \text{यफ}(\text{र})\}$ ऐसा कल्पना कर सकते हैं फिर इस पर से ल्याप्ल्यास का सिद्धान्त भी उपपन्न हो सकता है।

५१। इस प्रक्रम में सब सिद्धान्तों को स्मरणार्थ एकट्ठा लिख देते हैं और उन का अच्छी भांति बोध होने के लिये कुछ उदाहरण भी दिखाते हैं।

नया सिद्धान्त।

$$\text{फि}(\text{र}) = \text{फि}\left[\text{फा}^{-१}(\text{ह})\right] + \text{यफ}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}\,\frac{\text{ताफि}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}$$
$$+\,\frac{\text{य}^२}{\lfloor २}\,\frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left[\overline{\text{फ}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}}|^२\,\frac{\text{ताफि}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}\right]$$
$$+\,\frac{\text{य}^३}{\lfloor ३}\,\frac{\text{ता}^२}{\text{ताह}^२}\left[\overline{\text{फ}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}}|^३\,\frac{\text{ताफि}\{\text{फा}^{-१}(\text{ह})\}}{\text{ताह}}\right] + \cdots$$

ऐसा होगा । इस में यदि न के स्थान में $-$ न का उत्थापन दो

तो $\left(\frac{१-\sqrt{१-४त}}{२त}\right)^{-न} = \left(\frac{२त}{१-\sqrt{१-४त}}\right)^{न} = \left(\frac{१+\sqrt{१-४त}}{२}\right)^{न}$

$$= १ - नत + \frac{न(न-३)}{१\cdot२}त^{२} - \frac{न(न-४)(न-५)}{१\cdot२\cdot३}त^{३} + \cdots$$

इस प्रकार से यहां अनेक चमत्कार दिखा सकते हो । परन्तु सर्वत्र न को धन और अभिन्न समझने से सुख से अनेक रूप बना सकते हो ।

$र = \frac{य}{२} + य\cdot\frac{र^{२}}{२}$ इस में यदि फि$(र)$ = लार इस का मान ले आना हो तो फि$'(र) = \frac{१}{र}$ इस का इसी उदाहरण के (१) समीकरण में उत्थापन देने से,

$$\frac{ता^{म-१}}{ताह^{म-१}}\left\{\overline{फ(ह)}\Big|^{म} फि'(ह)\right\} = \frac{१}{२^{म}}\,\frac{ता^{म-१}}{ताह^{म-१}}(ह^{२म-१})$$

यह होगा फिर इस पर से

$$लार = ला\frac{य}{२} + \left(\frac{य}{२}\right)^{२} + \frac{३}{२}\left(\frac{य}{२}\right)^{४} + \frac{४\cdot५}{२\cdot३}\left(\frac{य}{२}\right)^{६} + \frac{५\cdot६\cdot७}{२\cdot३\cdot४}\left(\frac{य}{२}\right)^{८} + \cdots$$

इस में पक्षान्तरनयन से,

$$लार - ला\frac{य}{२} = ला\left(\frac{र}{\frac{य}{२}}\right) = ला\left(\frac{१-\sqrt{१-य^{२}}}{\frac{य^{२}}{२}}\right) = ला\left(\frac{१-\sqrt{१-४त}}{२त}\right)$$

$$= त + \frac{३}{२}त^{२} + \frac{४\cdot५}{२\cdot३}त^{३} + \frac{५\cdot६\cdot७}{२\cdot३\cdot४}त^{४} + \frac{६\cdot७\cdot८\cdot९}{२\cdot३\cdot४\cdot५}त^{५} + \cdots$$

ऐसा होगा ।

यहां भी $\left(\frac{य}{२}\right)^{२} = त$ ।

(४) $य = र\cdot इ^{र} - ह\cdot इ^{र}$ इस में ज्या$(अ+र)$ का मान य के घातवृद्धि में ले आना है

यहां जब $य = रइ^{र} - हइ^{र}$ $\therefore$ $\frac{य}{इ^{र}} = य\cdot इ^{-र} = र - ह$

और $र = ह + य \cdot इ^{-र}$ ...... (१)

फिर (१) इस से, $फ(र) = इ^{-र}$ और $फि(र) = ज्या(अ + र)$

$\therefore फि'(र) = कोज्या(अ + र)$ इन का उत्थापन ल्याग्रांज के सिद्धान्त में देने से

$$\frac{य^न}{\underline{|न}} \frac{ता^{न-१}}{ताह^{न-१}} \left\{ इ^{-नह} कोज्या(अ + ह) \right\}$$

परन्तु यदि $स_१ = इ^{-नह} कोज्या(अ + ह)$

तो $\frac{तास_१}{ताह} = - इ^{-नह} \left\{ ज्या(अ + ह) + नकोज्या(अ + ह) \right\}$

इस में यदि $न = म \cdot कोज्याप,\ १ = मज्याप$

ऐसा कि $म = (न^२ + १)^{\frac{१}{२}}$ और कोस्पप $= न$

तो $\frac{तास_१}{ताह} = - मइ^{-नह} कोज्या\left\{ अ + ह - प \right\}$ देखो इस में प और म दोनों स्थिराङ्क हैं फिर इस पर से

$$\frac{ता^२स_१}{ताह^२} = + मइ^{-नह} \left\{ ज्या(अ + ह - प) + नकोज्या(अ + ह - प) \right\}$$

$= + म^२इ^{-नह} कोज्या(अ + ह - २प)$ ऊपर की युक्ति से

इसी प्रकार से

$$\frac{ता^{न-१}स_१}{ताह^{न-१}} = (-१)^{न-१}(१ + न^२)^{\frac{न-१}{२}} इ^{-नह} कोज्या\left\{ अ + ह - (न-१)प \right\}$$

ऐसा सिद्ध हो जाय गा।

तब ल्याग्रांज के सिद्धान्त से,

$$ज्या(अ + र) = ज्या(अ + ह) + य \cdot इ^{-ह} कोज्या(अ + ह) + \cdots$$
$$+ \frac{य^न}{\underline{|न}} (-१)^{न-१}(१ + न^२)^{\frac{न-१}{२}} इ^{-नह} कोज्या\left\{ अ + ह - (न - १)प \right\} + \cdots\cdots\cdots$$

इस में ह का मान भिन्न भिन्न मानने से अनेक रूप बना सकते हो।

(५) $य = अ \cdot र + क \cdot र^२ + ख \cdot र^३ + ग \cdot र^४ + \cdots$ यहां र का मान य के घातवृद्धि में ले आना है।

यहां समीकरण से,

$$र = \frac{य}{अ} - \frac{क}{अ}\left(र^२ + \frac{खर^३}{क} + \frac{गर^४}{क} + \cdots\right)$$

अब ल्याग्रांज के सिद्धान्त में मानो कि

$$\frac{य}{अ} = ह । -\frac{क}{अ} = य,\ फ(र) = र^२ + \frac{खर^३}{क} + \cdots \text{ और } फि(र) = र$$

$$\text{तो } र = \frac{य}{अ} - \frac{कय^२}{अ^३} + \frac{२क^२ - अख}{अ^५}य^३ - \frac{५क^३ - ५अकख + अ^२ग}{अ^७}य^४ + \cdots$$

ऐसा होगा ।

यह उदाहरण श्रेढी के उलटने में बहुत ही उपयोगी है इस लिये इसे एक प्रकार का सूत्र ही समझना चाहिये ।

(६) यदि $र^३ - अर + क = ०$ तो $र = \frac{क}{अ} + \frac{१}{अ}\cdot र^३$

अब यहां यदि $\frac{क}{अ} = ह ।\ \frac{१}{अ} = य$

$फ(र) = र^३$ और $फि(र) = र^न$ मानो तो ल्याग्रांज के सिद्धान्त से

$$र^न = \frac{क^न}{अ^न}\left\{१ + न\frac{क^२}{अ^२}\cdot\frac{१}{अ} + \frac{न(न+५)}{१\cdot२}\cdot\frac{क^४}{अ^४}\cdot\frac{१}{अ^२} + \frac{न(न+७)(न+८)}{१\cdot२\cdot३}\cdot\frac{क^६}{अ^६}\cdot\frac{१}{अ^३} + \cdots\right\}$$

इस प्रकार से अनेक चमत्कृत उदाहरण होते हैं ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $र = ४ + \frac{१}{३२}(र^३ + र^२)$ इस में र का मान श्रेढ़ी में कैसा होगा? ।

(२) $र = ह + य\cdot र^{ज्यार}$ इस में र के स्पर्श रेखा का मान य के घातवृद्धि में लावो? ।

$$\text{उत्तर } स्पर = स्पह + य\cdot छे^२ह\cdot ह^{ज्याह}$$

$$+ \frac{य^२}{२}ह^{२ज्याह}छे^२ह\left(२स्पह + २कोज्याहलाह + \frac{२ज्याह}{ह}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{य^न}{\underline{|न}}\frac{ता^{न-१}}{ताह^{न-१}}\left(ह^{नज्याह}छे^२ह\right) ।$$

(३) र = ला(ह + य · स्पर) इस में र के न घात का मान य के घातवृद्धि में ले आवो? ।

$$\text{उत्तर}\quad र^{न} = ला^{न}ह + य \cdot स्पलाह\left(\frac{नला^{न-१}ह}{ह}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{य^{म}}{\underline{|म}}\, \frac{ता^{म-१}}{ताह^{म-१}}\left\{स्प^{म}लाह\left(\frac{नला^{न-१}ह}{ह}\right)\right\} \text{ ।}$$

(४) र = ज्या(ह + य · स्पर) इस में ज्या⁻¹र इस का मान य के घातवृद्धि में ले आवो? ।

$$\text{उत्तर}\quad ज्या^{-१}र = ह + य \cdot स्प(ज्याह) + \cdots$$

$$+ \frac{य^{न}}{\underline{|न}}\, \frac{ता^{न-१}}{ताह^{न-१}}\left\{स्प^{न}(ज्याह)\right\} \text{ ।}$$

(५) $र = इ^{\frac{\pi}{४} + यज्यालार}$ इस में छेलार इस का मान य के घातवृद्धि में लावो? ।

$$\text{उत्तर}\quad छेलार = \sqrt{२} + य + \frac{५य^{२}}{२\sqrt{२}} + \frac{८य^{३}}{३} + \cdots \text{ ।}$$

(६) यह सिद्ध करो कि

$$ला\,(२) = \frac{१}{४} + \frac{३}{२}\,\frac{१}{१६} + \frac{४ \cdot ५}{२ \cdot ३} \cdot \frac{१}{६४} + \frac{५ \cdot ६ \cdot ७}{२ \cdot ३ \cdot ४}\,\frac{१}{२५६} + \cdots \text{ ।}$$

(७) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{२^{न}} = १ - \frac{न}{४} + \frac{न(न-३)}{१ \cdot २ \cdot ४^{२}} - \frac{न(न-४)(न-५)}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४^{३}} + \cdots \text{ ।}$$

(८) यर = ह + य · $इ^{यर}$ इस में र का मान य के घातवृद्धि में लावो? ।

$$\text{उत्तर}\quad यर = ह + य \cdot इ^{ह} + \frac{य^{२}}{१} \cdot इ^{२ह} + \frac{य^{३}}{१ \cdot २} \cdot ३ \cdot इ^{३ह} + \cdots$$

$$+ \frac{य^{न}}{\underline{|न-१}}\,(न)^{न-२}इ^{नह} \text{ ।}$$

(९) यदि $र = इ^{\frac{र}{२}}$ तो सिद्ध करो कि

$$र = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४}\,\frac{३}{\underline{|२}} + \cdots \frac{१}{२^{न-१}}\,\frac{न^{न-२}}{\underline{|न-१}} + \cdots ।$$

(१०) $य = ८र + र^{२} + २र^{३} + र^{४} + २र^{५} + र^{६} + २र^{७} + \cdots$ इस श्रेढी को उलटो अर्थात् र का मान य के घात में लावो ? ।

$$उत्तर \quad र = \frac{य}{८} - \frac{य^{२}}{८^{३}} - \frac{१४य^{३}}{८^{५}} + \frac{११य^{४}}{८^{७}} \cdots ।$$

(११) $र^{३} - ४र - १६ = ०$ इस में र का मान एक श्रेढी में लावो ? ।

(१२) एक सुगे को पकड़ने के लिये एक बाझ झपटा परन्तु झपटने के पहले ही सुगा उड़ चला उस समय बाझ ने विचारा कि सुगे की गति के घन से चार हाथ ज्यादे चलूं परन्तु हवा के झकोर के कारण से केवल घन के शतांश से चार हाथ ज्यादे चला और देखने वालों को जान पड़ा कि सुगे की गति के वर्ग के समान बाझ की गति है तो बतावो कि दोनों के गतियों का क्या क्या मान है ? ।

उत्तर सुगे की गति २·०२ हाथ और
बाझ की गति ४·०८०४ हाथ स्वल्पान्तर से ।

इति सप्तमाध्यायसमाप्त ।

अष्टमाध्याय ८ ।

महत्तम और न्यूनतम के विषय में ।

५२ । फ(य) इस का मान जब य के आधीन है तब स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य का मान बदलैगा त्यों त्यों फ(य) का भी मान बदलैगा । इस लिये यदि फ(य) का मान किसी य के मान में ऐसा हो कि य का मान चाहे उस मान से कितना ही बढ़े वा घटै परन्तु फ(य) सर्वदा उस य के मानसम्बन्धी फ(य) से न्यून हो तो ऐसे फ(य) के मान को महत्तममान कहते हैं अर्थात् जब य = अ तो फ(य) = फ(अ) और जब $य = अ \pm च$ तब $फ(य) = फ(अ \pm च)$ अब यहां यदि सर्वदा $फ(अ) > फ(अ \pm च)$ हो, तो फ(अ) को फ(य) का महत्तममान कहते हैं ।

इसी प्रकार जब $य=अ$ तब $फ(य)=फ(अ)$ और जब $य=अ\pm च$ तब $फ(य)=फ(अ\pm च)$ अब यहां यदि सर्वदा, $फ(अ) \angle फ(अ\pm च)$ तो $फ(अ)$ को $फ(य)$ का न्यूनतममान कहते हैं।

५३। ये महत्तम और न्यूनतममान दो प्रकार के होते हैं एक लौकिक और दूसरा शास्त्रीय।

जैसे यदि $फ(य)=\frac{१}{१-य^२}$ इस में स्पष्ट है कि यदि $य=०$

तो $फ(य)$ का न्यूनतममान १ के समान होगा। ऐसे न्यूनतममान को लौकिक न्यूनतममान कहते हैं।

देखो यदि इसी समीकरण में $य=\sqrt{-१}$, $य=\sqrt{-२}$, $य=\sqrt{-३}$ इत्यादि के हो तो $फ(य)=\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}$, इत्यादि होगा इस लिये यहां $फ(य)$ का मान एक के अपेक्षा दूसरा न्यून है परन्तु न्यूनतम कोई नहीं है इस लिये यहां य के *विशेषशास्त्रीयमान $\sqrt{-१}$, $\sqrt{-२}$, $\sqrt{-३}$ इत्यादि में यही सिद्ध होता है कि $फ(य)$ का न्यूनतममान कोई नहीं है इस लिये विशेषशास्त्रीयमान के विधान से $फ(य)$ का मान न कभी महत्तम हो सकता न न्यूनतम।

इसी प्रकार यदि $फ(य)=(य-१)^४(य+२)^३$ तो लौकिक दृष्टि से यहां स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों एक के ऊपर य का मान बढ़ता जाय गा त्यों त्यों $फ(य)$ का भी मान बढ़ता जाय गा इस लिये यहां $फ(य)$ का महत्तममान कोई न हो गा परन्तु जब शास्त्रीयविधि से सिद्ध है कि ऋणसंख्या अनन्त से भी बड़ी होती है इस लिये यहां यदि $य=-\frac{१}{७}$ माना जाय तो $फ(य)$ का मान महत्तम हो गा। यहां ऐसे महत्तममान को शास्त्रीयमहत्तममान कहते हैं।

यद्यपि ऐसे ऐसे स्थानों में शास्त्रीय और लौकिक महत्तम और न्यूनतम में भेद है तथापि प्रायः शास्त्रीय और लौकिक महत्तम और न्यूनतम मान एक ही होते हैं।

---

* विशेषशास्त्रीयमान असम्भवसंख्या को कहते हैं और ऋणसंख्या को शास्त्रीमान कहते हैं।

५४ । शास्त्रीयमहत्तम और न्यूनतममान जानने के लिये रीति । मानो कि फ(य) का मान जब य=अ तो महत्तम होता है और उस समय में फ(य) का य के रूपतुल्य चलन में चाल वा तात्कालिकसम्बन्ध फ'(य) इस के वा $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ इस के तुल्य है यहां स=फ(य) अब यहां स्पष्ट है कि जब स का मान महत्तम है तो य का मान अ मान से बढ़ावो वा घटावो स का मान पूर्व स मान के अपेक्षा न्यून ही हो गा मानो कि ताय इतना "य" अ के मान से आगे वा पीछे बढ़ा इस लिये उस समय में स की गति क्रम से + तास, − तास होगी । अर्थात् स आगे बढ़ता है और पीछे घटता है यदि (तास) यह धनात्मक हो और यदि (तास) यह ऋणात्मक हो तो स आगे घटे गा पीछे बढ़े गा परन्तु जब स का मान महत्तम है तब स्पष्ट है कि य की सीधी वा उलटी दोनों गतियों में स का मान पूर्व स मान के अपेक्षा न्यून ही होना चाहिये परन्तु दोनों य की गतियों में तभी स का मान घट सकता है जब $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = 0$ वा $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{1}{0}$ । इसी प्रकार जब स का मान न्यूनतम हो तो य की दोनों गतियों में स का मान बढ़ना चाहिये इस लिये वहां भी $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = 0$ वा, $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{1}{0}$ ऐसा होगा ।

इस से यह सिद्ध होता है कि जब तात्कालिकसम्बन्ध शून्य वा अनन्त के समान हो उस समय में य के फल का मान महत्तम वा न्यूनतम होगा ।

५५ । जब फ(य) का गत्यन्तर वा द्वितीय तात्कालिकसम्बन्ध ऋणात्मक हो तो स्पष्ट है कि अगाड़ी वा पिछाड़ी दोनों ओर फ(य) घटे गा क्यों कि + ताय और − ताय दोनों में $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ इस का मान एक ही रहे गा इस लिये उस समय में फ(य) का मान महत्तम होगा । इसी प्रकार जब $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ इस का मान धन हो तो उस समय में फ(य) का

मान न्यूनतम हो गा। परन्तु यदि उस समय में $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ यह भी शून्य हो तो गत्यन्तर आगे वा पीछे घटता है वा बढ़ता है अर्थात् ऋणात्मक है वा धनात्मक इस का ज्ञान गत्यन्तरान्तर वा तीसरे तात्कालिक-सम्बन्ध के आधीन है परन्तु + ताय और − ताय में तीसरा सम्बन्ध क्रम से $+\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3}, -\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3}$ ये हों गे इस लिये जब तक $\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3}$ शून्य के वा अनन्त के समान न हो गा तब तक कभीं आगे और पीछे एक चाल का गत्यन्तर न होगा इस लिये महत्तम और न्यूनतम मान में जब दूसरा सम्बन्ध शून्य तब तीसरा सम्बन्ध शून्य वा अनन्त होगा और यदि तीसरा सम्बन्ध शून्य के तुल्य न हो तो न्यूनतम और महत्तम दोनों में से एक भी न होगा।

यदि तीसरा सम्बन्ध शून्य वा अनन्त हो तो चौथे सम्बन्ध से फ (य) का मान महत्तम है वा न्यूनतम इस का ज्ञान इसी प्रक्रम की प्रथम युक्ति से हो जाय गा।

५६। यदि चौथा सम्बन्ध भी शून्य हो तो ऊपर की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि पांचवां सम्बन्ध जब तक शून्य वा अनन्त न होगा तब तक महत्तम वा न्यूनतम मान न होगा। इसी प्रकार से आगे भी सब सिद्ध कर सकते हो। हमारे यहां भास्कराचार्य जी ने भी अपने गोलाध्याय में "कक्षामध्यगतिर्यग्रेखाप्रतिवृत्तसम्पाते। मध्यैव गतिः स्पष्टा परं फलं तत्र खेटस्य" इस श्लोक की व्याख्या में लिखा है कि जब गति-फल अर्थात् फल की गति शून्य होती है तभीं परमफल होता है।

५७। महत्तम वा न्यूनतम मान में जो विषमसम्बन्ध शून्य के तुल्य दिखलाया है उसे टेलर के सिद्धान्त से भी सिद्ध कर सकते हो।

जैसे मानो कि फ (य) वा स का मान महत्तम वा न्यूनतम होता है जब य = अ, तो टेलर के सिद्धान्त से,

$$\text{फ}(\text{अ}+\text{च}) = \text{फ}(\text{अ}) + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{च} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\cdot\frac{\text{च}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3}\frac{\text{च}^3}{\lfloor 3} + \cdots$$

$$\text{फ}(\text{अ}+\text{च}) - \text{फ}(\text{अ}) = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{च} + \frac{\text{च}^2}{\lfloor 2}\text{फ}''(\text{य}+\text{षच}) = \text{स}_1$$

इसी प्रकार

$$\text{फ}(\text{अ}-\text{च})-\text{फ}(\text{अ}) = -\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{च}+\frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{य}-\text{प}_1\text{च}) = \text{स}_2$$

यहां समझेा कि दहने पक्ष में य के स्थान में अ का उत्थापन देना बाक़ी है और $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ इत्यादि अनन्त के तुल्य नहीं हैं।

देखेा ऊपर स_1 और स_2 के जेा मान सिद्ध हुए हैं ये कभीं एक चाल के नहीं हेा सकते जब तक $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ यह शून्य के समान न हेा गा क्यों कि च का मान अल्प मानने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{च} > \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{य}+\text{पच}) \text{ और } \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{च} > \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{य}-\text{प}_1\text{च})$$

हेा सकते हैं। इस लिये यदि $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ इस का मान शून्य के समान न हेा तेा स_1 और स_2 इन का मान एक चाल के न हेां गे अर्थात् यदि स_1 धन तेा स_2 ऋण और यदि स_1 ऋण तेा स_2 धन हेा गा इस लिये स का मान आगे पीछे देानेां ओर न घटै गा न बढ़े गा अर्थात् एक ओर घटै गा तेा दूसरे ओर बढ़े गा परन्तु यह बात असम्भव है क्येां कि जब य = अ तेा स का मान महत्तम वा न्यूनतम कल्पना किया है इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ इसे स के महत्तम वा न्यूनतममान में अवश्य शून्य के समान मानना चाहिये

$$\text{तब } \text{स}_1 = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{च}^3}{\underline{|3}}\text{फ}'''(\text{य}+\text{प}_2\text{च})$$

$$\text{और } \text{स}_2 = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}-\frac{\text{च}^3}{\underline{|3}}\text{फ}'''(\text{य}-\text{प}_3\text{च}) \text{ ऐसा हेागा।}$$

$$\text{यहां भी } \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\frac{\text{च}^2}{\underline{|2}} > \frac{\text{च}^3}{\underline{|3}}\text{फ}'''(\text{य}+\text{प}_2\text{च})$$

$$\text{और } \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\frac{\text{च}^2}{\underline{|2}} > \frac{\text{च}^3}{\underline{|3}}\text{फ}'''(\text{य}-\text{प}_3\text{च})$$ "च" के अल्प मानने से

हो सकता है। इस लिये यदि $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ इस का मान धन होगा तो स का मान आगे पीछे दोनों ओर बढ़े गा इस लिये उस समय में स का मान न्यूनतम होगा और यदि $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ ऋण होगा तो दोनों ओर स का मान घटे गा इस लिये उस समय में स का महत्तममान होगा।

यदि $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$ यह भी पूर्व समीकरणों में शून्य के समान हो यदि य = अ तो ऊपर की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि जब तक $\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3}$ शून्य के समान न होगा तब तक स_1 और स_2 कभीं नहीं एक चिह्नात्मक हो सकते। इसी प्रकार आगे भी सब सिद्ध कर सकते हो।

५८। एक ही य के फल में कई एक य के मान में भी महत्तम और न्यूनतम मान हो सकते हैं, जैसे यदि फ(य) = ज्याय तो पहले जब य = 0 तो ज्याय = 0 यह न्यूनतममान हुआ।

यदि $\text{य} = \frac{\pi}{2}$ तो ज्याय = १ यह महत्तममान हुआ।

यदि $\text{य} = \pi$ तो ज्याय = 0 यह भी न्यूनतममान हुआ।

यदि $\text{य} = २\pi$ तो ज्याय = 0 यह भी न्यूनतममान हुआ।

और यदि $\text{य} = \frac{5}{2}\pi$ तो ज्याय = १ यह भी महत्तममान हुआ।

इस प्रकार यहां य के अनेक मान सिद्ध हो सकते हैं।

५९। जिस य के फल में अनेक महत्तम वा न्यूनतममान सिद्ध होते हैं वहां कभीं कभीं सब महत्तम वा न्यूनतममानों का तुलना करने से यह भी जान सकते हो कि सब महत्तम मानों में सब से बड़ा मान कौन है और सब न्यूनतम मानों में सब से छोटा मान कौन है। ऐसे बड़े और छोटे मान को क्रम से महन्महत्तम और महन्न्यूनतम कहते हैं।

जैसे, (१) उदाहरण, $\text{स} = \text{य}(६ - \text{य})^2(१२ - \text{य})^3$ इस में स के न्यूनतम वा महत्तममान में य का मान जानना है तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$

$= \{(६ - य)^{२} - २य(६ - य)\}\{(१२ - य)^{३}\} - ३य(१२ - य)^{२}(६ - य)^{२}$

$= ३(२ - य)(६ - य)(१२ - य)^{३} - ३य(१२ - य)^{२}(६ - य)^{२}$

$= \{(१२ - य)^{२}(६ - य)\}\{३(२ - य)(१२ - य) - ३य(६ - य)\}$

$= (१२ - य)^{२}(६ - य)(७२ - ६० य + ६ य^{२}) = ०$

इस पर से $य = ५ - \sqrt{१३}, = ६, = ५ + \sqrt{१३}, = १२$ यहां

जब $य = ५ - \sqrt{१३}$ तब $\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}$ यह ऋण आता है इस लिये उस समय स का मान महत्तम होगा ।

और जब $य = ६$ तब $\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}$ यह धन आता है इस लिये तब स का न्यूनतममान होगा

इसी प्रकार $य = ५ + \sqrt{१३}$ में भी महत्तम मान होगा

और $य = १२$ इस मान में न महत्तम न न्यूनतम क्यों कि यहां $\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} = ०$ और $\frac{ता^{३}स}{ताय^{३}}$ यह शून्य के तुल्य नहीं होता ।

अब य का उत्थापन देने से दोनों महत्तममान क्रम से,

$(५ - \sqrt{१३})(७ + \sqrt{१३})^{३}(१ + \sqrt{१३})^{२}$ और

$(५ + \sqrt{१३})(७ - \sqrt{१३})^{३}(१ - \sqrt{१३})^{२}$ ये हुए अर्थात्

पहला $= (५ - \sqrt{१३})(७ + \sqrt{१३})^{३}(१४ + २\sqrt{१३})$

$= २(५ - \sqrt{१३})(७ + \sqrt{१३})^{४}$

और दूसरा $= (५ + \sqrt{१३})(७ - \sqrt{१३})^{३}(१४ - २\sqrt{१३})$

$= २(५ + \sqrt{१३})(७ - \sqrt{१३})^{४}$

यहां दोनों मानों को फैलाने से स्पष्ट सिद्ध हो जाय गा कि पहला दूसरे के अपेक्षा बड़ा है इस लिये पहला मान महत्महत्तम हुआ ।

(२) उदाहरण,

जब $स = ३य^{४} - २८ अय^{३} + ८४ अ^{२}य^{२} - ९६ अ^{३} य + ४८ क^{४}$

इस में स के न्यूनतम में य का मान जानना है ।

यहां भी $\frac{तास}{ताय} = १२(य - अ)(य - २अ)(य - ४अ) = ०$

इस पर से $य = अ, = २ अ, = ४ अ$, यहां भी

जब $य = अ$ तो $स = ४८ क^४ - ३७ अ^४$ पहला न्यूनतममान,
और जब $य = ४ अ$ तो $स = ४८ क^४ - ६४ अ^४$ दूसरा न्यूनतममान,
देखो इन दोनों में दूसरा मान छोटा है इस लिये दूसरा महन्न्यूनतम हुआ।

६०। कभीं कभीं चलसंख्या ऐसी होती है कि उस का घटना वा बढ़ना किसी नियतसंख्या के भीतर ही होता है ऐसे स्थल में उस समीकरण का रूप जैसा हो उसे देखने ही से महत्तम वा न्यूनतम मान जाना जाता है क्यों कि पूर्व विधि से ऐसे स्थल में महत्तम वा न्यूनतम मान दोनों नहीं सिद्ध हों गे।

जैसे यदि $स = अ^२ - य^२$ इस में इतना ज्ञात है कि य सर्वदा अ से छोटा है तो समीकरण की स्थिति से $अ^२ - य^२$ इस का न्यूनतम मान जब $य = अ$ के तो शून्य के समान होगा परन्तु पूर्व विधि से इस का न्यूनतम मान हो ही नहीं सकता क्यों कि

$\frac{तास}{ताय} = -२य$ इस में य के स्थान में अ का उत्थापन देने से

$\frac{तास}{ताय} = -२अ$ यह शून्य के तुल्य नहीं है इस लिये न्यूनतममान नहीं हो गा परन्तु जब $\frac{तास}{ताय} = -२य \therefore \frac{ता^२स}{ताय^२} = -२$

और जब $\frac{तास}{ताय} = 0 \therefore य = 0$ इस पर से यही सिद्ध होता है कि जब $य = 0$ तो $अ^२ - य^२$ इस का महत्तम मान $अ^२$ के तुल्य हो गा पर न्यूनतम मान कोई न होगा।

पूर्व समीकरण के रूप से जो न्यूनतममान शून्य के समान सिद्ध हुआ है उसे कल्पित न्यूनतम मान कहते हैं। इसी प्रकार से कल्पित महत्तम मान भी होता है।

६१। यदि $रय^२ - ५रय + ५ = 0$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि "य", "र" का फल हो गा और "र", "य" का फल होगा। इस लिये यदि यहां र का महत्तम वा न्यूनतम मान जानना हो तो $\frac{तार}{ताय}$ इसे शून्य

के समान कर य का मान निकल सकता है फिर $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ इस पर से न्यूनतम वा महत्तम का भी ज्ञान हो जाय गा ।

जैसे इसी समीकरण में अर्थात् $\text{रय}^2 - ५\text{रय} + ५ = ०$

$$\text{य}^2 \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + २\text{यर} - ५\text{य}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - ५\text{र} = ० \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

इस में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इस के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$२\text{यर} = ५\text{र} \quad \therefore \quad \text{य} = \frac{५}{२}$ और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{५\text{र} - २\text{यर}}{\text{य}^2 - ५\text{य}}$, (१) समीकरण से,

$$\text{तब } \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \frac{\left(५\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - २\text{य}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - २\text{र}\right)(\text{य}^2 - ५\text{य}) - (२\text{य} - ५)(५\text{र} - २\text{यर})}{(\text{य}^2 - ५\text{य})^2}$$

और जब $\text{य} = \frac{५}{२}$ तो $\text{र}\left(\frac{२५}{४}\right) - \frac{२५}{२}\cdot\text{र} + ५ = ०$

ऊपर के समीकरण से

$\therefore \ \text{र} = \frac{४\cdot५}{२५} = \frac{४}{५}$ इन का उत्थापन $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ में देने से,

$$\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \frac{\left(५\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - २\text{य}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - २\text{र}\right)(\text{य}^2 - ५\text{य}) - (२\text{य} - ५)(५\text{र} - २\text{यर})}{(\text{य}^2 - ५\text{य})^2}$$

$$= \frac{-२\text{र}(\text{य}^2 - ५\text{य}) - (२\text{य} - ५)(५\text{र} - २\text{यर})}{(\text{य}^2 - ५\text{य})^2}.$$

$$= \frac{-\frac{८}{५}\left(\frac{२५}{४} - \frac{२५}{२}\right) - (५ - ५)(४ - ४)}{\left(\frac{२५}{४} - \frac{२५}{२}\right)^2}$$

$= \frac{\frac{८}{५} \times \frac{२५}{४}}{\frac{२५}{४} \times \frac{२५}{४}} = \frac{\frac{८}{५}}{\frac{२५}{४}} = \frac{३२}{१२५}$ इस लिये $\frac{४}{५}$ र का न्यूनतम मान हुआ ।

जब र · $य^2 - ५ रय + ५ = ०$ तो $र = \frac{-५}{य^2 - ५य} = \frac{५}{५य - य^2}$

$\therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{५(-५+२य)}{(५य - य^2)^2} = ०$ इस पर से $य = \frac{५}{२}$ और $र = \frac{४}{५}$

इस प्रकार से भी यहां न्यूनतम मान निकल सकता है।

(२) उदाहरण $र^2 + ५यर - य^2 - र = ० \text{ .... } (१)$

इस में र का न्यूनतम वा महत्तम मान जानना है तो यहां भी

$$२र \cdot \frac{तार}{ताय} + ५य \cdot \frac{तार}{ताय} + ५र - २य - \frac{तार}{ताय} = ० \text{ .... } (२)$$

परन्तु जब र न्यूनतम वा महत्तम है तो $\frac{तार}{ताय} = ०$

इस लिये, $५र - २य = ० \quad \therefore \quad र = \frac{२य}{५}$

इस का पहले समीकरण में उत्थापन देने से,

$$\frac{४य^2}{२५} + २य^2 - य^2 - \frac{२य}{५} = ०,$$

वा, $\frac{२९य^2}{२५} - \frac{२य}{५} = ० \quad \therefore \quad य = \frac{१०}{२९}$ तब $र = \frac{४}{२९}$

और दूसरे समीकरण से, $\frac{तार}{ताय} = \frac{२य - ५र}{५य + २र - १}$

$$\therefore \frac{ता^2र}{ताय^2} = \frac{२ - ५\frac{तार}{ताय}}{५य + २र - १} - \frac{\left(५ + २\frac{तार}{ताय}\right)(२य - ५र)}{(५य + २र - १)^2}$$

$$= \frac{२}{\frac{५०}{२९} + \frac{८}{२९} - १} - \frac{५\left(\frac{२०}{२९} - \frac{२०}{२९}\right)}{\left(\frac{५०}{२९} + \frac{८}{२९} - १\right)^2} = २$$

इस लिये पूर्व युक्ति से र का न्यूनतम मान सिद्ध हुआ।

९२। इसी प्रकार यदि फ(य, र, ल) = ०, फा(य, र, ल) = ० ऐसा समीकरण हो तो स्पष्ट है कि य, र और ल इन तीनों में कोई

दो तीसरे का फल होगा इस लिये यहां भी परस्पर समीकरण से और (६१) वें प्रक्रम की युक्ति से किसी एक का महत्तम वा न्यूनतम मान निकाल सकते हो।

जैसे, यदि $य^3 + र^3 + ल^3 - ३०५ = 0$ .... (१)

$य^2 + र^2 + ल^2 - ७५ = 0$ .... (२)

इस में ल का महत्तम वा न्यूनतम मान जानना हो तो

$$\left.\begin{array}{l} \text{यहां } ३य^2 + ३र^2 \dfrac{तार}{ताय} + ३ल^2 \cdot \dfrac{ताल}{ताय} = 0 \text{ पहले से,} \\ \text{और } \quad २य + २र \dfrac{तार}{ताय} + २ल \cdot \dfrac{ताल}{ताय} = 0 \text{ दूसरे से} \end{array}\right\} \cdots (३)$$

परन्तु ल महत्तम वा न्यूनतम है इस लिये $\dfrac{ताल}{ताय} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{तब, (३ में पहले का रूप } ३य^2 + ३र^2 \dfrac{तार}{ताय} = 0 \therefore \dfrac{तार}{ताय} = -\dfrac{य^2}{र^2} \\ \text{और दूसरे का रूप } २य + २र \dfrac{तार}{ताय} = 0 \therefore \dfrac{तार}{ताय} = -\dfrac{य}{र} \end{array}\right\} \cdots (अ)$$

(अ) इस से $य = र$ अब इस का उत्थापन (१) और (२) में देने से $२य^3 + ल^3 = ३०५$ और $२य^2 + ल^2 = ७५$ इन पर से $ल = ५$

$$\text{और (३) समीकरण से } \frac{ताल}{ताय} = -\frac{य + र \cdot \dfrac{तार}{ताय}}{ल}$$

$$\therefore \frac{ता^2ल}{ताय^2} = -\frac{१ + \dfrac{तार^2}{ताय^2} + \dfrac{ता^2र}{ताय^2} र}{ल} + \frac{\dfrac{ताल}{ताय}\left(य + र \dfrac{तार}{ताय}\right)}{ल^2}$$

$$\text{परन्तु } य = र \therefore -१ = \frac{तार}{ताय} \text{ और } \frac{ता^2र}{ताय^2} = 0$$

$$\text{इस लिये } \frac{ता^2ल}{ताय^2} = -\frac{१ + १ + 0}{ल} + 0 = -\frac{२}{५}$$

इस लिये ल का ५ यह महत्तममान सिद्ध हुआ ।

इस प्रकार से परस्पराश्रित अनेक चलराशियों में भी किसी एक का महत्तम वा न्यूनतममान निकाल सकते हो ।

६३ । अभीं तक महत्तम और न्यूनतम मान जानने के लिये प्रथम तात्कालिकसम्बन्ध को शून्य के समान कर सब विधि दिखलाया है परन्तु (५४) वें प्रक्रम से यह भी सिद्ध है कि महत्तम और न्यूनतम मान प्रथम तात्कालिकसम्बन्ध यदि अनन्त के समान हो तब भी होते हैं । इस लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि जहां तात्कालिकसम्बन्ध शून्य के समान करने से चलराशि का मान असम्भव आवै वहां पर उस सम्बन्ध को अनन्त के समान कर तब चलराशि का मान निकालें ।

जैसे $स = अ + क (य - ग)^{\frac{२}{३}}$ इस में स का महत्तम वा न्यूनतम मान निकालना है तो

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{२}{३} क \cdot \frac{१}{(य - ग)^{\frac{१}{३}}}$$ यहां इसे शून्य के समान करने से,

समीकरण से य का मान $\frac{१}{०}$ के तुल्य होगा अर्थात् नियतसंख्या के तुल्य न होगा ।

इस लिये $$\frac{१}{०} = \frac{२}{३} क \cdot \frac{१}{(य - ग)^{\frac{१}{३}}}$$ ऐसा करने से $य = ग$

और $$स = अ + क (य - ग)^{\frac{२}{३}} = अ$$

यहां यदि $य = ग \pm च$ तो $स = अ + क \cdot \sqrt[३]{च^२}$ इस लिये यदि क धन हो तो अ, स का न्यूनतम मान होगा और यदि क ऋण हो तो अ, स का महत्तम मान होगा ।

(२) उदाहरण, यदि $स = अ + क (य - ग)^{\frac{८}{३}}$ तो यहां स के न्यूनतम वा महत्तम मान में

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{८}{३} क (य - ग)^{\frac{५}{३}} = ०$$ ऐसा मानने से यहां य का सम्भव मान = ग के आता है

परन्तु $\frac{ता^2स}{ताय^2}=\frac{४०}{९}क(य-ग)^{\frac{२}{३}}=0$ यदि य = ग

श्रौर $\frac{ता^3स}{ताय^3}=\frac{८०}{२७}क(य-ग)^{-\frac{१}{३}}=\frac{१}{0}$ यदि य = ग, यह होगा,

श्रौर पहले उदाहरण के विधि से यदि क धन हो तो य, जब ग के समान हो तो अ, स का न्यूनतममान होगा, श्रौर क यदि ऋण हो तो महत्तम होगा ।

देखो यहां पहला सम्बन्ध शून्य के समान हुआ है श्रौर तीसरा सम्बन्ध अनन्त के, तब भी महत्तम वा न्यूनतम मान सिद्ध हुआ है । परन्तु ऐसे स्थल में बहुधा यह मान महत्तम वा न्यूनतम है इस बात को जानने के लिये पहले उदाहरण के ऐसा बीजगणित के विधि से स का मान लाना चाहिये क्यों कि ऐसे स्थानों में टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा ।

६४ । इस प्रक्रम में महत्तम श्रौर न्यूनतम के विषय में कुछ प्रसिद्धार्थ के ऐसा सिद्धान्त लिखते हैं ।

नीचे लिखे हुए सिद्धान्तों को सिद्ध करने के लिये महत्तम वा न्यूनतम मान में तात्कालिकसम्बन्ध शून्य वा अनन्त के समान होता है इस को सर्वदा स्मरणार्थ,

विधाय मानं वियता समानं वाऽनन्ततुल्यं गणकेन साध्ये ।
तत्कालसम्बन्धभवं महत्त्वन्यूनत्वमाने न खिले च ते चेत् ॥

इस श्लोक को वा,

तात्कालिकसम्बन्ध करि तुल्य शून्य वानन्त ।
न्यूनमहत्तम में लखो सम्भव मान तुरन्त ॥

इस दोहे को सर्वदा कण्ठ रक्खो ।

प्रसिद्धार्थ सिद्धान्त ।

(१) महत्तम वा न्यूनतम मान में स्थिराङ्क जोड़ घटा देने से भी महत्तम वा न्यूनतम मान रहे गा ।

(२) महत्तम वा न्यूनतम मान को किसी स्थिराङ्क से गुण वा भाग देने से भी महत्तम वा न्यूनतम मान होगा ।

(३) महत्तममान को किसी स्थिराङ्क में घटा देने से न्यूनतममान होगा और न्यूनतममान को किसी स्थिराङ्क में घटा देने से महत्तममान होगा।

(४) स्थिराङ्क में यदि महत्तममान का भाग दिया जाय तो न्यूनतममान होगा और यदि न्यूनतममान का भाग दिया जाय तो महत्तममान होगा।

(५) यदि फ(य) महत्तम वा न्यूनतम हो तो $\{फ(य)\}^{न}$ यह भी महत्तम वा न्यूनतम होगा। यहां न अभिन्न धनसंख्या है।

(६) यदि फ(य) महत्तम वा न्यूनतम हो तो फा$\{$फ(य)$\}$ यह भी महत्तम होगा अथ वा न्यूनतम होगा।

तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से इन की सत्यता तुरन्त जान सकते हो।

जैसे जब फ(य) = र = महत्तम वा न्यूनतम

तो फा$\{$फ(य)$\}$ = फा(र) = स

$$\therefore \text{फा}'(\text{र}) = \frac{\text{तास}}{\text{तार}} \text{ और } \text{फ}'(\text{य}) = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 = \infty$$

$$\text{इस लिये } \text{फा}'(\text{र}) \cdot \text{फ}'(\text{य}) = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = 0, = \infty \text{ ।}$$

इस लिये फा$\{$फ(य)$\}$ यह महत्तम होगा अथ वा न्यूनतम होगा।

इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि सब का तात्कालिकसम्बन्ध निकाल इन छवो प्रसिद्धार्थ सिद्धान्तों को अच्छी तरह से सीखें क्यों कि इन के बल से बड़े लाघव से उत्तर निकल सकता है।

देखो छठवां जो प्रसिद्धार्थसिद्धान्त है उसी के अन्तर्गत ऊपर के पांचो प्रसिद्धार्थ सिद्धान्त हैं हम ने बालावबोध के लिये उन पांचो को अलग लिखा है।

६५। इस प्रक्रम में अच्छी तरह समझने के लिये कुछ महत्तम और न्यूनतम के उदाहरण क्रिया समेत दिखाते हैं।

उदाहरण।

(१) $\text{र} = ३\text{य}^{३} - ५\text{य}^{२} + \text{य} - १$ इस में महत्तम और न्यूनतम मान निकालो?।

यहां $\frac{तार}{ताय} = ९ य^{२} - १० य + १ = ० \therefore ९ य^{२} - १० य = - १,$

और वर्ग समीकरण के विधि से, $य = १$, वा $य = \frac{१}{९}$

अब देखो, $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = १८ य - १०$ इस में पहला य मान का उत्थापन देने से $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = ८$ इस लिये जब $य = १$ तो र न्यूनतम होगा।

फिर यदि $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}$ इस में $\frac{१}{९}$ का उत्थापन दो तो

$\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = -८$ इस लिये जब $य = \frac{१}{९}$ तब र महत्तम होगा।

(२) $र = य^{३} - ३ य^{२} - ९ य + ३०$ इस में र के महत्तम वा न्यूनतम मान में य का मान जानना है।

यहां $\frac{तार}{ताय} = ३ य^{२} - ६ य - ९ = ० \therefore य = ३, = - १$

और $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = ६ य - ६ \therefore \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = १२, = - १२$

इस लिये जब $य = ३$ तब $र =$ न्यूनतम $= ३$ और जब $य = - १$ तब $र =$ महत्तम $= ३५$।

(३) $र = ज्या^{२}य \cdot कोज्याय$ इस का महत्तममान जानना है।

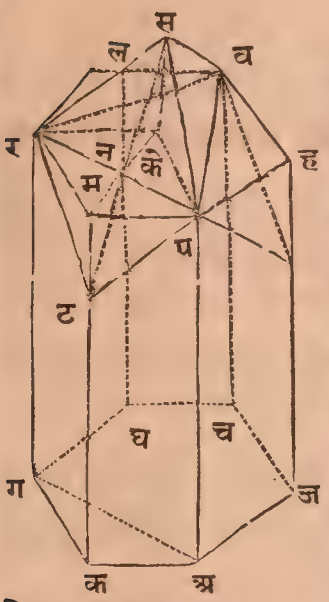
यहां $\frac{तार}{ताय} = २ ज्याय \cdot कोज्या^{२}य - ज्या^{३}य = ०$

$\therefore$ $ज्याय = कोज्याय \sqrt{२}$ वा, $य = ज्या^{-१}\sqrt{\frac{२}{३}}$।

(४) $र = य^{\frac{१}{य}}$ इस में र का महत्तममान क्या है?।

यहां छठवें प्रसिद्धार्थसिद्धान्त से लार = महत्तम वा न्यूनतम इस लिये $लार = \frac{लाय}{य}$ और $\frac{तार}{ताय} = \frac{१ - लाय}{य^{२}} \cdot र = ०$

∴ लाय = १ और य = इ इस का उत्थापन र में देने से $र = इइ^{१}$ = महत्तम ।



(५) अकगघचज एक समषड्भुज क्षेत्र के आधार पर एक षट्कोण शङ्कु है जिस की ऊंचाई अप वा कम के तुल्य है और मुख पमरलवह समषड्भुज क्षेत्र है, रप रेखा में लगा कर सरप त्रिभुजाकार धरातल एक ऐसा खड़ा किया है जिस के शिरःकोण स विन्दु से यदि मुख के धरातल पर लम्ब डालेा ताे ठीक समषड्भुज के बीच पर अर्थात् के विन्दु पर पड़ता है और यही त्रिभुजाकार धरातल नीचे बढ़ कर शङ्कु को काट कर रपमट एक सूची उत्पन्न करता है । अब यदि दो धरातल नया त्रिभुजाकार सकेप और सरके बनावेा ताे ऊपर भी रपकेस एक सूची होगी ।

देखेा ट और स जब उस त्रिभुजाकार धरातल में हैं जिस में रप रेखा है ताे अवश्य टस और रप रेखा का योग होगा मानेा कि दोनों का योग विन्दु न है । सकेप और सरके जात्यत्रिभुज में सके लम्ब उभयनिष्ठ है और केर = केप (क्योंकि समषड्भुज के केन्द्र से कोण तक खींची गई हैं) इस लिये सर = सप । इसी प्रकार टमप और टमर त्रिभुजों में मप = मर (क्यों कि दोनों समषड्भुज के भुज हैं) और टम उभयनिष्ठभुज है और टम शङ्कु के ऊंचाई का एक खण्ड है इस लिये टम रेखा मुख के धरातल पर लम्ब होगी इस लिये ∠टमप = ∠टमर = ∠स तब रेखागणित की युक्ति से टप = टर । अब एक ही धरातल में रप रेखा के दोनों ओर दो समद्विबाहु सिद्ध हुए इस लिये रेखागणित ही की युक्ति से रन = नप और टन = नस, और नके = नम तब टम = सके और टप = टर = रस = सप इत्यादि सिद्ध हो जायं गे ।

इस लिये मुख के धरातल से सरप त्रिभुज का धरातल चाहे जितना झुका हो पर रपमट सूची रपकेस सूची के तुल्य होगी क्यों कि दोनों का आधार मपर त्रिभुज और केरप त्रिभुज दोनों तुल्य हैं और वेध टम और सके भी परस्पर तुल्य हैं ।

इसी प्रकार पव और रव रेखा पर भी दो त्रिभुजाकार धरातल

खड़ा किया जाय जिस का शिरःकोण स ही विन्दु हो तो ऊपर की युक्ति से यहां भी सिद्ध कर सकते हो कि नीचे ऊपर की दोनों सूचियां समान होंगी ।

कल्पना करो कि एक खोखले षट्कोण शङ्कु को ऐसे ही तीन त्रिभुजों के धरातलों को नीचे बढ़ाकर काटा तो शेष शङ्कु और तीनों त्रिभुजाकार धरातलों से एक घनक्षेत्र बना जिस का घनफल शङ्कु ही के घनफल के तुल्य होगा चाहे मुख के धरातल से त्रिभुजों का धरातल कितना ही झुका हो परन्तु झुकाव के घटने बढ़ने से इस नये घनक्षेत्र के पृष्ठफल में अवश्य विकार होगा इस लिये यह प्रश्न है कि बतावो कितने झुकाव पर इस नये घनक्षेत्र का पृष्ठफल न्यून होगा? ।

यहां रेखागणित के एकादशाध्याय के परिभाषा से दोनों धरातलों का झुकाव $= \angle$ सनके $=$ ष समषड्भुज का एक भुज $=$ अ और शङ्कु की ऊंचाई $=$ क कल्पना करो

तब $\text{सके} = \frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्पष} = \text{टम} \;\; \therefore \;\; \text{कट} = \text{कम} - \text{टम} = \text{क} - \frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्पष}$ ।

और अकटप समलम्बचतुर्भुज का फल $= \frac{\text{अ}}{२}\left(२\text{क} - \frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्पष}\right)$

इस का दूना अकटप और कगरट चतुर्भुज का फल $= \text{अ}\left(२\text{क} - \frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्पष}\right)$

इसी प्रकार पटरस विषमकोण समचतुर्भुज का फल

$$= \frac{\text{रप} \times \text{सट}}{२} = \text{रप} \cdot \text{सन} = \text{अ}\sqrt{३} \times \text{सन}$$

$$= \text{अ}\sqrt{३} \times \frac{\text{अ}}{२}\,\text{छेष} = \frac{\text{अ}^२}{२}\,\text{छेष}\sqrt{३}$$

इस लिये घनक्षेत्र के एक अलङ्ग का पृष्ठफल

$$= \text{अ}\left(२\text{क} - \frac{\text{अ}}{२}\text{स्पष} + \frac{\text{अ}}{२}\,\text{छेष}\sqrt{३}\right)$$ तीन से गुण देने से

समग्र पृष्ठफल $= ३\,\text{अ}\left(२\text{क} + \frac{\text{अ}}{२}\,\text{छेष}\sqrt{३} - \frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्पष}\right) =$ न्यूनतम,

दूसरे प्रसिद्धार्थसिद्धान्त से $२\text{क} + \frac{\text{अ}}{२}\,\text{छेष}\sqrt{३} - \frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्पष} =$ न्यूनतम

पहले प्रसिद्धार्थसिद्धान्त से $\frac{\text{अ}}{२}\left(\text{छेष}\sqrt{३} - \text{स्पष}\right) =$ न्यूनतम

फिर दूसरे प्रसिद्धार्थसिद्धान्त से $\text{छेष}\sqrt{३} - \text{स्पष} = \text{र} =$ न्यूनतम

अब यहां $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{स्पष}\cdot\text{छेष}\sqrt{३} - \text{छे}^{२}\text{ष} = ०$ $\therefore$ $\text{स्पष}\sqrt{३} = \text{छेष}$

वा $\frac{\text{ज्याष}\sqrt{३}}{\text{कोज्याष}} = \frac{१}{\text{कोज्याष}}$ $\therefore$ $\text{ज्याष} = \frac{१}{\sqrt{३}}$ इस लिये $\text{ष} = ३५^{\circ}\ १५'\ ५१''$

और $\text{सन} = \frac{\text{अ}}{२}\ \text{छेष},\ \text{रन} = \frac{\text{अ}\sqrt{३}}{२}$ $\therefore$ $\text{स्प} < \text{सरन} = \frac{\text{सन}}{\text{रन}} = \frac{\text{छेष}}{\sqrt{३}}$

परन्तु $\text{कोज्याष} = \sqrt{\frac{२}{३}}$ $\therefore$ $\text{स्प} < \text{सरन} = \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{२}\sqrt{३}} = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{स्पष}$

इस लिये $< \text{सरन} = \text{ष} = ३५^{\circ}\,१५'\,५१''$ और विषमकोणसमचतुर्भुज में सिद्ध है कि $< \text{सरन} = < \text{नरट}$ $\therefore$ $< \text{सरट} = ७०^{\circ}\,३१'\,४२''$।

मधुमक्खियां शहद को रखने के लिये ठीक अपने छत्ते में इस नये घनक्षेत्र के ऐसा घर बनाती हैं। यूरप में पहले पहल मरल्डी (Maraldi) ने प्रत्येक छत्तों में इस कोण का मान स्थिर ७०° ३२′ नापने से निश्चय किया, इस के अनन्तर उस ने शोचा कि शायद ऐसा कोण बनाने से मधुमक्खियों को शहद का घर बनाने में सुभीता होता हो। गणितद्वारा इस बात को पक्का करने के लिये उस ने कोनिग् (Konig) साहब से प्रार्थना की जो कि उस समय में प्रसिद्ध गणितज्ञ था। कोनिग् साहब ने दृढ़ किया कि यदि सत्तर अंश और तीस कला का कोण होता तो अवश्य शहद के घरों का पृष्ठफल न्यूनतम होता और घनफल ज्यों का त्यों रहता इस लिये मधुमक्खियों को तब घर बनाने में सुभीता पड़ता। पीछे से म्याक्लरिन् (Maclaurin) और हुलियर (S. Huillier) इन दोनों ने अपनी युक्तियों से प्रकाश किया कि कोनिग् साहब की गणना करने में भूल थी ठीक सत्तर अंश और बत्तीस कला के तुल्य कोण में न्यूनतम पृष्ठफल होता है इसी लिये अपने सुभीते के लिये मधुमक्खियां ऐसा कोण बनाती हैं। बहुत लोग इस बात को सुन के आश्चर्यित होंगे परन्तु ध्यान दे कर विचारो कि जब ईश्वरदत्त बुद्धिबल से मधुमक्खियां प्रत्येक द्रव वस्तु में से शहद ही का तत्त्व निकास लेती हैं तो उन के लिये न्यूनतम पृष्ठफल बनाना क्या आश्चर्य है।

(६) एक वृत्त के बाहर एक विन्दु (अ) है वहां से परिधि तक एक ऐसी रेखा खींचना है जिस का मान न्यूनतम वा महत्तम हो।

यहां माने कि वृत्त का केन्द्र (के) और अके = ग और परिधि में कहीं एक विन्दु (प) ले वहां से अके रेखा पर पल लम्ब डाले।

अब यदि केल = य तो रेखागणित की युक्ति से

$$\text{अप}^2 = \text{क}^2 - \text{य}^2 + \text{ग}^2 - 2\,\text{गय} + \text{य}^2 = \text{क}^2 + \text{ग}^2 - 2\,\text{गय}। \; (\text{क} = \text{केप})$$

देखो यदि यहां तात्कालिकसम्बन्ध निकालो तो $-2\,\text{ग}$ आवे गा यह न शून्य न अनन्त ही के तुल्य है इस लिये वास्तव में यहां महत्तम और न्यूनतम दोनों न होंगे। परन्तु जब यहां प्रसिद्ध है कि य का मान क से बड़ा न होगा और $-$क से छोटा न होगा इस लिये पूर्व समीकरण में दोनों य के मानों का उत्थापन देने से

$$\text{अप का न्यूनतममान} = \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - 2\,\text{कग}} = \text{ग} - \text{क}$$

$$\text{अप का महत्तममान} = \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + 2\,\text{कग}} = \text{ग} + \text{क}$$

ये दोनों कल्पित न्यनतम और कल्पित महत्तममान हैं।

यदि $<$ लकेप = ष तो य = क · कोज्याष इस लिये

$$\text{अप}^2 = \text{क}^2 + \text{ग}^2 - 2\,\text{गय} = \text{क}^2 + \text{ग}^2 - 2\,\text{गक} \cdot \text{कोज्याष}$$

$$\text{और} \;\; 2\,\text{अप} \cdot \frac{\text{ताअप}}{\text{ताष}} = 2\,\text{कग} \cdot \text{ज्याष} = 0 \;\text{यदि ष} = 0 \;\text{वा ष} = 180^\circ$$

तब कोज्याष = १ वा = $-$१ इस का उत्थापन देने से

$$\left.\begin{array}{l}\text{अप का न्यूनतममान} = \text{ग} - \text{क} \\ \text{अप का महत्तममान} = \text{ग} + \text{क}\end{array}\right\} \text{पहले ही के ऐसा सिद्ध हुआ।}$$

इस लिये कभी कभी एक चलराशि को दूसरे चलराशि के रूप में लाने से कल्पित महत्तम और न्यनतम वास्तव महत्तम और न्यूनतममान हो जाते हैं। एक चलराशि को दूसरे चलराशि में लाकर उस पर से तात्कालिकसम्बन्ध को भी कैसे बदलना होता है इस का विधि दशयें अध्याय में लिखा जायगा।

(७) चार स्थिरभुज क्रम से अ, क, ग और घ हैं इन से एक ऐसा चतुर्भुज बनाओ जिस का क्षेत्रफल महत्तम हो।

कल्पना करो कि अ, क भुज के अन्तर्गतकोण का मान = प, प कोण के सन्मुख चतुर्भुज के कर्ण का प्रमाण = च और ग, घ भुज के अन्तर्गतकोण का मान = ब, तो त्रिकोणमिति से

$$च^2 = अ^2 + क^2 - २अक \cdot कोज्याप$$

$$कोज्याब = \frac{(ग^2 + घ^2) - च^2}{२गघ}$$

$$= \frac{ग^2 + घ^2 - अ^2 - क^2 + २अक \cdot कोज्याप}{२गघ} \cdots\cdots\cdots (१)$$

इस पर से यह सिद्ध होता है कि प के आधीन ब है

अब त्रिकोणमिति से चतुर्भुज का फल $= \frac{१}{२}$ (अक·ज्याप + गघ·ज्याब)

इस लिये अक · ज्याप + गघ · ज्याब = र = महत्तम

$$\frac{तार}{ताप} = अक \cdot कोज्याप + गघ \cdot कोज्याब \cdot \frac{ताब}{ताप} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

$$(१) \text{ से } - ज्याब \frac{ताब}{ताप} = - \frac{२अक \cdot ज्याप}{२गघ} \quad \therefore \frac{ताब}{ताप} = \frac{अक \cdot ज्याप}{गघ \cdot ज्याब}$$

इस का उत्थापन (२) में देने से,

$$\frac{तार}{ताप} = अक \cdot कोज्याप + \frac{अक \cdot कोज्याब \cdot ज्याप}{ज्याब} = 0$$

$$\therefore ज्याबकोज्याप + ज्याप \cdot कोज्याब = ज्या(प + ब) = 0$$

इस लिये प + ब = १८० वा प + ब = 0 परन्तु क्षेत्र में प+ब = 0 नहीं हो सकता इस लिये जब सन्मुख कोणों का योग एक सौ अस्सी अंश अर्थात् दो समकोण के तुल्य हो तब महत्तम क्षेत्र फल होगा।

इस पर से यह सिद्ध कर सकते हो कि कोई ऋजुबहुभुजक्षेत्र जिस का प्रत्येक भुज स्थिर हो तो उस का क्षेत्रफल तभी महत्तम होगा जब कि वह ऋजुबहुभुजक्षेत्र वृत्तान्तर्गत हो।

इसे सिद्ध करने के लिये उस बहुभुजक्षेत्र का किसी रेखा से ऐसा दो खण्ड करो कि पहला खण्ड चतुर्भुज हो। अब यहां यदि दूसरा खण्ड स्थिर मानो तो पहले खण्ड का तभी क्षेत्रफल अधिक होगा जब वह वृत्तान्तर्गत हो फिर इस चतुर्भुज के एक भुज को छोड़ बहुभुजक्षेत्र का

एक नया भुज ले पहले प्रकार के ऐसा यहां भी एक खण्ड चतुर्भुजाकार बनावो तो इस का भी तभीं क्षेत्रफल अधिक होगा जब वृत्तान्तर्गत हो परन्तु पहला चतुर्भुज और दूसरा चतुर्भुज दोनों का तीन कोण विन्दु एक ही है इस लिये दोनों चतुर्भुज एक ही वृत्त के अन्तर्गत होंगे इसी प्रकार आगे क्रिया करते चले जाओ तो सिद्ध होगा कि वह ऋजुबहुभुजक्षेत्र वृत्तान्तर्गत होगा ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि जिस प्रकार से लाघव देखें उस प्रकार से ऊपर के विधि से महत्तम वा न्यूनतम का मान निकालें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

नीचे लिखे हुए समीकरणों में र के महत्तम वा न्यूनतममान में य का मान निकालो ।

(१) $र = य^२ - ६\,य + ५०$, यहां जब र = न्यूनतम, तब य = ३ ।

(२) $र = ३\,य^३ - २१\,य^२ + २४\,य + १०$, य = ४ तब र = न्यूनतम और $य = \frac{२}{३}$ तब र = महत्तम ।

(३) $र = (४\,अ^२ - य^२)\,८\,अ \cdot य$, $य = \frac{२\,अ}{\sqrt{३}}$ तब र = महत्तम और $य = -\frac{२\,अ}{\sqrt{३}}$ तब र = न्यूनतम ।

(४) $र = अ^४ + क^३\,य - ग^२ \cdot य^२$ $\quad य = \frac{क^३}{२\,ग^२}$ तब र = महत्तम ।

(५) $र = अ + \sqrt[३]{अ^३ - २\,अ^२य + अ \cdot य^२}$, य = अ तब र = न्यूनतम ।

(६) $र = \frac{अ^२य}{(अ - य)^२}$, य = अ तब र = महत्तम ।

(७) $र = \frac{अ \cdot य}{(अ + कय)(क + ग \cdot य)}$, $य = \pm\sqrt{\frac{अ}{ग}}$ तब र = महत्तम वा न्यूनतम ।

(८) $र = \frac{य^५}{५} - य^४ + य^३ - १$, जब $य = १$, $र =$ महत्तम

जब $य = ३$, $र =$ न्यूनतम।

और जब $य = ०$, $र =$ न न्यूनतम न महत्तम।

(९) $र = ५ य^३ - ३० य^२ + ९ य + ११$ इस में दिखावो कि न महत्तम मान होगा न न्यूनतममान।

(१०) $र = ६ य^५ - २५० य^३ + ४३२० य + १०००$, यहां जब $य = -४$, वा $य = ३$ तब $र =$ महत्तम और जब $य = -३$ वा $य = ४$ तब $र =$ न्यूनतम।

(११) $र = \frac{य^२ - ८ य + १६}{य - १०}$ यहां $य = ४$ जब $र =$ महत्तम

$य = १६$ जब $र =$ न्यूनतम।

(१२) $र = \frac{१}{१ + य - य^२}$ यहां $य = \frac{१}{२}$ जब $र =$ न्यूनतम।

(१३) $र = \frac{१ + \frac{य}{अ^२}}{य} + \frac{क^२ + अ - य}{अ^२ (अ - य)}$ यहां $य = \frac{अ^२}{अ + क}$

जब $र =$ न्यूनतम और $य = \frac{अ^२}{अ - क}$ जब $र =$ महत्तम।

(१४) $र = \frac{\sqrt{य^२ - ३}}{(९ + य^२)^{\frac{३}{२}}}$ यहां $य = ०$ जब $र =$ न्यूनतम, और $य = \pm ३$

जब $र =$ महत्तम।

(१५) $र = क + ग (य - अ)^{\frac{२}{३}} + (य - अ)^{\frac{८}{३}}$

यहां $य = अ$ जब $र =$ न्यूनतम।

(१६) $र = \frac{(अ - य)^४}{(अ - २ य)^{\frac{४}{३}}}$ यहां $य = \frac{अ}{४}$ जब $र =$ न्यूनतम।

(१७) $र = (२ य + ३ अ)^५ - ३१२५ अ^२ य^३$

यहां $य = अ$ जब $र =$ न्यूनतम।

(१८) $र = \frac{य}{अ}\left(1+\frac{य}{अ}\right)^2\left(1-\frac{य}{अ}\right)^3$ । $य = \frac{अ}{३}$, वा $य = -अ$

जब $र$ = महत्तम और $य = -\frac{अ}{२}$ जब $र$ = न्यूनतम ।

(१९) $\frac{तार}{ताय} = (य-1)\left(\frac{य}{२}-1\right)^2\left(\frac{य}{३}-1\right)^3$ इस में सिद्ध करो कि कब र का मान महत्तम वा न्यूनतम होगा ।

$र$ = महत्तम जब $य = 1$

$र$ = न्यूनतम जब $य = ३$ ।

(२०) $\frac{तार}{ताय} = य^3(य-1)^2\left(\frac{य}{२}-1\right)^3\left(\frac{य}{३}-1\right)^4$ इस में सिद्ध करो कि कब र का मान महत्तम वा न्यूनतम होगा ।

$र$ = महत्तम जब $य = 0$

$र$ = न्यूनतम जब $य = २$

(२१) $र = \left(1+य^{\frac{२}{३}}\right)^2\left(1-\frac{य}{७}\right)^4$ यहां $य = 1$ जब $र$ = महत्तम

और $य = 0$ या $य = ७$ जब $र$ = न्यूनतम ।

(२२) $र$ = ज्याय + उज्याय यहां $य = \frac{३\pi}{४}$ जब $र$ = महत्तम ।

(२३) कोस्पर $= \frac{क}{स्पय}$ यहां $र + य = \frac{\pi}{२}$ जब $र - य$ = महत्तम ।

(२४) $र = (ज्याय)^म\{ज्या(अ-य)\}^न\{कोज्या(अ-२य) - कोज्याअ\}$

यहां $ज्या(अ-२य) = ज्याअ \cdot \frac{न-म}{न+म+२}$ जब $र$ = महत्तम ।

(२५) $र = \frac{ज्या\,२य}{कोज्याय + ज्याय}$ यहां $य = \frac{\pi}{४}$ जब $र$ = महत्तम, ।

(२६) $र = \frac{ज्या^2य \cdot स्पय(1+स्प^2य)}{ज्या\,६य + २ज्या^2३य \cdot स्प\,३य}$ यहां $य = \frac{\pi}{८}$ जब $र$ = न्यूनतम ।

(२७) $र = (कोज्याय + ज्याय \cdot स्पय)(अ - क \cdot स्पय)^2$

यहां $स्पय = \frac{१}{६ क}(अ + \sqrt{अ^२ - २४ क^२})$ जब र = महत्तम।

और $स्पय = \frac{१}{६ क}(अ - \sqrt{अ^२ - २४ क^२})$ जब र = न्यूनतम।

(२८) $र = \frac{य(२ कोज्या^२ य + ज्या २ य \cdot स्पय)}{१ + य \cdot स्पय}$ इस में सिद्ध करो कि जब य = कोज्याय तो र का महत्तम मान होगा।

(२९) $र = ज्याय \cdot कोज्या^२ \frac{१}{२} य$ यहां $य = \frac{\pi}{३}$ जब र = महत्तम।

(३०) $र = य^२ + य \cdot ज्याय - ८ ज्या^२ \frac{१}{२} य$ यहां य = ० जब र = न्यूनतम।

(३१) $र = \frac{अ \cdot कोज्याय + क \cdot ज्याय}{ज्या २ य}$ यहां $स्पय = \sqrt[३]{\frac{अ}{क}}$

जब र = न्यूनतम।

(३२) $र = य^२ + स्पय + छेय + य\sqrt{इ^य + १}$ यहां य = ०

जब र = न्यूनतम और र का न्यूनतम मान = १।

(३३) स = (मय + न)(नर + म) यहां स के महत्तम मान में य का मान निकालो इतना स्मरण रक्खो कि $अ^{मय} \cdot र^{नय} = ग$

$$य = \frac{ला\left(\frac{गक^म}{अ^न}\right)}{ला(अ^{२म})}$$ जब स = महत्तम।

(३४) $र^३\sqrt{२} - र^२ य^२ + य^४ = ०$ यहां र का न्यूनतम मान और उस समय में य का मान निकालो, य = ४ जब $र = न्यूनतम = ४\sqrt{२}$।

(३५) $र^२ य - र य^२ + १६ = ३२$ इस में यह सिद्ध करो कि जब र का न्यूनतम मान हो तो य = २।

(३६) $६ अ^२ र^२ + २ यर^३ + ८ अय^३ + १६ = १६$ यहां दिखावो कि

जब र = महत्तम तो $य = \frac{३ अ}{२}$।

(३७) $य^४ + १८ य^२ र - ९ र^३ = ०$ यहां दिखावो कि जब $य = \pm ९$

तो र = न्यूनतम = −९ और जब र = −८ तो य का मान न्यूनतम और महत्तम दोनों होगा अर्थात् य = ±४$\sqrt{६}$ यहां धन चिह्न महत्तम के लिये और ऋण चिह्न न्यूनतम के लिये लिखा है ।

(३८) $र^४ - ४रय + य^४ = 0$ यहां य = $\sqrt[५]{३}$ जब र = महत्तम

$= \sqrt[५]{२७}$ और य = $-\sqrt[५]{३}$ जब र = न्यूनतम = $-\sqrt[५]{२७}$ ।

(३९) $२य^२ + \frac{३}{\sqrt[३]{५}} र^४ - य^२र^३ = 0$ यहां दिखावो कि

जब य = ५ तो र = न्यूनतम = $५^{\frac{४}{३}}$ ।

(४०) $र^७ - ५य^४र^३ + ४य^५ = 0$ यहां सिद्ध करो कि जब य = १ तो र = न्यूनतम = १ और जब य = −१ तो र = महत्तम = −१ ।

(४१) र = य − ब, कोज्याय = $-\frac{ज्याअ + ज्याय \cdot ज्याक}{कोज्याय \cdot कोज्याक}$ और

कोज्याब = $-\frac{ज्याय \cdot ज्याक}{कोज्याय \cdot कोज्याक}$ तो बतावो कि जब र न्यूनतम होगा उस समय य का क्या मान होगा ?।

स्याय = −ज्याक · स्प $\frac{१}{२}$अ जब र = न्यूनतम ।

(४२) $ज्या^४र - ज्यार \cdot ज्याय + ज्या^४य$ इस में ज्यार का जब महत्तम मान होगा उस समय य का क्या मान होगा ? ।

जब ज्यार = महत्तम = ·७५५ तब ज्याय = ·५०३ ।

(४३) उस भिन्न का मान बतावो जिस में उसी का तिगुना घन घटा देने से महत्तम शेष बचे? । उत्तर $\frac{१}{३}$ = भिन्न ।

(४४) १५ का ऐसा दो खण्ड करो कि पहले के वर्ग से दूसरे के घन को गुण दो तो गुणनफल सब से बड़ा हो ? । उत्तर ६ और ९ ।

(४५) उस संख्या को बतावो जिस के वर्ग में एक जोड़कर जो हो उस से उसी संख्या में भाग देने से लब्धि सब से बड़ी हो ? । उत्तर १ ।

(४६) एक ऐसी संख्या है कि यदि इसे सोलह से गुण कर भाज्य मानो और चार में उसी संख्या को घटाकर उस के वर्ग को भाजक मानो तो लब्धि सब से बड़ी होती है तो बतावो वह संख्या कौन है? ।

उत्तर ४ ।

(४१) चार हाथ आधार पर एक ऐसा त्रिभुज बनाना है जिन के भुजों का योग २२ और क्षेत्रफल सब से बड़ा हो।

उत्तर प्रत्येक भुज = ११।

(४८) एक वंश के जब अग्र को उस के मूल से ८ हाथ पूर्व की ओर हट कर देखा तो (क) उन्नतांश मिला और १८ हाथ हट कर देखा तो (ख) उन्नतांश मिला फिर उन दोनों उन्नतांशों का अन्तर किया तो जान पड़ा कि यह परमाधिक अन्तर है ऐसी स्थिति में बताओ बांस की ऊंचाई कितनी है ?। उत्तर = १२ हाथ।

(४९) अकग त्रिभुज में अ शिरःकोण है और इस के तीनों भुज स्थिर हैं अर्थात् अक = क, अग = ग और कग = अ, एक ऐसी रेखा खींचो जो अक, अग भुजों में योग करे त्रिभुज का दो समान विभाग करे और सब से छोटी हो ?।

$$\text{उत्तर, रेखा के लम्बाई का वर्ग} = \frac{\text{अ}^2 - (\text{क} - \text{ग})^2}{२}।$$

(५०) एक वृत्त जिस का व्यासार्द्ध (अ) है उस के बहिर्लग्न एक ऐसा समद्विबाहु बनाओ जिस का क्षेत्रफल सब से छोटा हो ?।

उत्तर वृत्त के केन्द्र से त्रिभुज के शिरःकोण तक रेखा की लम्बाई = २अ और त्रिभुज का फल = $\text{अ}^2\sqrt{२७}$।

(५१) कख और कग दो सड़क हैं कख पश्चिम से पूर्व की ओर कग उत्तर से दक्षिण की ओर गई है इन दोनों सड़कों के बीच कहीं एक न स्थान है जिस का अन्तर कख और कग से क्रम से ८००० और ३३७५ हाथ है एक ऐसी सीधी नई सड़क बनाना है जो न स्थान में होती हुई उन दोनों सड़कों में आमिले और बनाने में खर्च भी थोड़ा पड़े तो बतावो कि उस सड़क की लम्बाई कितनी होगी ?। उत्तर १५६२५ हाथ।

(५२) कखगघ आयताकार कागज़ के ताव को ग कोण को फेर कर कख रेखा के ऐसे विन्दु पर लगा कर फाड़ो कि फाड़नेवाली रेखा का प्रमाण सब से छोटा हो ?।

उत्तर यदि खग = अ तो ग से ख की ओर $\frac{३\text{अ}}{४}$ इतनी दूर पर से मोड़ने में सब से छोटी रेखा होगी।

(५३) एक त्रिभुज (जिस में शिरःकोण से आधार पर जो लम्ब हो

उस का प्रमाण = अ है और आधार = क) के भीतर सब से बड़ा आयत जो हो उस के भुजों का मान बताओ? ।

उ० आधार के समानान्तरभुज का मान $= \frac{\text{क}}{२}$ और दूसरा भुज $= \frac{\text{अ}}{२}$ ।

(५४) एक वृत्त के अन्तर्गत सब से बड़ा समद्विबाहु त्रिभुज बनाओ? ।

उत्तर यदि वृत्त का व्यासार्द्ध = अ तो त्रिभुज का भुज $=$ अ $\sqrt{३}$ अर्थात् सब से बड़ा समत्रिबाहु होगा ।

(५५) एक वृत्तार्द्ध के भीतर यदि सब से बड़ा आयत हो तो उस के भुजों का क्या मान होगा? ।

उत्तर यदि वृत्त का व्यासार्द्ध = अ तो पहला भुज

$$= \frac{\text{अ}}{\sqrt{२}} \text{ दूसरा} = \text{अ}\sqrt{२} \text{ ।}$$

(५६) सूर्य चन्द्र का केन्द्रान्तरसूत्र = अ तो बतावो कि उस केन्द्रान्तरसूत्र में कहां दृष्टिस्थान कल्पना किया जाय जहां से दोनों के दृश्यखण्ड मिल के सब से बड़ा हो ? ।

उत्तर सूर्य के केन्द्र से चन्द्र की ओर $\frac{\text{त्रि}^3 \text{अ} \pm \text{अ}\sqrt{\text{त्रि}^3 \cdot \text{त्रि}'^3}}{\text{त्रि}^3 - \text{त्रि}'^3}$

इतनी दूरी पर दृष्टिस्थान कल्पना करना चाहिये यहां त्रि = रविव्यासार्द्ध, त्रि = चन्द्रव्यासार्द्ध ।

(५७) बहुत से सूच्याकार शङ्कु हैं उन के शिरःकोण से आधार परिधि तक जो रेखा खींची गई हैं वे सब आपस में तुल्य और सब शङ्कु में एक ही हैं तो बतावो कि जिस शङ्कु का घनफल सब से बड़ा है उस के शिरःकोण का क्या मान है ? ।

उत्तर शिरःकोण $= २\,\text{स्प}^{-१}\sqrt{२}$ ।

(५८) एक जात्यक्षेत्र में भुजकोटि का योगस्थिर (अ) है परमाधिकफल में भुज का मान क्या होगा? । उत्तर भु $= \frac{\text{अ}}{२}$ ।

(५९) एक जात्यक्षेत्र में कर्णस्थिर (अ) है तो यदि भुजकोटि का योग परमाधिक हो तो भुज का क्या मान होगा? । उत्तर भु $= \frac{\text{अ}}{\sqrt{२}}$ ।

(६०) एक जात्यक्षेत्र में फलस्थिर (अ) है तो बतावो न्यूनतम कर्ण में भुज का मान क्या होगा? । उत्तर $भु = \sqrt{२अ}$ ।

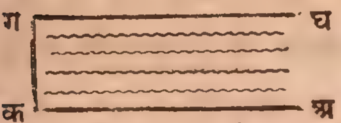
(६१) एक जात्यक्षेत्र में कर्णस्थिर (अ) है तो भुज का मान बतावो जिस में महत्तम क्षेत्रफल हो? । उत्तर $भु = \frac{अ}{\sqrt{२}}$ ।

(६२) एक जात्यक्षेत्र में फल स्थिर (अ) है तो परमाल्प भुजकोटि का योग क्या होगा? । उत्तर $यो = २\sqrt{२अ}$ ।

(६३) एक जात्यक्षेत्र में कर्णस्थिर (अ) है तो भुज का मान बतावो जिस में भुजकोटि के योग से कर्ण पर डाले हुए लम्ब का प्रमाण महत्तम हो? । उत्तर $भु = \frac{अ}{\sqrt{२}}$ ।

(६४) भुजकोटि का योगस्थिर (अ) है तो भुज का मान बतावो जिस में कर्ण परमाल्प हो? । उत्तर $भु = \frac{अ}{२}$ ।

(६५) अकगघ एक नदी के तट के ग विन्दु पर अ स्थान से एक



पुरुष को जाना है तो बतावो अ स्थान से कितनी दूर क की ओर पैदल चल कर तब नाव में बैठ कर चले जिस में बहुत जल्दी ग स्थान पर पहुंचे (इस प्रश्न में हम को इतना ज्ञान है कि अक = ५० कग = नदी का पाट = ३०, पुरुष की एक घण्टे की गति = ५ और नाव की एक घण्टे की गति = ४ मील है)।

उत्तर १० मील ।

(६६) दो जौहरी जिन के पास क्रम से १०० और ५०० रत्न थे वे दोनों व्यापार करने के लिये अपने अपने रत्नों को एक ही थैली में रख परदेश को चले दूसरे नगर में पैठते ही वहां का राजपुरुष उन दोनों की तलाशी ले थैली निकाल बोला कि जिस के पास से थैली निकली है वह अपनी रत्नसंख्या के वर्ग के तुल्य पैसे देवे और दूसरा अपनी रत्नसंख्या से सौगुने पैसे देवे । इस बात को सुन वे दोनों आपस में विचारने लगे कि इस थैली में तो हमारे दोनों के रत्न एकट्ठा ही मिले हुए हैं इस लिये हम लोग अपने अपने रत्नों की संख्या झूठ ही ऐसा क्यों न बतावें जिस में हम दोनों को कम पैसे देने पड़ें तो बतावो कि उन दोनों की झूठी रत्नसंख्याओं का क्या मान है? इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि जिस की सच्ची रत्नसंख्या ५०० थी थैली उसी के पास थी ।

उत्तर जिस के पास थैली थी उस की झूठी रत्नसंख्या = ५० और दूसरे की झूठी रत्नसंख्या = ५५० ।

(६७) दो सवार साथ ही काशी से प्रयाग को चले उन के घोड़ों के प्रतिक्षण चाल की विलक्षण रीति थी अर्थात् किसी समय में पहले घोड़े के चाल के वर्ग से यदि दूसरे के चाल को गुण दो और दूसरे घोड़े के चाल के वर्ग से पहले के चाल को गुण दो फिर इन दोनों संख्याओं का अन्तर करो तो सर्वदा सोलह के तुल्य होता है अब बताओ कि जब पहला घोड़ा निहायत थक गया उस समय उस के चाल का क्या प्रमाण था और उसी समय में दूसरे का चाल भी बताओ ? ।

उत्तर पहले का चाल = १६ और दूसरे का चाल = ८ ।

इति अष्टमाध्याय ।

नवमाध्याय ९ ।

दो और अनेक चलराशियों के महत्तम और न्यूनतम के विषय में ।

६६ । मानो कि र और ल ये दोनों य के फल हैं और स = फ(र, ल) और जब य की वृद्धि △ य तो र, ल और स की क्रम से △ र, △ ल और △ स वृद्धि है तब स' = फ (र + △ र, ल + △ ल)

$$\therefore \text{ स}' - \text{स} = \triangle\text{स} = \text{फ}(\text{र} + \triangle\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) - \text{फ}(\text{र}, \text{ल})$$

$$= \text{फ}(\text{र} + \triangle\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) - \text{फ}(\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) + \text{फ}(\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) - \text{फ}(\text{र}, \text{ल})$$

△ य का भाग देने से,

$$\frac{\triangle\text{स}}{\triangle\text{य}} = \frac{\text{फ}(\text{र} + \triangle\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) - \text{फ}(\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल})}{\triangle\text{र}} \cdot \frac{\triangle\text{र}}{\triangle\text{य}}$$

$$+ \frac{\text{फ}(\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) - \text{फ}(\text{र}, \text{ल})}{\triangle\text{ल}} \cdot \frac{\triangle\text{ल}}{\triangle\text{य}}$$

अब मानो कि △ य का परमह्रास हो गया तो स्पष्ट है कि तब

$$\frac{\triangle\text{स}}{\triangle\text{य}} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}, \quad \frac{\triangle\text{र}}{\triangle\text{य}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \quad \frac{\triangle\text{ल}}{\triangle\text{य}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}},$$

और $\frac{\text{फ}(\text{र}, \text{ल} + \triangle\text{ल}) - \text{फ}(\text{र}, \text{ल})}{\triangle\text{ल}}$ इस का मान ठीक वैसा ही है र को

स्थिर मान ल के वश से स का तात्कालिकसम्बन्ध जैसे निकलता है इसे $\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}$ इस के तुल्य समझो और $\frac{\text{फ}(र+\triangle र, ल+\triangle ल)-\text{फ}(र, ल+\triangle ल)}{\triangle र}$
इस का मान ठीक वैसा ही है ल+△ल स्थिरसंख्या मान और र के वश से स का तात्कालिकसम्बन्ध जैसे निकलता है परन्तु जब △र का परमह्रास होगा उस समय △ल = 0 इस लिये पूर्वोक्त संख्या का मान वही होगा जो कि स का तात्कालिकसम्बन्ध ल को स्थिर मान र के वश से होगा।

इन का उत्थापन पूर्वोक्त समीकरण में देने से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}=\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}\cdot\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

विद्यार्थियों को ध्यान देना चाहिये कि $\frac{\text{तास}}{\text{तार}}$ और $\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}$ ये दोनों स का कल्पितसम्बन्ध हैं नहीं तो जब र और ल दोनों य के फल हैं तब ऐसा कैसे हो सकता है कि य चले और र वा ल स्थिर रहे इस लिये स्वतन्त्र र और ल के वश से जो स का सम्बन्ध निकलता है उस से भिन्न समझने के लिये इसे $\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)$ और $\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}\right)$ ऐसा लिखते हैं

इस लिये (१) इस समीकरण को $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}=\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}\right)\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ ऐसा लिखते हैं।

(१) उदाहरण, मानो कि स = र² + ल² + रल

$$र = \text{स्पय}$$

$$ल = इ^{य}।$$

$$\text{तब}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)=२र+ल$$

$$\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}\right)=२ल+र$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{छे}^{२}य$$

$$\frac{ताल}{ताय} = इ^{य}$$

$$इस\ लिये\ \frac{तास}{ताय} = (२र + ल)\,छे^{२}य + (२ल + र)\,इ^{य}$$

$$= (२स्पय + इ^{य})\,छे^{२}य + (२इ^{य} + स्पय)\,इ^{य}$$

$$= २इ^{२य} + इ^{य}(छे^{२}य + स्पय) + २स्पय\cdot छे^{२}य$$

यदि र और ल के स्थान में स्पय और $इ^{य}$ का उत्थापन देकर $\frac{तास}{ताय}$ इसे लावो तो भी पूर्व ही के ऐसा आवे गा।

(२) उदाहरण, मानो कि $स = स्प^{-१}(य + र)$

$$यहां\ र = इ^{य}$$

$$ल = य$$

$$\left(\frac{तास}{तार}\right) = \frac{१}{१ + (य + र)^{२}}$$

$$\left(\frac{तास}{ताल}\right) = \frac{१}{१ + (य + र)^{२}}$$

$$\frac{तार}{ताय} = इ^{य}$$

$$\frac{ताल}{ताय} = १$$

$$इस\ लिये\ \frac{तास}{ताय} = \frac{इ^{य} + १}{१ + (य + र)^{२}} = \frac{इ^{य} + १}{१ + (इ^{य} + य)^{२}}$$

९७। मानो कि स = फ(र, ल, व) जहां र, ल और व प्रत्येक य के फल हैं। यहां भी ९६ वें प्रक्रम के ऐसा

$$\triangle स = फ(र + \triangle र, ल + \triangle ल, व + \triangle व) - फ(र, ल, व)$$

$$= फ(र + \triangle र, ल + \triangle ल, व + \triangle व) - फ(र, ल + \triangle ल, व + \triangle व)$$

$$+ फ(र, ल + \triangle ल, व + \triangle व) - फ(र, ल, व + \triangle व)$$

$$+ फ(र, ल, व + \triangle व) - फ(र, ल, व)\ ।$$

$$\frac{\triangle स}{\triangle य}=\frac{फ(र+\triangle र, ल+\triangle ल, व+\triangle व)-फ(र, ल+\triangle ल, व+\triangle व)}{\triangle र}\frac{\triangle र}{\triangle य}$$

$$+\frac{फ(र, ल+\triangle ल, व+\triangle व)-फ(र, ल, व+\triangle व)}{\triangle ल}\frac{\triangle ल}{\triangle य}$$

$$+\frac{फ(र, ल, व+\triangle व)-फ(र, ल, व)}{\triangle व}\frac{\triangle व}{\triangle य}$$

$\triangle य$, इत्यादि का परमह्रास होने से,

$$\frac{तास}{ताय}=\left(\frac{तास}{तार}\right)\frac{तार}{ताय}+\left(\frac{तास}{ताल}\right)\frac{ताल}{ताय}+\left(\frac{तास}{ताव}\right)\frac{ताव}{ताय}$$

इस प्रकार चार पांच इत्यादि चलराशियों में भी $\frac{तास}{ताय}$ इस का मान निकाल सकते हो।

(१) उदाहरण, $स = र+ल+व+रलव$

$$र = ज्याय$$

$$ल = य^{२}$$

$$व = इ^{य}$$

$$\left(\frac{तास}{तार}\right)=१+लव$$

$$\left(\frac{तास}{ताल}\right)=१+रव$$

$$\left(\frac{तास}{ताव}\right)=१+रल$$

$$\frac{तार}{ताय}=कोज्याय$$

$$\frac{ताल}{ताय}=२य$$

$$\frac{ताव}{ताय}=इ^{य}$$

इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = (१ + \text{लव})\,\text{कोज्याय} + २(१ + \text{रव})\,\text{य} + (१ + \text{रल})\,\text{इ}^{\text{य}}$

$= (१ + \text{य}^{२}\cdot\text{इ}^{\text{य}})\,\text{कोज्याय} + २\,\text{य}\,(१ + \text{ज्याय}\cdot\text{इ}^{\text{य}}) + (१ + \text{य}^{२}\text{ज्याय})\,\text{इ}^{\text{य}}$

$= \text{इ}^{\text{य}}(\text{य}^{२}\text{कोज्याय} + \text{य}^{२}\text{ज्याय} + २\,\text{य}\,\text{ज्याय} + १) + \text{कोज्याय} + २\,\text{य}$

९८। कल्पना करो कि $\text{स} = \text{फ}(\text{य}, \text{र})$ जहां य और र दोनों स्वतन्त्र हैं इस में $\text{फ}(\text{य} + \text{च}, \text{र} + \text{ज})$ इस का मान च और ज के घात-वृद्धि में ले आना है।

मानो कि $\text{च} = \text{अ}_{१}\text{च}'$, $\text{ज} = \text{अ}_{१}\text{ज}'$

तब $\text{फ}(\text{य} + \text{च}, \text{र} + \text{ज}) = \text{फ}(\text{य} + \text{अ}_{१}\text{च}', \text{र} + \text{अ}_{१}\text{ज}')$

अन्तिम पक्ष अर्थात् $\text{फ}(\text{य} + \text{अ}_{१}\text{च}', \text{र} + \text{अ}_{१}\text{ज}')$ इसे ऐसा मान सकते हो कि यह $\text{अ}_{१}$ का कोई फल है।

मानो कि $\text{फ}(\text{य} + \text{अ}_{१}\text{च}', \text{र} + \text{अ}_{१}\text{ज}') = \text{फि}(\text{अ}_{१})$

तो म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से,

$$\text{फि}(\text{अ}_{१}) = \text{फि}(0) + \text{फि}'(0)\,\text{अ}_{१} + \text{फि}''(0)\frac{\text{अ}_{१}^{२}}{\lfloor २} + \cdots$$

इस में $\text{फि}'(\text{अ}_{१})$ इत्यादि के मान जानने के लिये कल्पना करो कि

$$\text{य} + \text{अ}_{१}\text{च}' = \text{य}', \text{र} + \text{अ}_{१}\text{ज}' = \text{र}' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

इस लिये $\text{फि}(\text{अ}_{१}) = \text{फ}(\text{य}', \text{र}')$ जहां य' और र' दोनों $\text{अ}_{१}$ के फल हैं। अब ९६ वें प्रक्रम से,

$$\text{फि}'(\text{अ}_{१}) = \frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{ताय}'}\,\frac{\text{ताय}'}{\text{ताअ}_{१}} + \frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{तार}'}\,\frac{\text{तार}'}{\text{ताअ}_{१}}$$

$$= \text{च}'\frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{ताय}'} + \text{ज}'\frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{तार}'} \left(\begin{array}{l}\text{क्योंकि (१) से } \frac{\text{ताय}'}{\text{ताअ}_{१}} = \text{च}' \\ \text{और } \frac{\text{तार}'}{\text{ताअ}_{१}} = \text{ज}'\end{array}\right)$$

और $\frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{ताय}'}\cdot\frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}}$

परन्तु (१) समीकरण से $\frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}} = १$

इस लिये $\frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफ}(\text{य}', \text{र}')}{\text{ताय}'}$

इसी प्रकार $\frac{\text{ताफ}(\text{य}',\text{र}')}{\text{तार}} = \frac{\text{ताफ}(\text{य}',\text{र}')}{\text{तार}'}$

तब $\text{फि}'(\text{अ}_1) = \text{च}' \cdot \frac{\text{ताफ}(\text{य}',\text{र}')}{\text{ताय}} + \text{ज}' \cdot \frac{\text{ताफ}(\text{य}',\text{र}')}{\text{तार}}$

यहां यदि $\text{फ}(\text{य}',\text{र}') = \text{फि}$ तो

$$\text{फि}'(\text{अ}_1) = \text{च}' \cdot \frac{\text{ताफि}}{\text{ताय}} + \text{ज}' \frac{\text{ताफि}}{\text{तार}}$$

इसी प्रकार $\text{फि}''(\text{अ}_1) = \text{च}'^2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{ताय}^2} + 2\,\text{च}' \cdot \text{ज}' \cdot \frac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{ताय} \cdot \text{तार}} + \text{ज}'^2 \frac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{तार}^2}$

$$\text{फि}'''(\text{अ}_1) = \text{च}'^3 \frac{\text{ता}^3\text{फि}}{\text{ताय}^3} + 3\,\text{च}'^2\,\text{ज}' \cdot \frac{\text{ता}^3\text{फि}}{\text{ताय}^2 \cdot \text{तार}}$$

$$+ 3\,\text{च}'\text{ज}'^2 \cdot \frac{\text{ता}^3\text{फि}}{\text{ताय} \cdot \text{तार}^2} + \text{ज}'^3 \frac{\text{ता}^3\text{फि}}{\text{तार}^3}$$

इस प्रकार $\text{फि}(\text{अ}_1)$ के तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा जानने के लिये सिद्धान्त उत्पन्न हुआ । अब, जब $\text{अ}_1 = 0$ तो $\text{फि}(\text{अ}_1) = \text{स}$
इस लिये $\text{फि}(0) = \text{स}$

$$\text{फि}'(0) = \text{च}' \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज}' \cdot \frac{\text{तास}}{\text{तार}}$$

$$\text{फि}''(0) = \text{च}'^2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + 2\,\text{च}'\text{ज}' \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} + \text{ज}'^2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2}$$

इन सब में च' के स्थान में $\frac{\text{च}}{\text{अ}_1}$ का और ज' के स्थान में $\frac{\text{ज}}{\text{अ}_1}$ का उत्थापन दे कर म्याक्लरिन् के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}, \text{र}+\text{ज}) = \text{स} + \text{च} \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज} \frac{\text{तास}}{\text{तार}}$$

$$+ \frac{1}{\underline{|2}} \left\{ \text{च}^2 \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + 2\,\text{चज} \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} + \text{ज}^2 \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\underline{|3}} \left\{ \text{च}^3 \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^3} + 3\,\text{च}^2\text{ज} \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताय}^2\text{तार}} + 3\,\text{चज}^2 \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तायतार}^2} + \text{ज}^3 \frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{तार}^3} \right\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

इस में जब $य = 0$ और $र = 0$

$$तो \;\; फ(च, ज) = स_0 + च \frac{तास_0}{ताय} + ज \frac{तास_0}{तार}$$

$$+ \frac{1}{\lfloor 2} \left\{ च^2 \frac{ता^2स_0}{ताय^2} + २ चज \frac{ता^2स_0}{तायतार} + ज^2 \frac{ता^2स_0}{तार^2} \right\} + \cdots$$

यहां स, $\frac{तास}{ताय}$, $\frac{तास}{तार}$, इत्यादि के स्थान में य और र को शून्य मानने से जो संख्या हों उन का मान $स_0$ $\frac{तास_0}{ताय}$ $\frac{तास_0}{तार}$ इत्यादि हैं।

यदि च और ज के स्थान में य और र का उत्थापन देओ तो

$$फ(य,र) = स_0 + य \cdot \frac{तास_0}{ताय} + र \cdot \frac{तास_0}{तार}$$

$$+ \frac{1}{\lfloor 2} \left\{ य^2 \cdot \frac{ता^2स_0}{ताय^2} + २ यर \cdot \frac{ता^2स_0}{तायतार} + र^2 \cdot \frac{ता^2स_0}{तार^2} \right\} + \cdots$$

६९। यदि ध्यान दे कर देखो तो ६८ वें प्रक्रम में जो $फि'(अ_1)$ इत्यादि के मान सिद्ध हुए हैं वे ठीक द्वियुक्पद सिद्धान्तोत्पन्नफल के तुल्य हैं केवल $च' \frac{ताफि}{ताय} + ज' \frac{ताफि}{तार}$ ये दोनों पदों के घातविस्तार में ताफि इत्यादि के घाताङ्क को ता के ऊपर लिखना चाहिये

$$जैसे \;\; फि''''(अ_1) = च'^4 \frac{ता^4फि}{ताय^4} + ४ च'^3ज' \frac{ता^4फि}{ताय^3तार}$$

$$+ ६ च'^2ज'^2 \frac{ता^4फि}{ताय^2तार^2} + ४ च'ज'^3 \frac{ता^4फि}{तायतार^3} + ज'^4 \frac{ता^4फि}{तार^4}$$

$$इसी \; प्रकार \;\; फि^{(न)}(अ_1) = च'^न \frac{ता^नफि}{ताय^न} + नच'^{न-1}ज' \cdot \frac{ता^नफि}{ताय^{न-1}तार}$$

$$+ \frac{न(न-1)}{2} \cdot च'^{न-2}ज'^2 \frac{ता^नफि}{ताय^{न-2}तार^2} + \cdots + ज'^न \frac{ता^नफि}{तार^न} \;।$$

७०। यदि $स = फ(य, र, ल)$ जहां य, र, और ल परस्पर स्वतन्त्र हैं तो ६८ वें प्रक्रम की युक्ति से यहां भी

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च},\ \text{र}+\text{ज},\ \text{ल}+\text{झ}) = \text{स} + \text{च}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{तार}} + \text{झ}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}$$

$$+\frac{१}{\underline{|२}}\left\{\text{च}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{तार}} + \text{झ}\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}\right\}^{२} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

ऐसा सिद्ध कर सकते हो ।

(६९) प्रक्रम में जो $\text{फि}^{(\text{न})}(\text{अ}_१)$ इस का मान सिद्ध हुआ है उस में स्पष्ट है कि $\text{अ}_१ = 0$ मानने से

$$\text{फि}^{(\text{न})}(0) = \text{च}'^{\text{न}}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}} + \text{नच}'^{\text{न}-१}\text{ज}'\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}\text{तार}}$$

$$+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\cdot\text{च}'^{\text{न}-२}\text{ज}'^{२}\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-२}\text{तार}^{२}} + \cdots + \text{ज}'^{\text{न}}\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{तार}^{\text{न}}}$$

ऐसा होगा ।

इस समीकरण में दहने पक्ष में जो $\text{ता}^{\text{न}}\text{स}$ है उस को यदि ऐसा कल्पना करें कि $\text{ता}^{\text{न}}\text{स} = \text{ता}^{\text{न}}$ और स का घात है तो

$$\text{फि}^{(\text{न})}(0) = \left(\text{च}'\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} + \text{ज}'\frac{\text{ता}}{\text{तार}}\right)^{\text{न}}\text{स}$$ ऐसा भी लिख सकते हो

यहां विद्यार्थियों को जानना चाहिये कि लाघव से शीघ्र स्मरण होने के लिये यह कल्पना मात्र है वास्तव में तास वा $\text{ता}^{\text{न}}\text{स}$ यह एक ही संख्या है इस लिये यहां हमारा अभिप्राय ऐसा है कि $\left(\text{च}'\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} + \text{ज}'\frac{\text{ता}}{\text{तार}}\right)^{\text{न}}$ इस में जो प्रत्येक पदों में $\text{ता}^{\text{न}}$ आवैं गे उन के आगे स को रख देना है ।

ऊपर की युक्ति से लाघव से इसी प्रक्रम के (१) समीकरण को

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च},\ \text{र}+\text{ज},\ \text{ल}+\text{झ}) = \text{स} + \text{च}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{तार}} + \text{झ}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताल}}$$

$$+\frac{१}{\underline{|२}}\left\{\text{च}\cdot\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} + \text{ज}\cdot\frac{\text{ता}}{\text{तार}} + \text{झ}\cdot\frac{\text{ता}}{\text{ताल}}\right\}^{२}\text{स} + \cdots$$

$$+\frac{१}{\underline{|\text{न}}}\left\{\text{च}\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} + \text{ज}\frac{\text{ता}}{\text{तार}} + \text{झ}\frac{\text{ता}}{\text{ताल}}\right\}^{\text{न}}\text{स}$$ ऐसा भी लिख सकते हो ।

इसी प्रकार चार पांच इत्यादि स्वतन्त्र चल राशियें के फल में भी समझ लेना चाहिये।

७१। यदि दो स्वतन्त्र राशियें के फल का महत्तम वा न्यूनतम मान जानना हो तो स्पष्ट है कि

$$फ(य+च,\ र+ज)-फ(य,\ र)=च\frac{तास}{ताय}+ज\frac{तास}{तार}$$

$$+\frac{१}{\underline{|२}}\left\{च^२\ \frac{ता^२स}{ताय^२}+२चज\frac{ता^२स}{तायतार}+ज^२\ \frac{ता^२स}{तार}\right\}+\cdots$$

इस का मान च और ज के किसी मान में एक ही चिह्न विशिष्ट होगा अर्थात् धन ही होगा वा ऋण ही होगा अन्यथा महत्तम वा न्यूनतम कैसे हो सकता है परन्तु ऊपर के समीकरण में दहिने पक्ष में च और ज का ऐसा मान मान सकते हो कि जिस में पहला पद सब पदों से बड़ा हो। इस लिये फ(य+च, र+ज) − फ(य, र) इस का बढ़ना वा घटना $र_१=च\frac{तास}{ताय}+ज\frac{तास}{तार}$ इसी के आधीन है परन्तु च और ज को भिन्न भिन्न मानने से $र_१$ का मान भिन्न भिन्न धन वा ऋण दोनों हो सकता है परन्तु जब फल महत्तम वा न्यूनतम है तो च और ज के किसी मान में $र_१$ का मान एक ही चिह्नात्मक होना चाहिये इस लिये फल के महत्तम वा न्यूनतम में अवश्य $र_१=च\frac{तास}{ताय}+ज\frac{तास}{तार}=0$ होगा परन्तु च और ज दोनों परस्पर स्वतन्त्र हैं

इस लिये $\frac{तास}{ताय}=0$ और $\frac{तास}{तार}=0$ ऐसा होगा।

माना कि $\frac{तास}{ताय}=0$ और $\frac{तास}{तार}=0$ ऐसा मान कर य और र का मान क्रम से अ और क हुआ

तो फ(अ+च, क+ज) − फ(अ, क)

$$=\frac{१}{\underline{|२}}\left\{च^२\cdot\frac{ता^२स}{ताय^२}+२चज\cdot\frac{ता^२स}{तायतार}+ज^२\cdot\frac{ता^२स}{तार^२}\right\}+र_३+\cdots$$

$$\text{जहां } र_3 = \frac{1}{\lfloor 3} \left\{ च^3 \cdot \frac{ता^3स}{ताय^3} + 3\, च^2ज \cdot \frac{ता^3स}{ताय^2तार} + 3\, चज^2 \cdot \frac{ता^3स}{तायतार^2} + ज^3 \cdot \frac{ता^3स}{तार^3} \right\}$$

यहां भी च और ज का अल्प मान मानने से पहला पद और पदों के अपेक्षा बड़ा हो सकता है इस लिये

फ (अ + च, क + ज) − फ (अ क) इस का धनत्व वा ऋणत्व

$$\frac{1}{\lfloor 2} \left\{ च^2 \cdot \frac{ता^2स}{ताय^2} + 2\, चज \cdot \frac{ता^2स}{तायतार} + ज^2 \cdot \frac{ता^2स}{तार^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\lfloor 2} \left\{ च^2 \cdot ख + 2\, चज \cdot ग + ज^2 \cdot घ \right\}$$

इस के वा $च^2ख + 2चजग + ज^2घ$ इस के धनत्व वा ऋणत्व के आधीन है

$$\text{यहां } ख = \frac{ता^2स}{ताय^2},\ ग = \frac{ता^2स}{तायतार} \text{ और } घ = \frac{ता^2स}{तार^2} \text{ है}$$

मानो कि $न = \frac{च}{ज}$ तो

$$च^2 \cdot ख + 2\, चज \cdot ग + ज^2 \cdot घ = \frac{ज^2}{ख} \left(\frac{च^2}{ज^2} ख^2 + 2 \frac{च}{ज} खग + खघ \right) = र_2$$

$$= \frac{ज^2}{ख} \left(न^2 \cdot ख^2 + 2\, न \cdot ख \cdot ग + ग^2 - ग^2 + ख\, घ \right)$$

$$= \frac{ज^2}{ख} \left\{ (नख + ग)^2 + खघ - ग^2 \right\}$$

अब यहां च और ज का भिन्न भिन्न मान मानने से न का मान भी चाहे जितना छोटा वा बड़ा बना सकते हो इस लिये $(नख + ग)^2$ यह $ख \cdot घ - ग^2$ से छोटा और बड़ा दोनों एक ही स्थिति में हो सकता है इस लिये यदि $खघ - ग^2$ ऋणात्मकसंख्या हो तो एक ही स्थिति में $र_2$ का मान धन और ऋण दोनों हो सकते हैं इस दशा में महत्तम वा न्यूनतम कुछ भी न होगा इस लिये महत्तम वा न्यूनतम के स्थिति में $ख \cdot घ - ग^2$ इसे सर्वदा धनात्मक चाहिये अर्थात् $ख \cdot घ$ को धना-

त्मक और $ग^2$ से बड़ा होना चाहिये परन्तु जब $ख\cdot घ = +घ \times +ख = -घ \times -ख$ इस लिये ख और घ एक ही जाति के होंगे अर्थात् दोनों धन हों वा दोनों ऋण हों ।

अब देखो $\frac{ज^2}{ख}\left\{(न\cdot ख+ग)^2+खघ-ग^2\right\}$ इस में भाज्य सर्वदा धनात्मक हुआ इस लिये $र_2$ का धनत्व वा ऋणत्व ख के आधीन हुआ इस लिये यदि ख का मान ऋण हो तो फल आगे वा पीछे घटे गा इस लिये उस क्षण में फल का महत्तममान होगा और यदि ख का धनमान हो तो फलान्तर आगे वा पीछे बढ़े गा इस लिये उस समय में फल का न्यूनतममान होगा ।

यदि $र_2$ वा $\frac{ज^2}{ख}\left\{(नख+ग)^2+ख\cdot घ-ग^2\right\}$ में $ख\cdot घ-ग^2=0$ हो तो भी $र_2$ का धनत्व वा ऋणत्व ख के आधीन है इस लिये यहां भी ख के ऋण और धन के वश से क्रम से फल का महत्तम और न्यूनतममान होगा ।

परन्तु यदि $\frac{ज^2}{ख}(नख+ग)^2$ इस में $न=-\frac{ग}{ख}$ के तो $र_2=0$ इस लिये इस दशा में धन ऋण का चिह्न नहीं प्रगट होगा और तब

$$फ(अ+च, क+ज)-फ(अ, क)=\frac{1}{\underline{|3}}\left\{च^3\frac{ता^3स}{ताय^3}+3च^2ज\frac{ता^3स}{ताय^2तार}+3चज^2\frac{ता^3स}{तायतार^2}+ज^3\frac{ता^3स}{तार^3}\right\}+र_4+\cdots$$ ऐसा होगा ।

यहां भी च और ज का अल्पमान मानने से पहला पद सब पदों से बड़ा हो सकता है इस लिये फलान्तर का धनत्व वा ऋणत्व $र_3$ वा $\frac{1}{\underline{|3}}\left\{च^3\frac{ता^3स}{ताय^3}+3च^2ज\frac{ता^3स}{ताय^2तार}+3चज^2\frac{ता^3स}{तायतार^2}+ज^3\frac{ता^3स}{तार^3}\right\}$ इस के धनत्व वा ऋणत्व के आधीन है परन्तु च, ज का भिन्न भिन्न मान मानने से एक ही स्थिति में $र_3$ इस का मान धन और ऋण दोनों होगा इस लिये इस दशा में महत्तम वा न्यूनतममान दोनों नहीं हों

गे इस हेतु महत्तम और न्यूनतममान में अवश्य $\text{र}_३ = 0$ होना चाहिये और फल महत्तम है वा न्यूनतम है इस का विचार $\text{र}_४$ के ऋणत्व और धनत्व के वश से पूर्ववत् करना चाहिये ।

देखेा यदि ख, ग और घ तीनों शून्य के तुल्य हों तेा भी $\text{र}_२ = 0$ इस लिये यहां भी $\text{र}_३$ और $\text{र}_४$ को ग्रहण कर ऊपर ही के क्रियानुसार महत्तम वा न्यूनतम का विचार करना चाहिये ।

७२ । यदि तीन स्वतन्त्रराशियों के फल का महत्तम वा न्यूनतम मान जानना हेा तेा यहां भी पूर्वोक्त रीति से

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}, \text{र}+\text{ज}, \text{ल}+\text{ञ}) - \text{फ}(\text{य}, \text{र}, \text{ल}) = \text{च}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{तार}}$$

$$+ \text{ञ}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताल}} + \frac{१}{\underline{|२}}\left\{\text{च}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताय}^२} + \text{ज}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{तार}^२} + \text{ञ}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताल}^२}\right.$$

$$\left. + २\text{चज}\cdot\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{तायतार}} + २\text{चञ}\cdot\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{तायताल}} + २\text{जञ}\,\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{तारताल}}\right\} + \text{र}_१ + \cdots$$

यहां भी च, ज, और ञ का ऐसा अल्पमान मान सकते हेा जिस में पहला पद और पदों से बड़ा हेा इस लिये फलान्तर का धनत्व वा ऋणत्व पहले पद के आधीन हेा गा और महत्तम वा न्यूनतम की स्थिति में $\text{च}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{ज}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{तार}} + \text{ञ}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताल}} = 0$ ऐसा होगा परन्तु च, ज और ञ स्वतन्त्र हैं इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = 0$, $\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = 0$, $\frac{\text{तास}}{\text{ताल}} = 0$ ऐसा होना चाहिये और इस पर से जेा य, र और ल के मान आवें गे उन का उत्थापन ऊपर के समीकरण के दूसरे पद में देने से

$$\frac{१}{\underline{|२}}(\text{ख}\cdot\text{च}^२ + \text{ग}\cdot\text{ज}^२ + \text{घ}\cdot\text{ञ}^२ + २\text{ख}'\text{जञ} + २\text{ग}'\text{चञ} + २\text{घ}'\text{चज})$$

ऐसा होगा

यहां $\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताय}^२} = \text{ख}$, $\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{तार}^२} = \text{ग}$, $\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताल}^२} = \text{घ}$

$$\frac{ता^2स}{तारताल} = ख', \quad \frac{ता^2स}{तायताल} = ग', \quad \frac{ता^2स}{तायतार} = घ'$$

इस लिये फलान्तर का धनत्व वा ऋणत्व

$$ख \cdot च^2 + गज^2 + घञ^2 + २ख'जञ + २ग'चञ + २घ'चज$$

इस के आधीन है इस में यदि च = ढ · ञ, ज = ड · ञ तो

$$खच^2 + गज^2 + घञ^2 + २ख'ज \cdot ञ + २ग'चञ + २घ'चज$$
$$= ख \cdot ट^2 \cdot ञ^2 + ग \cdot ड^2 \cdot ञ^2 + घ \cdot ञ^2 + २ख'डञ^2 + २ग'ढञ^2 + २घ'टड \cdot ञ^2$$
$$= \frac{ञ^2}{ख}(ख^2ट^2 + खगड^2 + खघ + २खख'ड + २खग'ढ + २खघ'टड)$$
$$= \frac{ञ^2}{ख}\left\{(खट + ग' + घ'ड)^2 + (खग - घ'^2)ड^2 + २(खख' - ग'घ')ड + खघ - ग'^2\right\} \quad \cdots\cdots (१)$$

अब यहां फल का महत्तम वा न्यूनतम मान के लिये (१) इस के अन्तिम तीनों पद मिल के माना कि धन है

इस लिये $(खग - घ'^2)$ इसे और $खघ - ग'^2$ इसे धन होना चाहिये और $२ड\sqrt{खग - घ'^2}\sqrt{खघ - ग'^2} > २ड(खख' - ग'घ')$ वा $(खग - घ'^2)(खघ - ग'^2) > (खख' - ग'घ')^2$ हो तो सर्वदा (१) समीकरण का भाज्य धनात्मक होगा इस लिये इस दशा में यदि ख ऋण हो तो महत्तममान और यदि ख धन हो तो न्यूनतम मान होगा।

इस प्रकार और भी बहुत विचार कर सकते हो ।

बोध होने के लिये कुछ उदाहरण कर के दिखलाते हैं ।

(१) $स = य + र + \frac{अ}{य} + \frac{क}{र} + १$ यहां स का महत्तम या न्यूनतम मान निकालना है ।

७१ प्रक्रम से,

$$\frac{तास}{ताय} = १ - \frac{अ}{य^2} = 0 \quad \therefore \quad य = \sqrt{अ}$$

$$\frac{तास}{ताय} = १ - \frac{क}{र^2} = 0 \quad \therefore \quad र = \sqrt{क}$$

$$\text{और} \quad \frac{ता^2स}{ताय^2} = \frac{२अ}{य^3} \quad \therefore \quad ख, = \frac{२}{\sqrt{अ}}$$

$$\frac{ता^2स}{तायतार} = 0 \quad \therefore \quad ग = 0$$

$$\frac{ता^2स}{तार^2} = \frac{२क}{र^3} \quad \therefore \quad घ = \frac{२}{\sqrt{क}}$$

और $ख \cdot घ = \frac{४}{\sqrt{अक}}$ यह बड़ा है $ग^2$ से और ख का मान धन है इस लिये

$$स = य + र + \frac{अ}{य} + \frac{क}{र} + १ = \sqrt{अ} + \sqrt{क} + \sqrt{अ} + \sqrt{क} + १$$

$= २\sqrt{अ} + २\sqrt{क} + १$ यह न्यूनतम मान हुआ।

(२) $स = य^3 + र^3 + ३ अयर$ इस में स का महत्तम वा न्यूनतम मान जानना है

यहां $\frac{तास}{ताय} = ३ य^2 + ३ अर = 0 = य^3 + अयर$

$$\frac{तास}{तार} = ३ र^2 + ३ अय = 0 = र^3 + अयर$$

$$\therefore \quad य = + र$$

उत्थापन से, $र^2 + अर = 0 \therefore र = - अ$ और $य = - अ$

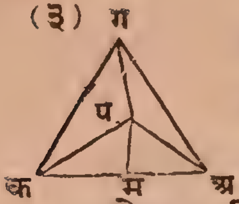
और $\frac{ता^2स}{ताय^2} = ६ य \quad \therefore \quad ख = - ६ अ$

$$\frac{ता^2स}{तायतार} = ३ अ \quad \therefore \quad ग = ३ अ$$

$$\frac{ता^2स}{तार^2} = ६ र \quad \therefore \quad घ = - ६ अ$$

और $ख \cdot घ = ३६ अ^2$ यह $ग^2 = ९ अ^2$ इस से बड़ा है और ख का मान ऋणात्मक है इस लिये स का मान

$= य^3 + र^3 + ३ अयर = - अ^3 - अ^3 + ३ अ^3 = अ^3$ यह महत्तम हुआ।

(३) 

अकग त्रिभुज में एक प विन्दु ऐसा जानना है कि अप + गप + पक यह न्यूनतम हो । मानो गक = अ, अग = क, अक = ग,

और प विन्दु से अक पर बड़ा लम्ब = पम = र, अम = य

∠ अपम = ष, ∠ कपम = ब, ∠ गपम = फ

और लाघवार्थ अप = ह, गप = त्त, पक = ज्ञ मानो

तो, $ह^2 = य^2 + र^2$, $ज्ञ^2 = (ग - य)^2 + र^2$,

$त्त^2 = (क \cdot कोज्याअ - य)^2 + (क \cdot ज्याअ - र)^2$

और जब ह + ज्ञ + त्त = न्यूनतम

$$\text{तो} \quad \frac{ताह}{ताय} + \frac{ताज्ञ}{ताय} + \frac{तात्त}{ताय} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

$$\text{और} \quad \frac{ताह}{तार} + \frac{ताज्ञ}{तार} + \frac{तात्त}{तार} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

अब ऊपर के समीकरणों से

$$\frac{ताह}{ताय} = \frac{य}{ह} = ज्याष$$

$$\frac{ताज्ञ}{ताय} = -\frac{(ग - य)}{ज्ञ} = -ज्याब$$

$$\frac{तात्त}{ताय} = -\frac{क \cdot कोज्याअ - य}{त्त} = -ज्याफ$$

$$\frac{ताह}{तार} = \frac{र}{ह} = कोज्याष$$

$$\frac{ताज्ञ}{तार} = \frac{र}{ज्ञ} = कोज्याब$$

$$\frac{तात्त}{तार} = -\frac{कज्याअ - र}{त्त} = कोज्याफ$$

इन का उत्थापन (१) और (२) समीकरण में देने से और पक्षान्तरानयन से

ज्याप = ज्याब + ज्याफ

कोज्याप = – (कोज्याब + कोज्याफ)

दोनों का वर्ग कर जोड़ देने से

१ = २ + २ कोज्या (फ – ब)

इस लिये कोज्या (फ – ब) = $-\frac{१}{२}$ = कोज्या १२०°

इस प्रकार से सिद्ध हुआ कि $\angle$ गपक = १२०°। इसी प्रकार से यह भी सिद्ध हो जायगा कि $\angle$ अपक = $\angle$ अपग = १२०°। इस पर से यह सिद्ध होता है कि त्रिभुज के तीनों भुज पर एक एक ऐसा चाप बनावो (रेखागणित के तीसरे अध्याय से) जिस के अन्तर्गतकोण का मान = १२०° हो तो उन चापों का योग विन्दु अभिष्ट विन्दु होगा।

यहां पर दूसरा सम्बन्ध निकालने से स्पष्ट हो जायगा कि अभीष्टफल का मान न्यूनतम ही हो गा।

देखो यदि त्रिभुज में कोई कोण = १२०° तो पूर्व युक्ति से स्पष्ट है कि वह कोण विन्दु ही अभीष्ट विन्दु होगा और यदि त्रिभुज में कोई कोण १२०° से बड़ा हो तो वास्तव न्यूनतम मान पूर्व युक्ति से न सिद्ध होगा परन्तु ऐसी दशा में भी स्पष्ट है कि प विन्दु त्रिभुज के उसी कोण विन्दु पर होगा क्यों कि बाहर लेने से केवल दो ही रेखा का योग त्रिभुज के दो भुजों के योग से अधिक होगा अर्थात् यदि पूर्व त्रिभुज में $\angle$ गकअ > १२०° और प विन्दु को क से बाहर मानो तो केवल अप + पग > अक + कग इस लिये अप + पग + पक बहुत ही अधिक अ + ग से होगा इस लिये न्यूनतम मान में अवश्य प विन्दु क विन्दु ही पर होगा।

इस दशा में पूर्व युक्ति का इस लिये व्यभिचार होता है क्यों कि $\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$ और $\frac{\text{ताह}}{\text{तार}}$ दोनों का रूप $\frac{0}{0}$ ऐसा हो जाता है इस लिये राशियों का मान स्पष्ट नहीं प्रगट होता।

(४) स = स्पय + स्पर + कोस्प (य + र) इस में स का न्यूनतम मान जानना है

यहां $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ = छे²य – कोछे² (य + र) = ०

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{छे}^2\text{र} - \text{कोछे}^2(\text{य} + \text{र}) = 0$$

इस लिये छेय = छेर = कोछे (य + र)

इस समीकरण पर से ज्याय $= \frac{1}{2}$ ∴ य $= \frac{\pi}{6}$ = र

इस य और र के मान पर से स का पूर्व युक्ति से न्यूनतम मान $= \sqrt{3}$ यह सिद्ध होगा । यहां और भी अनेक य और र के मान सिद्ध होते हैं ।

(५) स $= \frac{\text{यरल}}{(\text{अ} + \text{य})(\text{य} + \text{र})(\text{र} + \text{ल})(\text{च} + \text{ल})}$ इस में स का महत्तम वा न्यूनतममान जानना है ।

यहां ७२ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{रल}(\text{अर} - \text{य}^2)}{(\text{अ} + \text{य})^2(\text{य} + \text{र})^2(\text{र} + \text{ल})(\text{च} + \text{ल})} = \frac{\text{स}(\text{अर} - \text{य}^2)}{\text{य}(\text{अ} + \text{य})(\text{य} + \text{र})} = 0$$

इसी प्रकार, $\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{स}(\text{यल} - \text{र}^2)}{\text{र}(\text{य} + \text{र})(\text{ल} + \text{र})} = 0$

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताल}} = \frac{\text{स}(\text{चर} - \text{ल}^2)}{\text{ल}(\text{र} + \text{ल})(\text{ल} + \text{च})} = 0$$

इन पर से अर $-$ य$^2 = 0$, यल $-$ र$^2 = 0$, चर $-$ ल$^2 = 0$

∴ $\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \frac{\text{र}}{\text{य}} = \frac{\text{च}}{\text{ल}} = \frac{\text{ल}}{\text{र}}$ चारो का परस्पर घात कर चतुर्घात-मूल लेने से

$$\sqrt[4]{\frac{\text{य}}{\text{अ}} \cdot \frac{\text{र}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{च}}{\text{ल}} \cdot \frac{\text{ल}}{\text{र}}} = \sqrt[4]{\frac{\text{च}}{\text{अ}}} = \text{त}$$

इस पर से य = अत, र = यत = अत^2, ल = रत = अत^3

अब द्वितीय सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = -\frac{2\text{यस}}{\text{य}(\text{अ} + \text{य})(\text{य} + \text{र})} + \text{इत्या}_0$$

यहां इत्या० ये सब शून्य के तुल्य हो जायं गे जब य, र और ल के स्थान में उन के व्यक्त मान का उत्थापन दिया जाय गा ।

$$\therefore\ ख = -\frac{२स}{अ^२ त(१+त)^२} = -\frac{२}{अ^३ त(१+त)^६}$$

इसी प्रकार ग, घ इत्यादि का मान भी निकल सकता है फिर उन पर से यह सिद्ध हो जायगा कि स का मान महत्तम है।

७३। कभी कभी अनेक चलराशियों में ऐसा परस्पर सम्बन्ध रहता है कि उन में बहुत चलराशि दूसरों के आधीन रहते हैं इस दशा में सब परतन्त्र राशियों का मान स्वतन्त्र राशियों के रूप में लाकर तब महत्तम वा न्यूनतम मान निकालो।

जैसे, $स = य + र + ल$, और $\frac{अ}{य} + \frac{क}{र} + \frac{च}{ल} = १$

यहां स का न्यूनतम मान जानना है।

यहां देखो कोई एक चलराशि अन्य दो चलराशियों के आधीन है इस लिये य का मान र और ल के रूप में लाने से

$$स = \frac{अ \cdot रल}{रल - चर - कल} + र + ल$$

$$फिर,\ \frac{ता स}{ता र} = १ - \frac{अकल^२}{(रल - चर - कल)^२} = ०$$

$$\frac{ता स}{ता ल} = १ - \frac{अच \cdot र^२}{(रल - चर - कल)^२} = ०$$

$$\therefore\ \frac{र^२}{ल^२} = \frac{क}{च}\ और\ र = ल\sqrt{\frac{क}{च}}$$

$$अब\ १ - \frac{अच \cdot र^२}{(रल - चर - कल)^२} = ०$$

$$= १ - \frac{अक \cdot ल^२}{\left(ल^२\sqrt{\frac{क}{च}} - ल\sqrt{कच} - कल\right)^२}$$

$$\therefore\ ल\sqrt{अक} = ल^२\sqrt{\frac{क}{च}} - ल\sqrt{कच} - कल$$

$$वा\ \sqrt{अक} = ल\sqrt{\frac{क}{च}} - \sqrt{कच} - क$$

$$\therefore\ ल = \sqrt{\frac{च}{क}}(\sqrt{अक} + \sqrt{कच} + क)$$

$$= \sqrt{च}(\sqrt{अ} + \sqrt{च} + \sqrt{क})$$

इस पर से $र = \sqrt{क}(\sqrt{अ} + \sqrt{च} + \sqrt{क})$

$य = \sqrt{अ}(\sqrt{अ} + \sqrt{च} + \sqrt{क})$

इस लिये $स = (\sqrt{अ} + \sqrt{क} + \sqrt{च})(\sqrt{अ} + \sqrt{क} + \sqrt{च})$

$= (\sqrt{अ} + \sqrt{क} + \sqrt{च})^2$ यह न्यूनतम हुआ ।

७४ । ७३ वें प्रक्रम में जो परतन्त्रराशियों का मान दूसरों के रूप में लाने को लिखा है उस में कभीं कभीं समीकरण की स्थिति के वश से बहुत काठिन्य से दूसरों के रूप में परतन्त्रराशियों का मान निकलैगा इस लिये नीचे लिखी हुई युक्ति से लाघव से महत्तम वा न्यूनतम मान निकलै गा ।

मानो कि $स = फ(य, र, ल, व, \cdots) = फ$

$$\text{और}\quad \left.\begin{aligned} फ_1(य, र, ल, व, \cdots) = 0 = फ_1 \\ फ_2(य, र, ल, व, \cdots) = 0 = फ_2 \\ फ_3(य, र, ल, व, \cdots) = 0 = फ_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

और कल्पना करो कि य, र, ल, व इत्यादि "का" चलराशि के फल हैं

$$\text{और}\quad \frac{ताय}{ताका} = डाय, \frac{तार}{ताका} = डार, \frac{ताल}{ताका} = डाल, \cdots$$

$$\text{तो}\quad \frac{ताफ}{ताका} = \frac{ताफ}{ताय} \cdot डाय + \frac{ताफ}{तार} \cdot डार + \frac{ताफ}{ताल} \cdot डाल + \cdots \quad (२)$$

और (१) समीकरण से

$$\left.\begin{aligned} &\frac{ताफ_1}{ताय} डाय + \frac{ताफ_1}{तार} डार + \frac{ताफ_1}{ताल} डाल + \cdots = 0 \\ &\frac{ताफ_2}{ताय} डाय + \frac{ताफ_2}{तार} डार + \frac{ताफ_2}{ताल} डाल + \cdots = 0 \\ &\frac{ताफ_3}{ताय} डाय + \frac{ताफ_3}{तार} डार + \frac{ताफ_3}{ताल} डाल + \cdots = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{ताफ_न}{ताय} डाय + \frac{ताफ_न}{तार} डार + \frac{ताफ_न}{ताल} डाल + \cdots = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (३)$$

इन प्रत्येकों को $इ_1, इ_2, इ_3$ इत्यादि अव्यक्तराशियों से गुण कर (२) में जोड़ देने से भी (२) का मान ज्यों का त्यों रहे गा क्यों कि ये सब शून्य के समान हैं।

इस लिये

$$\frac{ताफ}{ताका} = \left\{\frac{ताफ}{ताय} + इ_1 \frac{ताफ_1}{ताय} + इ_2 \frac{ताफ_2}{ताय} + इ_3 \frac{ताफ_3}{ताय} + \cdots\right\} डाय$$
$$+ \left\{\frac{ताफ}{तार} + इ_1 \frac{ताफ_1}{तार} + इ_2 \frac{ताफ_2}{तार} + इ_3 \frac{ताफ_3}{तार} + \cdots\right\} डार$$
$$+ \left\{\frac{ताफ}{ताल} + इ_1 \frac{ताफ_1}{ताल} + इ_2 \frac{ताफ_2}{ताल} + इ_3 \frac{ताफ_3}{ताल} + \cdots\right\} डाल$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (४)$$

अब जब फ का महत्तम वा न्यूनतम मान हो गा तब $\frac{ताफ}{ताका} = 0$ इस लिये (४) समीकरण में डाय, डार इत्यादि के गुणक भी शून्य के तुल्य हों गे और इन गुणकों को शून्य के तुल्य कर $इ_1, इ_2$ इत्यादि के मान भी प्रगट हो जायं गे फिर इन पर से य, र, ल इत्यादि के मान भी शीघ्र विदित हो जायं गे। और यदि पहले ही से यह विदित हो कि फल अवश्य महत्तम या न्यूनतम हो गा तो $\frac{ता^2फ}{ताका^2}$ इस के मान की कुछ आवश्यकता न हो गी अन्यथा $\frac{ता^2फ}{ताका^2}$ इस का मान निकालना पड़े गा।

७४ वें प्रक्रम का बोध होने के लिये कुछ उदाहरण कर के दिखलाते हैं।

(१) $स = य^2 + र^2 + ल^2$ इस का न्यूनतममान जानना है

$$\left.\begin{array}{l} जहां\ अय + कर + गल - 1 = 0 \\ अ'य + क'र + ग'ल - 1 = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (१)$$

मानो कि स = फ, इस लिये

$$\frac{ताफ}{ताका} = २यडाय + २रडार + २लडाल$$

और (१) समीकरण से

$$\left.\begin{aligned} \text{अ}\,\text{डाय} + \text{क}\,\text{डार} + \text{ग}\,\text{डाल} = 0 \\ \text{अ}'\text{डाय} + \text{क}'\text{डार} + \text{ग}'\text{डाल} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (२)$$

(२) इसी समीकरण को इ_1 और इ_2 से क्रम से गुण $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताका}}$ में जोड़ देने से

$$\frac{\text{ताफ}}{\text{ताका}} = (२\text{य} + \text{इ}_1\text{अ} + \text{इ}_2\text{अ}')\,\text{डाय} + (२\text{र} + \text{इ}_1\text{क} + \text{इ}_2\text{क}')\,\text{डार} + (२\text{ल} + \text{इ}_1\text{ग} + \text{इ}_2\text{ग}')\,\text{डाल}$$

$$\text{इस लिये}\quad \left.\begin{aligned} २\text{य} + \text{इ}_1\text{अ} + \text{इ}_2\text{अ}' = 0 \\ २\text{र} + \text{इ}_1\text{क} + \text{इ}_2\text{क}' = 0 \\ २\text{ल} + \text{इ}_1\text{ग} + \text{इ}_2\text{ग}' = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (३)$$

(३) इसे क्रम से अ, क, ग से गुण कर (१) समीकरण के बल से

$$२ + \text{इ}_1(\text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ग}^2) + \text{इ}_2(\text{अ}\cdot\text{अ}' + \text{क}\cdot\text{क}' + \text{ग}\cdot\text{ग}') = 0, \cdots (४)$$

ऐसा होगा। और अ', क', ग' से गुण देने से पूर्ववत्

$$२ + \text{इ}_2(\text{अ}'^2 + \text{क}'^2 + \text{ग}'^2) + \text{इ}_1(\text{अ}\cdot\text{अ}' + \text{कक}' + \text{गग}') = 0, \cdots (५)$$

देखो (४) और (५) वें समीकरण से इ_1 और इ_2 के मान प्रगट हो जायं गे फिर (३) समीकरण से य, र, ल के मान भी व्यक्त हो जायं गे और यदि (३) समीकरण में प्रत्येक को क्रम से य, र, ल से गुण कर जोड़ देवो तो $२\text{फ} + \text{इ}_1 + \text{इ}_2 = 0$ ऐसा होगा इस से फ भी निकल आवे गा।

(२) $\text{स} = \text{य}^4\text{रल}^2$ यह जब महत्तम है तब य, र, ल का मान निकालना है जहां $\text{अ}^2\text{य}^2 + २\text{कर}^3 + \text{ल}^4 = \text{ग}^4$

यहां स = फ और $\text{फ}_1 = \text{अ}^2\text{य}^2 + २\text{कर}^3 + \text{ल}^4 - \text{ग}^4$

$$\text{तब,}\quad \frac{\text{ताफ}}{\text{ताका}} = ४\,\text{य}^3\text{रल}^2\text{डाय} + \text{य}^4\text{ल}^2\text{डार} + २\,\text{य}^4\text{रलडाल}$$

$$= \text{स}\left\{\frac{४\,\text{डाय}}{\text{य}} + \frac{\text{डार}}{\text{र}} + \frac{२\,\text{डाल}}{\text{ल}}\right\} = 0$$

$$= \frac{४\,\text{डाय}}{\text{य}} + \frac{\text{डार}}{\text{र}} + \frac{२\,\text{डाल}}{\text{ल}} \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{और}\quad २\,\text{अ}^2\text{यडाय} + ६\,\text{कर}^2\text{डार} + ४\,\text{ल}^3\text{डाल} = 0$$

$$= \text{अ}^2\text{य}\,\text{डाय} + ३\,\text{कर}^2\text{डार} + २\,\text{ल}^3\text{डाल} \cdots (२)$$

(२) को इ_1 से गुण कर (१) में जोड़ देने से

$$\left(\frac{४}{\text{य}} + \text{इ}_1\text{अ}^2\text{य}\right)\text{डाय} + \left(\frac{१}{\text{र}} + ३\,\text{इ}_1\,\text{कर}^2\right)\text{डार} + \left(\frac{२}{\text{ल}} + २\,\text{इ}_1\text{ल}^3\right)\text{डाल} = 0$$

$$\text{इस लिये,}\quad \left.\begin{aligned} \frac{४}{\text{य}} + \text{इ}_1\text{अ}^2\text{य} &= 0 \\ \frac{१}{\text{र}} + ३\,\text{इ}_1\text{कर}^2 &= 0 \\ \frac{१}{\text{ल}} + \text{इ}_1\text{ल}^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (३)$$

(३) को क्रम से य, $\frac{२\text{र}}{३}$ और ल से गुण कर जोड़ देने से

$$\frac{१७}{३} + \text{इ}_1(\text{अ}^2\text{य}^2 + २\,\text{कर}^3 + \text{ल}^4) = 0 = \frac{१७}{३} + \text{इ}_1\,\text{ग}^4$$

इस लिये $\text{इ}_1 = -\frac{१७}{३\,\text{ग}^4}$ इस का उत्थापन (३) समीकरण में देने से

$$\text{य}^2 = \frac{१२\,\text{ग}^4}{१७\,\text{अ}^2} \quad \therefore\ \text{य} = \frac{\text{ग}^2}{\text{अ}}\sqrt{\frac{१२}{१७}}$$

$$\text{र}^3 = \frac{\text{ग}^4}{१७\,\text{क}} \quad \therefore\ \text{र} = \sqrt[3]{\frac{\text{ग}^4}{१७\,\text{क}}}$$

$$\text{और}\ \ \text{ल}^4 = \frac{३\,\text{ग}^4}{१७} \quad \therefore\ \text{ल} = \text{ग}\sqrt[4]{\frac{३}{१७}}\ ।$$

(३) $\text{स} = \text{य}^2 + \text{र}^2 + \text{ल}^2 + \cdots = \text{फ}$ इस में स का न्यूनतममान निकालना है जहां $\text{अय} + \text{कर} + \text{गल} + \cdots - \text{स्थि} = 0$

$$\text{यहां भी}\ \frac{\text{ताफ}}{\text{ताक्ष}} = २\text{य}\cdot\text{डाय} + २\,\text{र}\cdot\text{डार} + २\,\text{ल}\cdot\text{डाल} + \cdots = 0$$

$$= \text{य}\cdot\text{डाय} + \text{र}\cdot\text{डार} + \text{ल}\cdot\text{डाल} + \cdots\cdots\cdots (१)$$

और, $\text{अडाय} + \text{कडार} + \text{गडाल} + \cdots = 0$ इसे इ_1 से गुण कर (१) समीकरण में जोड़ डाय, डार इत्यादि के गुणकों को शून्य के समान करने से

$$\left.\begin{aligned} \text{य} + \text{इ}_1\text{अ} &= 0 \\ \text{र} + \text{इ}_1\text{क} &= 0 \\ \text{ल} + \text{इ}_1\,\text{ग} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots& \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

(२) समीकरण में प्रत्येक को क्रम से अ, क, ग, इत्यादि से गुणकर जोड़ देने से

$$स्थि + इ_1 (अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots) = 0$$

$\therefore\ इ_1 = \dfrac{-स्थि}{अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots}$ इस का उत्थापन (२) समीकरण में देने से

$$य = \frac{स्थि \cdot अ}{अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots}$$

$$र = \frac{स्थि \cdot क}{अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots}$$

$$ल = \frac{स्थि \cdot ग}{अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots}$$

....

इस लिये $य^2 + र^2 + ल^2 + \cdots = स = \dfrac{स्थि^2 \cdot अ^2}{(अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots)^2}$

$$+ \frac{स्थि^2 \cdot क^2}{(अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots)^2} + \frac{स्थि^2 \cdot ग^2}{(अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots)^2} + \cdots$$

$$= \frac{स्थि^2 (अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots)}{(अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots)^2} = \frac{स्थि^2}{अ^2 + क^2 + ग^2 + \cdots}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $स = य^3 र^2 \left(1 - \frac{य + र}{6}\right)$ स के महत्तममान में य और र का मान बतावो? । उत्तर $य = 3, र = 2$ ।

(२) $स = \dfrac{य^4 + र^4}{4} - \dfrac{य^2 + र^2}{2} + यर$ इस में सिद्ध करो कि यदि $य = र = 0$, तो न महत्तम न न्यूनतम मान होगा और यदि $य = \pm\sqrt{2}$ और $र = \mp\sqrt{2}$ तो स का न्यूनतममान हो गा ।

(३) $स = 3 र^4 - 24 र^3 + 54 र^2 - 24 र + 3 य^3 - 9 य^2 - 9 य$ इस का महत्तम और न्यूनतममान बतावो? ।

उत्तर $स = ९ + १२\sqrt{२} =$ महत्तम,

और $स = -१८ - १२\sqrt{२} =$ न्यूनतम।

(४) $स = ३ य^२ + ३ यर + ३ र^२ - ३ अय - ३ कर + अक + ग$ इस में स का न्यूनतममान निकालो?।

उत्तर $स = ग - (अ - क)^२$।

(५) $६ यर + ४ यल + ३ रल$ इस का महत्तममान निकालो?। यदि $य + र + ल = अ$,

उत्तर, महत्तममान में $य = \frac{२१ अ}{४७}$, $र = \frac{२० अ}{४७}$ और, $ल = \frac{६ अ}{४७}$।

(६) $स = \frac{१ + य^२ + र^२}{१ - य\sqrt{५} - र\sqrt{३}}$ यहां स के महत्तम और न्यूनतममान में य और र का मान निकालो?।

उत्तर, महत्तममान में $य = \frac{\sqrt{५}}{२}$ और $र = \frac{\sqrt{३}}{२}$,

न्यूनतममान में $य = -\frac{\sqrt{५}}{४}$ और $र = -\frac{\sqrt{३}}{४}$।

(७) $स = य^३ + यर(र - ३ अ)$ इस के न्यूनतममान में य और र का क्या मान है?।

उत्तर $य = \pm\frac{अ}{२}\sqrt{३}$ और $र = \frac{३}{२} अ$।

(८) $स = यर\left(१ - \frac{य}{अ}\right)\left(१ - \frac{र}{क}\right)$ इस के महत्तममान में य, र का क्या मान है।

उत्तर $य = \frac{अ}{२}$, $र = \frac{क}{२}$।

(९) $स = \sqrt{\left\{\left(१ - \frac{य}{३}\right)\left(१ - \frac{र}{३}\right)\left(\frac{य + र}{३} - १\right)\right\}}$ यहां सिद्ध करो कि यदि $य = र = २$ तो स का महत्तममान हो गा?।

(१०) $\frac{१ + २य + ३र}{\sqrt{१ + य^२ + र^२}}$ यह महत्तम होगा? जब $य = २$ और $र = ३$।

(११) $स = यरल$ इस में स का महत्तममान निकालो यदि

$$\frac{य^2}{४}+\frac{र^2}{९}+\frac{ल^2}{३}=१ ।$$ उत्तर स = २ = महत्तम ।

(१२) स = अय + कर + गल इस का महत्तममान निकालो यदि $य^2+र^2+ल^2=१$ ।

उत्तर, स के महत्तममान में $य=\frac{अ}{\sqrt{अ^2+क^2+ग^2}}$,

$$र=\frac{क}{\sqrt{अ^2+क^2+ग^2}} \text{ और } ल=\frac{ग}{\sqrt{अ^2+क^2+ग^2}} ।$$

(१३) $स=\frac{यर(अ-यर)}{य+र}$ इस के महत्तममान में य और र का मान निकालो? । उत्तर $य=र=\sqrt{\frac{अ}{३}}$ ।

(१४) स = ज्याय · ज्यार · ज्या (य + र) इस के महत्तममान में य और र का मान निकालो? । उत्तर $य=\frac{\pi}{३}=र$ ।

(१५) स = (य + १) (र + १) (ल + १) इस के महत्तममान में य, र, और ल के मान निकालो यदि $अ^य क^र ग^ल = स्थि$ ।

$$\text{उत्तर, } य=\frac{लास्थि+लाग+लाक-२\,लाअ}{३\,लाअ}=\frac{ला\left(\frac{स्थि\cdot क\cdot ग}{अ^2}\right)}{३\,लाअ}$$

$$र=\frac{ला\left(\frac{स्थि\cdot अ\cdot ग}{क^2}\right)}{३\,लाक} \text{ और } ल=\frac{ला\left(\frac{स्थि\cdot अ\cdot क}{ग^2}\right)}{३\,लाग} ।$$

(१६) $स=\frac{य^2र^2+अय+अर}{यर}$ इस के न्यूनतममान में य और र का क्या मान होगा? । उत्तर $य=र=\sqrt[3]{अ}$ ।

(१७) $स=य^मर^न(अ-य-र)^क$ इस के महत्तममान में य और र का मान निकालो? ।

$$\text{उत्तर } य=\frac{म\cdot अ}{म+न+क} \text{ और } र=\frac{अ\cdot न}{म+न+क} ।$$

(१८) $स = ३य^2 + ३र^2 + अ^2 + क^2 - २अय$
$- २क$ (यकोज्याख + रज्याख) इस के न्यूनतममान में य, और र का मान निकालो? ।

उत्तर $य = \frac{1}{3}$(अ + क कोज्याख) और $र = \frac{1}{3}$ कज्याख ।

(१९) $स = ४र^2 + २य^2 + २(अ - य)^2$
$- २क \{$ रज्याख + (अ - य) कोज्याख $\} + क^2 + ग^2$
$- २ग$ (रज्याघ + यकोज्याघ) यहां स के न्यूनतममान में य और र का क्या मान होगा? ।

उत्तर, $य = \frac{1}{4}$ (२अ + गकोज्याघ - ककोज्याख)
और $र = \frac{1}{4}$ (गज्याघ + कज्याख) ।

(२०) $स = \frac{घ}{५}$ (अ · कोछेय + क · कोछेर + ग · कोछेल)
और $म^2 = \frac{घ}{३}$ (अकोस्पय + ककोस्पर + गकोस्पल)

तो सिद्ध करो कि स के न्यूनतममान में य, र और ल आपस में समान हों गे? ।

(२१) $य^2 र^3 ल^4$ इस का महत्तममान क्या होगा?
यदि $२य + ३र + ४ल = १८$ । उत्तर, ५१२ ।

(२२) $य^2 + र^2 + ल^2 + य - २ल - यर$ इस के न्यूनतममान में सिद्ध करो कि $य = -\frac{2}{3}$, $र = -\frac{1}{3}$ और $ल = १$ के होगा? ।

(२३) $स = य^2 + र^2 + ल^2 + व^2$ और $य + २र + ३ल + ४व = ३०$ तो सिद्ध करो कि स का न्यूनतममान = ३० ? ।

(२४) $य^4 + र^4 + ल^4$ इस का न्यूनतममान क्या होगा?
यदि $यरल = स्थि^3$ उत्तर, $३ स्थि^4$ ।

(२५) $य^5 + र^5 + ल^5 + व^5$ इस का न्यूनतममान क्या होगा? यदि $यरलव = स्थि^4$ । उत्तर $४ स्थि^5$ ।

(२६) $य_1^{न+1} + य_2^{न+1} + \cdots + य_न^{न+1}$ इस का न्यूनतममान क्या होगा? यदि $य_1 य_2 \cdots य_न = स्थि^न$,

उत्तर, $न \cdot स्थि^{न+1}$ ।

(२७) $स = अ \cdot य^2 र^3 ल^4 - य^3 र^3 ल^4 - य^2 र^4 ल^4 - य^2 र^3 ल^5$ इस के महत्तममान में य, र, और ल का क्या मान होगा? ।

उत्तर, $य = \frac{अ}{५}$, $र = \frac{३अ}{१०}$ और $ल = \frac{२अ}{५}$ ।

(२८) $स = अ^2 य^2 + क^2 र^2 + ग^2 ल^2, य^2 + र^2 + ल^2 = १$

और, $पय + मर + नल = 0$

इस स्थिति में सिद्ध करो कि स के महत्तम और न्यूनतम मान में

$$\frac{प^2}{स - अ^2} + \frac{म^2}{स - क^2} + \frac{न^2}{स - ग^2} = 0$$ ऐसा एक समीकरण हो गा? ।

(२९) $स = य^2 + र^2$ यहां स के महत्तम और न्यूनतम मान में सिद्ध करो कि $स^2 क^2 = ४ (फ - सअ)(फ - सग)$ ऐसा एक समीकरण हो गा? । यहां $फ = अय^2 + कयर + गर^2$ ।

(३०) $(अय + कर + गल + घव + \cdots) इ^{-अ_1^2 य^2 - क_1 र^2 - ग_1 ल^2 - घ_1 व^2 - \cdots}$
इस के महत्तम मान में य, र, ल, व इत्यादि के क्या मान हों गे? ।

$$यदि\ इ_1 = \sqrt{\left(\frac{२ अ^2}{अ_1{}^2} + \frac{२ क^2}{क_1{}^2} + \frac{२ ग^2}{ग_1{}^2} + \cdots\right)} ।$$

$$तो\ य = \frac{अ}{अ_1{}^2 इ_1}, र = \frac{क}{क_1{}^2 इ_1}, ल = \frac{ग}{ग_1{}^2 इ_1}\ इत्यादि$$

(३१) $(अय + कर + गल) क^{-य^2} ग^{-र^2} अ^{-ल^2}$ इस के महत्तम में य, र, और ल के क्या मान हों गे ।

$$उत्तर\ यदि\ \frac{१}{इ_1} = \sqrt{\left(\frac{२ अ^2}{लाक} + \frac{२ क^2}{लाग} + \frac{२ ग^2}{लाअ}\right)}$$

$$तो\ य = \frac{अ \cdot इ_1}{लाक}, र = \frac{क \cdot इ_1}{लाग}\ और\ ल = \frac{ग \cdot इ_1}{लाअ} ।$$

(३२) १८ का ऐसा तीन खण्ड करो कि प्रथम का वर्ग दूसरे का घन तीसरे का चतुर्घात इन का घात महत्तम हो ।

उत्तर, पहला, ४ दूसरा ६, और तीसरा ८ ।

(३३) एक वृत्त के भीतर जिस का व्यासार्द्ध = क है एक सब से बड़ा त्रिभुज बनावो? ।

उत्तर, समत्रिबाहु सब से बड़ा हो गा ।

(३४) एक त्रिभुज जिस का क्रम से अ, क और ग भुज है उस

के भीतर कहां एक विन्दु कल्पना करना चाहिये जहां से तीनों कोणों तक जो रेखा खींची जायं उन के वर्गों के योग का मान न्यूनतम हो? ।

उत्तर, कोणों से सन्मुख भुजों को आधा करने वाली रेखाओं का योग विन्दु।

(३५) एक आकागा त्रिभुज जिस के कोणों के सन्मुख भुजों का मान क्रम से अ, क, और ग हैं इस के भीतर ऐसा विन्दु ढूंढ़ना है जहां से तीनों भुजों पर पड़े हुए लम्बों का वर्गयोग न्यूनतम हो? ।

उत्तर, क्रम से तीनों लम्बों का मान $\frac{\text{अकग} \cdot \text{ज्याआ}}{\text{अ}^2+\text{क}^2+\text{ग}^2}$,

$\frac{\text{अकग} \cdot \text{ज्याका}}{\text{अ}^2+\text{क}^2+\text{ग}^2}$, और $\frac{\text{अकग} \cdot \text{ज्यागा}}{\text{अ}^2+\text{क}^2+\text{ग}^2}$ ।

(३६) आकागाघा चतुर्भुज के भीतर ऐसा विन्दु ढूंढ़ो जहां से कोणों तक जो रेखा खींची जायं उन के वर्गों का योग न्यूनतम हो?।

उत्तर, यदि आका = अ, कागा = क, आघा = ग और उस विन्दु का नाम प रक्खो, तो आका भुज पर उस विन्दु से पड़े हुए लम्ब का मान $= \frac{1}{4}$ (गज्याआ + कज्याका) आ विन्दु से लम्बमूल का अन्तर $= \frac{1}{4}$ (२अ + गकोज्याआ − ककोज्याका)।

(३७) जिस का तीनों भुज स्थिर हैं उस त्रिभुज के भीतर ऐसा विन्दु ढूंढ़ो जहां से तीनों भुज पर पड़े हुए लम्बों का परस्पर घात महत्तम हो? ।

उत्तर, उस विन्दु में कोणों तक यदि रेखा मिला दो तो पूर्वोक्त त्रिभुज के भीतर तीन त्रिभुज परस्पर समान हों गे।

(३८) जिस त्रिभुज के तीनों भुज स्थिर हैं उस के भीतर एक ऐसा विन्दु है जहां से तीनों भुजों के समान्तररेखा खींचने से जो तीन समान्तरचतुर्भुज और तीन नये त्रिभुज हुए उन में तीनों त्रिभुजों के फलों का योग न्यूनतम हुआ तो बतावो वह विन्दु कहां है? ।

उत्तर, कोणों से सन्मुख भुजाओं को आधी करने वाली रेखाओं का योगविन्दु।

(३९) एक गोल जिस का व्यासार्द्ध (त्रि) है उस के भीतर एक ऐसा आयताधार घनक्षेत्र बनावो जिस का घनफल महत्तम हो?।

उत्तर, आयत का भुज कोटि और वेध तीनों समान हों गे और

$$\text{उन का मान} = \frac{२\text{त्रि}}{\sqrt{३}} ।$$

(४०) तीन पुरुष साथ ही परदेश को चले उन्हें राह में एक और पुरुष मिला इसे भी साथ ले वे लोग कहीं जाकर कमाने लगे उन में पहले दूसरे के द्रव्य के योग का षष्ठांश एक में घटा देने से जो हो उतना प्रतिवर्ष में तीसरा कमाता था और पहले के द्रव्य का घन दूसरे के द्रव्य का वर्ग और तीसरे का द्रव्य इन तीनों के घात के तुल्य चौथा कमाता था तो बतावो कि जब चौथा बहुत कमाया तो पहले तीनों के द्रव्यों का क्या क्या मान है? ।

उत्तर, क्रम से, ३, २ और $\frac{१}{६}$ ।

(४१) दो पुरुषों ने यह नियम किया कि जो हम दोनों आदमी प्रतिवर्ष में कमायं गे उन द्रव्यों के संख्याओं का घात सत्ताइस में घटा कर शेष से घात ही को गुण कर द्रव्यों के संख्या के योग का भाग देने से जो लब्ध हो उतना वर्ष के आरम्भ दिन में ब्राह्मणों को दिया करें गे बतावो जिस वर्ष में ब्राह्मणों को अधिक द्रव्य मिला उस वर्ष में दोनों को कितना ऋण लेना पड़ा? ।

उत्तर, १०$\frac{१}{२}$ ।

(४२) एक बागवान ने नीबू और नारंगियों की गिनती कर उन के योग को सत्ताइस से गुणाकर उन के वर्गों के घात में जोड़ कर उन के घात ही से भाग दिया तो उस लब्धि के तुल्य लीची गिनती में ठहरी यही नियम उस ने प्रतिवर्ष में देखा तो बतावो जिस साल में लीची निहायत कम फरी उस साल में नीबू और नारंगी कितने कितने फरे? ।

उत्तर, तीन तीन फल ।

इति नवमाध्याय ।

दशमाध्याय १० ।

प्रकीर्णक ।

७५ । कभी कभी तात्कालिकसम्बन्धों को लाघव के लिये बदल भी सकते हो अर्थात् जिस राशि को स्वतन्त्र मान कर जो तात्का-

लिकसम्बन्ध निकला हुआ है उसी का मान दूसरे स्वतन्त्रराशि के वश से भी निकल सकता है जैसे

पहिला।

यदि $य^2 \frac{ता^2स}{ताय^2} + य \frac{तास}{ताय} + स = 0$ और $र = लाय,$

तो $\frac{तास}{ताय} = \frac{तास}{तार} \cdot \frac{तार}{ताय} = \frac{तास}{तार} \cdot \frac{1}{य}$ क्योंकि $\frac{तार}{ताय} = \frac{1}{य}$

इस लिये $य \frac{तास}{ताय} = \frac{तास}{तार}$

और $य \frac{ता^2स}{ताय^2} + \frac{तास}{ताय} = \frac{ता^2स}{तारताय} = \frac{ता^2स}{ता^2र} \cdot \frac{तार}{ताय} = \frac{ता^2स}{तार^2} \cdot \frac{1}{य}$

$\therefore य^2 \frac{ता^2स}{ताय^2} + य \frac{तास}{ताय} = \frac{ता^2स}{तार^2}$

और $य^2 \frac{ता^2स}{ताय^2} + य \frac{तास}{ताय} + स = \frac{ता^2स}{तार^2} + स = 0$

इस लिये पहले जो समीकरण य स्वतन्त्रराशि के वश से था वही अब र स्वतन्त्रराशि के वश से उत्पन्न हुआ।

दूसरा।

इसी प्रकार यदि $(1 - य^2)\frac{ता^2स}{ताय^2} - य \frac{तास}{ताय} = 0$ और $य = कोज्यार$

तो $\frac{तास}{ताय} = \frac{तास}{तार} \cdot \frac{तार}{ताय} = -\frac{\frac{तास}{तार}}{\sqrt{1 - य^2}}$ क्योंकि $\frac{तार}{ताय} = -\frac{1}{\sqrt{1 - य^2}}$

$\therefore \frac{तास}{ताय}\sqrt{1 - य^2} = -\frac{तास}{तार}$

फिर सम्बन्ध निकालने से

$\frac{ता^2स}{ताय^2}\sqrt{1 - य^2} - \frac{तास}{ताय}\frac{य}{\sqrt{1 - य^2}} = -\frac{ता^2स}{तारताय}$

$$= -\frac{ता^2स}{तार^2}\,\frac{तार}{ताय} = \frac{\dfrac{ता^2स}{तार^2}}{\sqrt{1-य^2}}$$

इस लिये $(1-य^2)\dfrac{ता^2स}{ताय^2} - य\dfrac{तास}{ताय} = \dfrac{ता^2स}{तार^2}$ यहां भी देखो पहिले समीकरण का रूप र के वश से निकला है ।

तीसरा ।

यदि $र^2 = य_1^2 + य_2^2 + य_3^2 + \cdots + य_न^2$

और $\dfrac{ता^2स}{ताय_1^2} + \dfrac{ता^2स}{ताय_2^2} + \dfrac{ता^2स}{ताय_3^2} + \cdots + \dfrac{ता^2स}{ताय_न^2} = 0$ इस का रूप र के वश से जानना है तो

यहां भी $\dfrac{तास}{ताय_1} = \dfrac{तास}{तार}\cdot\dfrac{तार}{ताय_1} = \dfrac{तास}{तार}\cdot\dfrac{य_1}{र}$ क्यों कि $\dfrac{तार}{ताय_1} = \dfrac{य_1}{र}$

वा, $र\cdot\dfrac{तास}{ताय_1} = \dfrac{तास}{तार}\cdot य_1$ इस का फिर सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{तार}{ताय_1}\cdot\frac{तास}{ताय_1} + र\cdot\frac{ता^2स}{ताय_1^2} = \frac{तास}{तार} + य_1\cdot\frac{ता^2स}{तारताय_1}$$

वा, $$\frac{य_1}{र}\cdot\frac{तास}{ताय_1} + र\cdot\frac{ता^2स}{ताय_1^2} = \frac{तास}{तार} + य_1\cdot\frac{ता^2स}{तार^2}\cdot\frac{तार}{ताय_1}$$

वा, $$\frac{य_1^2}{र^2}\cdot\frac{तास}{तार} + र\cdot\frac{ता^2स}{ताय_1^2} = \frac{तास}{तार} + \frac{य_1^2}{र}\cdot\frac{ता^2स}{तार^2}$$

समशोधन कर र का भाग देने से

$$\frac{ता^2स}{ताय_1^2} = \frac{य_1^2}{र^2}\cdot\frac{ता^2स}{तार^2} + \frac{1}{र}\cdot\frac{तास}{तार}\left(1 - \frac{य_1^2}{र^2}\right)$$

इसी प्रकार $$\frac{ता^2स}{ताय_2^2} = \frac{य_2^2}{र^2}\cdot\frac{ता^2स}{तार^2} + \frac{1}{र}\cdot\frac{तास}{तार}\left(1 - \frac{य_2^2}{र^2}\right)$$

$$\frac{ता^2स}{ताय_3^2} = \frac{य_3^2}{र^2}\cdot\frac{ता^2स}{तार^2} + \frac{1}{र}\cdot\frac{तास}{तार}\left(1 - \frac{य_3^2}{र^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{ता^2 स}{ताय_न^2} = \frac{य_न^2}{र^2} \cdot \frac{ता^2 स}{तार^2} + \frac{1}{र} \cdot \frac{तास}{तार}\left(1 - \frac{य_न^2}{र^2}\right)$$

इस लिये $\frac{ता^2 स}{ताय_1^2} + \frac{ता^2 स}{ताय_2^2} + \frac{ता^2 स}{ताय_3^2} + \cdots + \frac{ता^2 स}{ताय_न^2}$

$$= \left(\frac{य_1^2 + य_2^2 + य_3^2 + \cdots + य_न^2}{र^2}\right)\frac{ता^2 स}{तार^2}$$

$$+ \frac{1}{र} \cdot \frac{तास}{तार}\left(न - \frac{य_1^2 + य_2^2 + य_3^2 + \cdots + य_न^2}{र^2}\right)$$

$$= \frac{ता^2 स}{तार^2} + \frac{न - 1}{र} \cdot \frac{तास}{तार} = 0$$

इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि जहां जैसी स्थिति हो उस पर से चलराशियों को परस्पर बदलें ।

७६ । कभीं कभीं चलराशियों के समीकरण में स्थिरसंख्या वा कोई चलसंख्या का तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा के वश से लोप कर सकते हो ।

जैसे $(र - क)^2 + (य - ग्र)^2 = ग^2$ ....(१)

यहां तीन वार तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$(र - क)\frac{तार}{ताय} + य - ग्र = 0 \quad \cdots\cdots (२)$$

$$(र - क)\frac{ता^2 र}{ताय^2} + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 + 1 = 0 \quad \cdots\cdots (३)$$

$$(र - क)\frac{ता^3 र}{ताय^3} + 3\frac{तार}{ताय} \cdot \frac{ता^2 र}{ताय^2} = 0 \quad \cdots\cdots (४)$$

ऊपर के चारो समीकरणों से

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{य - ग्र}{क - र}$$

$$\frac{ता^2 र}{ताय^2} = -\frac{(य - ग्र)^2 + (र - क)^2}{(र - क)^3} = -\frac{ग^2}{(र - क)^3}$$

$$\frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3} = -\frac{3\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\dfrac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}}{\text{र}-\text{क}} = -\frac{3\,\text{ग}^2(\text{य}-\text{अ})}{(\text{र}-\text{क})^5}$$ इन पर से

$$\left\{1+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}\frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3} - 3\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right)^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

देखेा अब इस समीकरण में कोई स्थिरसंख्या नहीं है ।

७७ । यदि किसी समीकरण में न स्थिरसंख्या हों उन में से म स्थिरसंख्याओं को उड़ाना हेा तेा ७६ वें प्रक्रम के विधि से म वार तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से और उन सम्बन्धों के वश से न संख्याओं में से म तुल्यसंख्याओं को उड़ा सकते हेा परन्तु न संख्याओं में से म म तुल्यसंख्याओं को लेने से $\dfrac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)\cdots(\text{न}-\text{म}+1)}{\underline{|\text{म}}}$ इतने भेद हों गे इस लिये इस भेदसंख्या के समान समीकरण उत्पन्न हों गे जिन प्रत्येक समीकरणों में सब से बड़ा सम्बन्ध म संख्यक हेा गा । ऐसे समीकरण को "चलनसमीकरण" कहते हैं । जैसे बीजगणित में अव्यक्त संख्या के घात के वश से समीकरणों को बेालते हैं उसी प्रकार यहां भी सब से बड़े तात्कालिकसम्बन्ध के वश से चलनसमीकरणों को बेालते हैं जैसे यदि किसी चलनसमीकरण में सब से बड़ा म सम्बन्ध हेा तेा उसे "मसाम्बन्धिकचलनसमीकरण" कहें गे ।

७८ । कभीं कभीं स्वतन्त्रराशि के फल का पूर्व ही युक्ति से लेाप हेा जाता है

जैसे यदि $\text{र} = \text{स्पय}$ तेा $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{छे}^2\text{य} = 1 + \text{र}^2$

इस लिये $\text{र}^2 - \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -1$ वा, $\text{र}^2 - \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} + 1 = 0$ ।

इसी प्रकार यदि $\text{र} = \text{स्प}(\text{य}+\text{र})$

तेा $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \left\{\text{छे}^2(\text{य}+\text{र})\right\}\left\{1+\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right\} = \left\{1+\text{र}^2\right\}\left\{1+\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right\}$

इस लिये $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 1 + \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{र}^2 + \text{र}^2\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}$

तब $र^2\left(१+\frac{तार}{ताय}\right)+१=०$ ।

देखो ऊपर के दोनों उदाहरणों में य के फल का लोप हो गया अर्थात् स्पय वा स्प(य+र) दोनों का अब $र^2-\frac{तार}{ताय}+१$ और $र^2\left(१+\frac{तार}{ताय}\right)+१$ इस में लोप हो गया ।

७९ । कल्पना करो कि $स=फ\left(\frac{य}{र}\right)$ जहां य और र दोनों स्वतन्त्र हैं ।

$\frac{य}{र}=ल$, ऐसा कल्पना करो तो $स=फ(ल)$

$$\frac{तास}{ताय}=फ'(ल)\frac{ताल}{ताय}=\frac{१}{र}फ'(ल)$$

$$\frac{तास}{तार}=फ'(ल)\frac{ताल}{तार}=-\frac{य}{र^2}फ'(ल)$$

$$इस\ लिये\ य\cdot\frac{तास}{ताय}+र\cdot\frac{तास}{तार}=०\ ।$$

८० । कल्पना करो कि $स=फ(व)$ जहां स और व दोनों य, र, और ल के फल हैं जिन में य और र स्वतन्त्र हैं

$$तो\ \frac{तास}{ताय}+\frac{तास}{ताल}\cdot\frac{ताल}{ताय}=फ'(व)\left\{\frac{ताव}{ताय}+\frac{ताव}{ताल}\cdot\frac{ताल}{ताय}\right\}$$

$$\frac{तास}{तार}+\frac{तास}{ताल}\cdot\frac{ताल}{तार}=फ'(व)\left\{\frac{ताव}{तार}+\frac{ताव}{ताल}\cdot\frac{ताल}{तार}\right\}$$

दोनों में परस्पर भाग देकर छेदगम करने से,

$$\left(\frac{तास}{ताय}+\frac{तास}{ताल}\cdot\frac{ताल}{ताय}\right)\left(\frac{ताव}{तार}+\frac{ताव}{ताल}\cdot\frac{ताल}{तार}\right)$$

$$=\left(\frac{तास}{तार}+\frac{तास}{ताल}\cdot\frac{ताल}{तार}\right)\left(\frac{ताव}{ताय}+\frac{ताव}{ताल}\cdot\frac{ताल}{ताय}\right)$$

देखो इस में भी फल का लोप हो गया ।

८१ । कल्पना करो कि

$स=फ_१(य+अर)+फ_२(य-अर)$

तो यहां $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{फ}'_{1}(\text{य} + \text{अर}) + \text{फ}'_{2}(\text{य} - \text{अर})$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} = \text{फ}''_{1}(\text{य} + \text{अर}) + \text{फ}''_{2}(\text{य} - \text{अर})$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{अ} \cdot \text{फ}'_{1}(\text{य} + \text{अर}) - \text{अ} \cdot \text{फ}'_{2}(\text{य} - \text{अर})$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} = \text{अ}^2 \cdot \text{फ}''_{1}(\text{य} + \text{अर}) + \text{अ}^2 \cdot \text{फ}''_{2}(\text{य} - \text{अर})$$

इस लिये $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} = \text{अ}^2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}$

इस प्रकार और भी बहुत स्थलों में फलों को उड़ा सकते हो।

८२। २० वें प्रक्रम के सत्रहवें उदाहरण से

$$\frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} - 1} = 1 + \text{ब}_0 \frac{\text{य}}{1} + \text{ब}_1 \cdot \frac{\text{य}^2}{\underline{|2}} + \text{ब}_3 \cdot \frac{\text{य}^4}{\underline{|4}} + \text{ब}_5 \cdot \frac{\text{य}^6}{\underline{|6}} + \text{ब}_7 \cdot \frac{\text{य}^8}{\underline{|8}} + \cdots, \qquad \cdots\cdots (1)$$

यह जो गुणकों के स्थान में ब_0, ब_1 इत्यादि को रखने से सिद्ध होता है इस पर से $\frac{1}{\text{इ}^{\text{य}} + 1}$ इस का मान जानना है

तो $\frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} - 1} - \frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} + 1} = \frac{2\text{य}}{\text{इ}^{2\text{य}} - 1} \therefore \frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} + 1} = \frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} - 1} - \frac{2\text{य}}{\text{इ}^{2\text{य}} - 1}$

अब (१) समीकरण से अर्थात् बर्नली के संख्याओं से

$$\frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} + 1} = \frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} - 1} - \frac{2\text{य}}{\text{इ}^{2\text{य}} - 1}$$

$$= 1 + \text{ब}_0 \frac{\text{य}}{1} + \text{ब}_1 \frac{\text{य}^2}{\underline{|2}} + \cdots - \left(1 + \text{ब}_0 \cdot 2\text{य} + \text{ब}_1 \cdot \frac{(2\text{य})^2}{\underline{|2}} + \cdots\right)$$

(क्यों कि $\frac{\text{य}}{\text{इ}^{\text{य}} - 1}$ इस के मान में य के स्थान में २ य का उत्थापन देने से $\frac{2\text{य}}{\text{इ}^{2\text{य}} - 1}$ इस का मान सिद्ध हो जाय गा)

य का भाग देने से,

$$\frac{१}{इ^{य}+१} = -ब_{०} - ३\,ब_{१}\,\frac{य}{२} - (२^{४}-१)\,ब_{३}\,\frac{य^{३}}{\underline{|४}} - (२^{६}-१)\,ब_{५}\,\frac{य^{५}}{\underline{|६}} - \cdots$$

$$= \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\,\frac{य}{२} + \frac{१}{२}\,\frac{य^{३}}{\underline{|४}} - \frac{३}{२}\,\frac{य^{५}}{\underline{|६}} - \cdots$$

(२) स्पय इस का मान य के घातवृद्धि में बर्नेली के सङ्ख्याओं पर से लाना चाहिये ।

यहां २० वें प्रक्रम के सातवें उदाहरण से

$$स्पय = \frac{१}{\sqrt{-१}} \cdot \frac{इ^{२य\sqrt{-१}}-१}{इ^{२य\sqrt{-१}}+१} = \frac{१}{\sqrt{-१}}\left(१ - \frac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}+१}\right)$$

अब इसी प्रक्रम के पहले उदाहरण में $\frac{१}{इ^{य}+१}$ इस में य के स्थान में $२य\sqrt{-१}$ इस का उत्थापन दे कर दो से गुण देने से

$$\frac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}+१} = -२\left\{ब_{०} + ३\,ब_{१}\,\frac{२य\sqrt{-१}}{२} + (२^{४}-१)\,ब_{३}\,\frac{(२य\sqrt{-१})^{३}}{\underline{|४}} + (२^{६}-१)\,ब_{५}\,\frac{(२य\sqrt{-१})^{५}}{\underline{|६}} + \cdots\right\}$$

इस लिये $स्पय = \frac{१}{\sqrt{-१}}\left(१ - \frac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}+१}\right)$

$$= \frac{१}{\sqrt{-१}}\left\{१ + २ब_{०} + ६\,ब_{१}\,\frac{२य\sqrt{-१}}{२} + २(२^{४}-१)\,ब_{३}\,\frac{(२य\sqrt{-१})^{३}}{\underline{|४}}\right.$$

$$+२(२^६-१)ब_५\frac{(२य\sqrt{-१})^५}{|\underline{६}}+\cdots$$

$$=य-२^४(२^४-१)ब_३\frac{य^३}{|\underline{४}}+२^६(२^६-१)ब_५\frac{य^५}{|\underline{६}}-\cdots$$

$$=य+\frac{य^३}{३}+\frac{२य^५}{१५}+\frac{१७य^७}{३१५}+\frac{६२य^९}{२८३५}+\cdots$$

(३) इसी प्रकार कोस्पय यदि लाना हो तो ऊपर ही की युक्ति से

कोस्पय $=\sqrt{-१}\left(१+\dfrac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}-१}\right)$ इस में अब केवल $\dfrac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}-१}$ इस का मान जानने के लिये $\dfrac{य}{इ^{य}-१}$ इस का मान जो पहले सिद्ध हुआ है उस में य के स्थान में $२य\sqrt{-१}$ इस का उत्थापन दे कर $य\sqrt{-१}$ इस का भाग दे दो तो $\dfrac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}-१}$

$$=\frac{२}{२य\sqrt{-१}}+२ब_०+२ब_१\frac{२य\sqrt{-१}}{२}+२ब_३\frac{(२य\sqrt{-१})^३}{|\underline{४}}+\cdots$$

इस लिये कोस्पय $=\sqrt{-१}\left(१+\dfrac{२}{इ^{२य\sqrt{-१}}-१}\right)$

$$=\sqrt{-१}\left\{१+\frac{२}{२य\sqrt{-१}}+२ब_०+२ब_१\frac{२य\sqrt{-१}}{२}\right.$$

$$\left.+२ब_३\frac{(२य\sqrt{-१})^३}{|\underline{४}}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{१}{य}-\frac{य}{३}-\frac{य^३}{४५}-\frac{२य^५}{९४५}-\frac{य^७}{४७२५}-\frac{२य^९}{९३५५५}-\cdots\cdots$$

इस प्रकार से बर्नली के संख्याओं के बल से बहुत उदाहरण लाघव से सिद्ध हो जाते हैं।

८३ । $\frac{२}{इ^{य}+इ^{-य}}$ = फ(य) = स = फ(−य) इस लिये स का मान जो य के घातवृद्धि में आवे गा उस श्रेढ़ी में य का समघात ही रहे गा ।

यहां म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से स का मान लाने के लिये पहले लेब्रनिज़ के सिद्धान्त से,

$२ = स\cdot इ^{य} + स\cdot इ^{-य}$ इस का न संख्यकसम्बन्ध

$$० = इ^{य}\left(स + नस' + न\left(\frac{न-१}{२}\right)स'' + \cdots\cdots\right)$$

$$\mp इ^{-य}\left(स - नस' + न\cdot\frac{न-१}{२}स'' - \cdots\right)$$ {यहां न के विषम सम के अनुसार ऋण धन जानना} अब ऊपर के समीकरण में य = ० करने से और न को सम मानने से,

$$न\ संख्यकसम्बन्ध = ० = स + \frac{न(न-१)}{२}स'' + \frac{न(न-१)\ न-२\ (न-३)}{\underline{|४}}स'''' + \cdots$$

इस पर से जब य = ० तो स = १, स + स'' = ०

$\therefore$ स'' = −१, स + ६स'' + स'''' = ० $\therefore$ स'''' = ५

इसी प्रकार, $स^{(६)} = -६१$, $स^{(८)} = १३८५$, $स^{(१०)} = -५०५२१$, इ०

इस लिये,

$$\frac{२}{इ^{य}+इ^{-य}} = स = १ - \frac{य^{२}}{२} + \frac{५य^{४}}{\underline{|४}} - \frac{६१य^{६}}{\underline{|६}} + \frac{१३८५य^{८}}{\underline{|८}} - \frac{५०५२१य^{१०}}{\underline{|१०}} +$$

(२) जब कोज्याय $= \frac{इ^{य\sqrt{-१}} + इ^{-य\sqrt{-१}}}{२}$

$$\therefore छेय = \frac{२}{इ^{य\sqrt{-१}} + इ^{-य\sqrt{-१}}}$$

इस लिये ऊपर जो स का मान सिद्ध हुआ है उस में य के स्थान में य$\sqrt{-१}$ इस का उत्थापन देने से,

$$छेय = १ + \frac{य^२}{२} + \frac{५ य^४}{\lfloor ४} + \frac{६१ य^६}{\lfloor ६} + \frac{१३८५ य^८}{\lfloor ८} + \frac{५०५२१ य^{१०}}{\lfloor १०} + \cdots$$

८४। यदि $\frac{२य}{इ^य - इ^{-य}} = स \therefore स\cdot इ^य - स\cdot इ^{-य} = २य$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध $= इ^य (स + स') + इ^{-य}(स - स') = २$ फिर इस का न संख्यकसम्बन्ध निकाल य को शून्य के तुल्य करने से,

$$स + न\frac{(न-१)}{२} स'' + \frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{\lfloor ४} स'''' + \cdots = ०$$

यहां न को विषम मान कर यह स्थिति उत्पन्न हुई है

फिर इन सब पर से, $स = १, स'' = -\frac{१}{३}, स^{(४)} = \frac{७}{१५}, स^{(६)} = -\frac{३१}{२१}$

$स^{(८)} = \frac{३८१}{४५}$ इत्यादि, (यहां भी स के मान में य का समघात आवे गा) इस लिये

$$स = \frac{२य}{इ^य - इ^{-य}} = १ - \frac{१}{३}\cdot\frac{य^२}{२} + \frac{७}{१५}\cdot\frac{य^४}{\lfloor ४} - \frac{३१}{२१}\frac{य^६}{\lfloor ६} + \frac{३८१}{४५}\frac{य^८}{\lfloor ८} - \cdots$$

फिर इस पर से,

$$कोछेय = \frac{१}{य} + \frac{१}{३}\cdot\frac{य}{२} + \frac{७}{१५}\cdot\frac{य^३}{\lfloor ४} + \frac{३१}{२१}\frac{य^५}{\lfloor ६} + \frac{३८१}{४५}\cdot\frac{य^७}{\lfloor ८} + \cdots$$

८५। कल्पना करो कि किसी श्रेढ़ी में क्रम से,
$स, स_१, स_२, स_३, स_४, स_५, स_६ \cdots स_न$ ये पद हैं इन का अन्तर करने से,
$\triangle स = स_१ - स, \triangle स_१ = स_२ - स_१, \triangle स_२ = स_३ - स_२, \triangle स_३ = स_४ - स_३,$
$\cdots$ पहला अन्तर।

$\triangle^२ स = \triangle स_१ - \triangle स, \triangle^२ स_१ = \triangle स_२ - \triangle स_१, \triangle^२ स_२ = \triangle स_३ - \triangle स_२,$
$\cdots$ दूसरा अन्तर।

$\triangle^३ स = \triangle^२ स_१ - \triangle^२ स, \triangle^३ स_१ = \triangle^२ स_२ - \triangle^२ स_१, \triangle^३ स_२ = \triangle^२ स_३ - \triangle^२ स_२,$
$\cdots$ तीसरा अन्तर।

$\triangle^४ स = \triangle^३ स_१ - \triangle^३ स, \triangle^४ स_१ = \triangle^३ स_२ - \triangle^३ स_१, \triangle^४ स_२ = \triangle^३ स_३ - \triangle^३ स_२,$
$\cdots$ चौथा अन्तर।

इन पर से,

$$\Delta स = स_१ - स \quad \Delta^२ स = स_२ - २स_१ + स \quad \Delta^३ स = स_३ - ३स_२ + ३स_१ - स$$
$$\Delta स_१ = स_२ - स_१ \quad \Delta^२ स_१ = स_३ - २स_२ + स_१ \quad \Delta^३ स_१ = स_४ - ३स_३ + ३स_२ - स_१$$
$$\Delta स_२ = स_३ - स_२ \quad \Delta^२ स_२ = स_४ - २स_३ + स_२ \quad \Delta^३ स_२ = स_५ - ३स_४ + ३स_३ - स_२$$

....

ऊपर की स्थिति से स्पष्ट है कि

$$\Delta^न स = स_न - नस_{न-१} + न\cdot\frac{न-१}{२} स_{न-२} - \cdots \pm न\frac{न-१}{२} स_२ \mp नस_१ \pm स$$
$$\Delta^न स_१ = स_{न+१} - न\cdot स_न + न\cdot\frac{न-१}{२} स_{न-१} \cdots \pm न\cdot\frac{न-१}{२} स_३ \mp न\cdot स_२ \pm स_१$$

यहां जब न समसंख्या है तब ऊपर का चिह्न और जब न विषम संख्या है तब नीचे का चिह्न जानना ।

इसी प्रकार यदि $\Delta स$, $\Delta स_१$ इत्यादि पर से $स_१$, $स_२$ इत्यादि का ज्ञान करना हो तो

$$स_१ = स + \Delta स \quad \Delta स_१ = \Delta स + \Delta^२ स \quad \Delta^२ स_१ = \Delta^२ स + \Delta^३ स$$
$$स_२ = स_१ + \Delta स_१ \quad \Delta स_२ = \Delta स_१ + \Delta^२ स_१ \quad \Delta^२ स_२ = \Delta^२ स_१ + \Delta^३ स_१$$
$$स_३ = स_२ + \Delta स_२ \quad \Delta स_३ = \Delta स_२ + \Delta^२ स_२ \quad \Delta^२ स_३ = \Delta^२ स_२ + \Delta^३ स_२$$

....

इन पर से $\Delta स_१$, $\Delta स_२$ इत्यादि का मान जो सिद्ध हुआ है उन का उत्थापन $स_२$, $स_३$ इत्यादि में देने से नीचे लिखी हुई परम्परा $स_२$, $स_३$ इत्यादि के जानने के लिये उत्पन्न हो गी ।

$$स_१ = स + \Delta स$$
$$स_२ = स_१ + \Delta स_१ = स + \Delta स + \Delta स + \Delta^२ स = स + २\Delta स + \Delta^२ स$$
$$स_३ = स_२ + \Delta स_२ = स_१ + \Delta स_१ + \Delta स_१ + \Delta^२ स_१$$
$$= स_१ + २\Delta स_१ + \Delta^२ स_१$$
$$= स + \Delta स + २(\Delta स + \Delta^२ स) + \Delta^२ स + \Delta^३ स$$
$$= स + ३\Delta स + ३\Delta^२ स + \Delta^३ स$$

इस प्रकार से $\Delta स_३ = \Delta स + ३\Delta^२ स + ३\Delta^३ स + \Delta^४ स$

और $स_४ = स_३ + \Delta स_३ = स + ४\Delta स + ६\Delta^२ स + ४\Delta^३ स + \Delta^४ स$

यहां भी देखने से स्पष्ट है कि प्रत्येक पद के गुणक ठीक द्वियुक्-पद सिद्धान्त से उत्पन्न हैं, इस लिये

$$स_न = स + न \cdot \triangle स + न \frac{न-१}{२} \triangle^२ स$$

$$+ \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}} \triangle^३ स + \cdots + \triangle^न स$$

और $\triangle स_न = \triangle स + न \cdot \triangle^२ स + \frac{न(न-१)}{२} \triangle^३ स + \cdots + \triangle^{न+१} स$

विद्यार्थियों को चाहिये कि ऊपर लिखी हुई परम्पराओं को सावधानी से सीखें ।

८६ । जब $स = स$

$$स_१ = स + \triangle स$$

$$स_२ = स + २ \triangle स + \triangle^२ स$$

$$स_३ = स + ३ \triangle स + ३ \triangle^२ स + \triangle^३ स$$

$$स_४ = स + ४ \triangle स + ६ \triangle^२ स + ४ \triangle^३ स + \triangle^४ स$$

इस लिये

$$स + स_१ = २ स + \triangle स$$

$$स + स_१ + स_२ = ३ स + ३ \triangle स + \triangle^२ स$$

$$स + स_१ + स_२ + स_३ = ४ स + ६ \triangle स + ४ \triangle^२ स + \triangle^३ स$$

देखो पदों के योग के समान बाएं ओर जो श्रेढी उत्पन्न हुई है उस के पदों के गुणक ठीक गच्छ के एक दो तीन आदि भेद के समान हैं इस लिये $स + स_१ + स_२ + स_३ + \cdots + स_न$

$$= न \cdot स + \frac{न(न-१)}{२} \triangle स + \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}} \triangle^२ स + \cdots$$

इस पर से बहुत श्रेढियों का योग बड़े लाघव से हो जाता है इसी को श्रेढीपरम्परा कहते हैं ।

जैसे १, ४, ९, १६, ... $न^२$ इन का योग करना है

तो यहां स = १
और अन्तर करने से

३, ५, ७, ९ ......
२, २, २ ......
०, ०, ...
० ....

और

$\triangle स = ३,\ \triangle^{२} स = २,\ \triangle^{३} स = ०,\ \triangle^{४} स = ०, \cdots$

इस लिये न पदों तक योग

$$= न + \frac{न(न-१)}{२} \times ३ + \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}} \times २ + ०$$

$$= न + \frac{३न(न-१)}{२} + \frac{न(न-१)(न-२)}{३}$$

$$= \frac{न(न+१)(२न+१)}{२ \cdot ३}$$

इस पर से "द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तं सङ्कलितेन हतं कृतियोगः" यह भास्कराचार्य का प्रकार उपपन्न होता है, इसी प्रकार और भी बहुत श्रेढ़ियों का योग बड़े लाघव से कर सकते हो।

८७। $फ(य) = अ + अ_{१}य + अ^{२}य^{२} + अ_{३}य^{३} + \cdots$

$फि(य) = कअ + क_{१}अ_{१}य + क_{२}अ_{२}य^{२} + क_{३}अ_{३}य^{३} + \cdots$

यहां ८६ वें प्रक्रम के विधि से

$क_{१} = क + \triangle क,\ क_{२} = क + २\triangle क + \triangle^{२} क,$

$क_{३} = क + ३\triangle क + ३\triangle^{२} क + \triangle^{३} क$

इन का उत्थापन फि(य) के विस्तररूप में देने से

$अक = अक$

$क_{१}अ_{१}य = अ_{१}कय + \triangle क \cdot अ_{१}य$

$क_{२}अ_{२}य^{२} = अ_{२}कय^{२} + २\triangle क \cdot अ_{२}य^{२} + \triangle^{२} क \cdot अ_{२}य^{२}$

$क_{३}अ_{३}य^{३} = अ_{३}कय^{३} + ३\triangle क \cdot अ_{३}य^{३} + ३\triangle^{२} क \cdot अ_{३}य^{३} + \triangle^{३} क \cdot अ_{३}य^{३}$

....

इस लिये इन का योग करने से

$$\begin{aligned} फि(य) = {} & क(अ + अ_{१}य + अ_{२}य^{२} + \cdots) \\ & + \triangle कय(अ_{१} + २अ_{२}य + ३अ_{३}य^{२} + \cdots) \\ & + \triangle^{२} क \cdot य^{२}(अ_{२} + ३अ_{३}य + ६अ_{४}य^{२} + \cdots) \\ & + \triangle^{३} क \cdot य^{३}(अ_{३} + ४अ_{४}य + १०अ_{५}य^{२} + \cdots) + \cdots \end{aligned}$$

परन्तु जब $फ(य) = अ + अ_{१}य + अ_{२}य^{२} + अ_{३}य^{३} + \cdots$

$\therefore \frac{१}{न}$ यो $\left\{ अ_१^{न-म} फ(अ_१ य)\right\} = क_म य^म + क_{म+न} य^{म+न} + \cdots$

जैसे यदि $इ^य = १ + य + \frac{य^२}{\lfloor २} + \frac{य^३}{\lfloor ३} + \frac{य^४}{\lfloor ४} + \cdots$

इस में $१ + \frac{य^४}{\lfloor ४} + \frac{य^८}{\lfloor ८} + \frac{य^{१२}}{\lfloor १२} + \cdots$ यह जानना है

तो यहां $म = ०$, $न = ४$ एक का चतुर्घातमूल क्रम से

$१, -१, \sqrt{-१}, -\sqrt{-१}$ इन सब का उत्थापन देने से

$$१ + \frac{य^४}{\lfloor ४} + \frac{य^८}{\lfloor ८} + \frac{य^{१२}}{\lfloor १२} + \cdots\cdots = \frac{१}{४}(इ^य + इ^{-य} + २ \text{ कोज्याय})$$

इस प्रकार से अनेक प्रकार श्रेढियों के योग करने के लिये उत्पन्न होते हैं ।

९० । ८८ वें प्रक्रम की रीति से स्पष्ट है कि -१ का न घातमूल क्रम से $अ_१, अ_१^३, अ_१^५ \cdots अ_१^{२न-१}$ जहां $१, अ_१, अ_१^२, अ_१^३, \cdots अ_१^{२न-१}$, $+१$ के २न घातमूल हैं ।

बीजगणित की युक्ति से $अ_१^म + अ_१^{३म} + अ_१^{५म} + \cdots$

$$+ अ_१^{(२न-१)म} = अ_१^म \frac{अ_१^{२नम} - १}{अ_१^{२म} - १}$$ ऐसा हो गा

अब यहां देखो अंश सर्वदा शून्य के समान है चाहे अभिन्न म की संख्या धन हो वा ऋण हो

क्यों कि $अ_१^{२नम} = (अ_१^न)^{२म} = (-१^२)^म = १^म = १$

परन्तु यदि म शून्य वा न का अपवर्त्य हो तो हर $अ_१^{२म} - १$ यह भी शून्य के समान हो गा । तब ऐसी स्थिति में यदि म में न का भाग देने से समाङ्कलब्ध हो तो स्पष्ट है कि ऊपर की श्रेढ़ी के प्रत्येक पद $+१$ के समान हों गे । और यदि म में न का भाग देने से विषमाङ्कलब्ध हो तो श्रेढ़ी के प्रत्येक पद -१ के तुल्य हों गे, इस लिये जब म शून्य वा न का सम अपवर्त्य हो तो श्रेढ़ी का योग = न, जब म, न का विषम अपवर्त्य हो तो श्रेढ़ी का योग = $-$न और इन स्थितियों को छोड़ कर सर्वदा श्रेढ़ी का योग = ० हो गा ।

९१ । $फ(य) = क + क_१ य + क_२ य^२ + क_३ य^३ + क_४ य^४ + \cdots$
इस में

$$क_म य^म - क_{म+न} य^{म+न} + क_{म+२न} य^{म+२न} - क_{म+३न} य^{म+३न} + \cdots$$

इस का मान जानना है जहां $म < न$ है,
यहां मानो कि -१ का न घातमूल क्रम से $अ_१, अ_२, अ_३$ इत्यादि हैं।
$फ(य)$ को $अ_१^{२न-म}, अ_२^{२न-म}$ इत्यादि से गुण कर य के स्थान में $अ_१, अ_२$ इत्यादि का उत्थापन देने से,

$$अ_१^{२न-म} फ(अ_१ य) = क \cdot अ_१^{२न-म} + क_१ अ_१^{२न-म+१} य$$
$$+ क_२ अ_१^{२न-म+२} य^२ + \cdots + क_म अ_१^{२न} य^म + क_{म+१} अ_१^{२न+१} य^{म+१} + \cdots$$
$$अ_२^{२न-म} फ(अ_२ य) = क \cdot अ_२^{२न-म} + क_१ अ_२^{२न-म+१} य$$
$$+ क_२ अ_२^{२न-म+२} य^२ + \cdots + क_म अ_२^{२न} य^म + क_{म+१} अ_२^{२न+१} य^{म+१} + \cdots$$

....

दोनों पक्षों को जोड़ देने से,

$$अ_१^{२न-म} फ(अ_१ य) + अ_२^{२न-म} फ(अ_२ य) \cdots = यो \left\{ अ_१^{२न-म} फ(अ_१ य) \right\}$$
$$= क_म य^म (अ_१^{२न} + अ_२^{२न} + \cdots) + क_{म+न} य^{म+न} (अ_१^{३न} + अ_१^{३न} + \cdots)$$
$$+ क_{म+२न} य^{म+२न} (अ_१^{४न} + अ_२^{४न} + \cdots) + \cdots$$

क्यों कि और पद ९० वें प्रक्रम की युक्ति से उड़ जायं गे जिन में $य^म, य^{म+न}, य^{म+२न}$ इत्यादि हैं वेही बचें गे।

अब यहां स्पष्ट है कि $अ_१^{२न} + अ_२^{२न} + \cdots = न$,
$अ_१^{३न} + अ_२^{३न} + \cdots = -न$, इत्यादि
इस लिये, $\frac{१}{न} यो \left\{ अ_१^{२न-म} फ(अ_१ य) \right\} = क_म य^म - क_{म+न} य^{म+न} + \cdots\cdots$

इसी श्रेढ़ी में यदि $म = १$ $न = ३$ तो -१ का त्रिघातमूल $\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{-३}, -१, \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{-३}$, जो ये हैं इन का उत्थापन ऊपर योग में देने से,

$$\frac{१}{३} \left\{ अ_१^{६-१} फ(अ_१ य) + अ_२^{६-१} फ(अ_२ य) + अ_३^{६-१} फ(अ_३ य) \right\}$$
$$= \frac{१}{३} \left\{ \frac{अ_१^६ फ(अ_१ य)}{अ_१} + \frac{अ_२^६ फ(अ_२ य)}{अ_२} + \frac{अ_३^६ फ(अ_३ य)}{अ_३} \right\}$$
$$= \frac{१}{३} \left\{ \frac{फ(-य)}{-१} + \frac{फ\left[\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{-३}\right) य \right]}{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{-३}} + \frac{फ\left[\left(\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{-३}\right) य \right]}{\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{-३}} \right\}$$

$$= \frac{१}{६}\left\{फ(अ_१ य) + फ(अ_२ य)\right\} - \frac{\sqrt{-३}}{६}\left\{फ(अ_१ य) - फ(अ_२ य)\right\} - \frac{फ(-य)}{३}$$

ऐसा हो गा

यहां यदि $फ(य) = इ^{य} = १ + य + \frac{य^२}{\lfloor २} + \cdots\cdots$

तो $फ(अ_१ य) = इ^{अ_१} = १ + अ_१ य + \frac{अ_१^२ य^२}{२} + \frac{अ_१^३ य^३}{\lfloor ३} + \cdots$

$$फ(अ_२ य) = इ^{अ_२ य} = १ + अ_२ य + \frac{अ_२^२ य^२}{२} + \frac{अ_२^३ य^३}{\lfloor ३} + \cdots$$

$$\therefore\ फ(अ_१ य) + फ(अ_२ य) = इ^{अ_१ य} + इ^{अ_२ य}$$

$$= इ^{\frac{य}{२}(१ + \sqrt{-३})} + इ^{\frac{य}{२}(१ - \sqrt{-३})}$$

$$= इ^{\frac{य}{२}}\left\{इ^{\frac{य}{२}\sqrt{-३}} + इ^{-\frac{य}{२}\sqrt{-३}}\right\}$$

$$= इ^{\frac{य}{२}}\left\{इ^{\sqrt{-१}\times\frac{य}{२}\sqrt{३}} + इ^{-\sqrt{-१}\times\frac{य}{२}\sqrt{३}}\right\}$$

$$= २ इ^{\frac{य}{२}}\ कोज्या\ \frac{\sqrt{३}}{२} य$$

और $फ(अ_१ य) - फ(अ_२ य)$

$$= इ^{\frac{य}{२}}\left\{इ^{\sqrt{-१}\times\frac{य}{२}\sqrt{३}} - इ^{-\sqrt{-१}\times\frac{य}{२}\sqrt{३}}\right\}$$

$$= २ इ^{\frac{य}{२}}\sqrt{-१}\times ज्या\ \frac{\sqrt{३}}{२} य$$

इस लिये $\frac{१}{६}\left\{फ(अ_१ य) + फ(अ_२ य)\right\}$

$$- \frac{\sqrt{-३}}{६}\left\{फ(अ_१ य) - फ(अ_२ य)\right\} - \frac{फ(-य)}{३}$$

$$= \frac{इ^{\frac{य}{२}}}{३}\left\{कोज्या\ \frac{\sqrt{३}}{२} य + \sqrt{३}\ ज्या\ \frac{\sqrt{३}}{२} य\right\} - \frac{१}{३} इ^{-य}$$

$$=य-\frac{य^4}{\underline{|4}}+\frac{य^7}{\underline{|7}}-\frac{य^{10}}{\underline{|10}}+\cdots\cdots$$

देखो श्रेढ़ी के पदों के धन ऋण चिह्न के व्यत्यास में भी इस प्रकार से योग कर सकते हो।

९२। यह जानना है कि क संख्या कितने प्रकार से बन सकती है परन्तु उस में न संख्या से नीचे की कोई संख्या न आवे।

देखो $य^न+य^{न+1}+य^{न+2}+य^{न+3}+\cdots+(य^न+य^{न+1}+\cdots)^2$ $+(य^न+य^{न+1}+\cdots)^3+\cdots$ इस में हर एक प्रकार से एक एक वार $य^क$ आवे गा जिन प्रकारों में न संख्या से कोई संख्या अल्प नहीं है।

इस लिये यदि $य^न+य^{न+1}+\cdots=र$, मानो तो पूर्व पदों का मान $र+र^2+र^3+\cdots$ ऐसा हो गा जिसे बीजगणित की प्रक्रिया से,

$$\frac{र}{1-र}=\frac{य^न+य^{न+1}+\cdots}{1-(य^न+य^{न+1}+\cdots)}$$ ऐसा लिख सकते हो;

और, तब $$\frac{य^न+य^{न+1}+\cdots}{1-(य^न+य^{न+1}+\cdots)}=\frac{\frac{य^न}{1-य}}{1-\frac{य^न}{1-य}}=\frac{य^न}{1-य-य^न}$$

$$=\frac{य^न}{1-य}+\frac{य^{2न}}{(1-य)^2}+\frac{य^{3न}}{(1-य)^3}+\cdots$$ ऐसा हो गा।

जिस का म संख्यक पद $य^{म\cdot न}(1-य)^{-म}$ यह हो गा।

अब $य^{मन}(1-य)^{-म}$ इस में $य^क$ का जो गुणकाङ्क हो गा उतने ही प्रकार से क बनै गा, परन्तु $य^{मन}(1-य)^{-म}$ इस में य का क घात, उतने ही वार आवै गा जितने वार $(1-य)^{-म}$ इस में "$य^{क-मन}$" यह आवै गा क्यों कि $य^{मन}य^{क-मन}=य^क$ इस लिये द्वियुक्पद के सिद्धान्त से $(1-य)^{-म}$ इस में $य^{क-मन}$

इस का गुणकाङ्क $$\frac{म(म+1)(म+2)\cdots(म+क-मन-1)}{\underline{|क-मन}}$$ यही हो गा।

कल्पना करो कि क में न का भाग देने से पूर्णाङ्क = ल, (शेष को छोड़ दो) तो म के स्थान में १, २, ३, ४, ⋯ ल, का उत्थापन देने से पूर्वोक्त

गुणाङ्क का मान $\dfrac{१\cdot२\cdot३\cdots(क-न)}{|\underline{क-न}}$, $\dfrac{२\cdot३\cdot४\cdots(क-२न+१)}{|\underline{क-२न}}$, $\dfrac{३\cdot४\cdot५\cdots(क-३न+२)}{|\underline{क-३न}}$, ... ये हों गे और इन का योग अभीष्ट-भेद हो गा।

जैसे ११ यह संख्या कै प्रकार से बन सकती है जिस में दो से अल्प कोई संख्या न हो।

यहां $क=११$, $न=२$ और $ल=५$, इस लिये ऊपर पांच गुणाङ्कों का योग करने से,

$$१+८+\frac{६\cdot७}{२}+\frac{४\cdot५\cdot६}{२\cdot३}+\frac{२\cdot३\cdot४\cdot५}{२\cdot३\cdot४}=५५$$ यही अभीष्टभेद हुआ। इस की प्रतीति नीचे लिखे हुए भेद से स्पष्ट है,

अङ्कपाश की रीति से।

११	इस में एक भेद	∴ १
९+२, ८+३, ७+४, ६+५,	प्रत्येक में दो दो भेद	८
७+२+२, ५+३+३, ३+४+४,	प्रत्येक में तीन तीन भेद	९
६+३+२, ५+४+२,	प्रत्येक में छ छ भेद,	१२
२+२+३+४	इस में बारह भेद	१२
२+३+३+३, २+२+२+५,	प्रत्येक में चार चार भेद	८
२+२+२+२+३,	इस में पांच भेद	५
	सब भेद =	५५

९३। ९२ प्रक्रम में जो भेदों का मान

$$\frac{१\cdot२\cdot३\cdots(क-न)}{|\underline{क-न}}+\frac{२\cdot३\cdot४\cdots(क-२न+१)}{|\underline{क-२न}}$$

$$+\frac{३\cdot४\cdot५\cdots(क-३न+२)}{|\underline{क-३न}}+\cdots$$ यह है इसे

$$१+(क-२न+१)+\frac{(क-३न+२)(क-३न+१)}{१\cdot२}$$

$$+\frac{(\text{क}-४\text{न}+३)(\text{क}-४\text{न}+२)(\text{क}-४\text{न}+१)}{\left|\underline{\;३\;}\right.}+\cdots$$

ऐसे भी लिख सकते हो।

देखो यहां पहला पद एक संख्योत्पन्नभेद की संख्या को दिखलाता है, दूसरा दो संख्या से उत्पन्नभेदों की संख्या को दिखलाता है, इसी प्रकार तीसरा, चौथा इत्यादि, तीन, चार इत्यादि संख्याओं से उत्पन्न हुए भेदों की संख्याओं को दिखलाते हैं।

ऊपर गुणकाङ्कों में यदि न के स्थान में १ मानें तो

$$१+(\text{क}-१)+\frac{(\text{क}-१)(\text{क}-२)}{१\cdot२}+\frac{(\text{क}-१)(\text{क}-२)(\text{क}-३)}{१\cdot२\cdot३}+\cdots$$

$$+\frac{(\text{क}-१)(\text{क}-२)(\text{क}-३)\cdots(\text{क}-\text{स्या}+१)}{\left|\underline{\;\text{स्या}-१\;}\right.}+\cdots \text{ ऐसा हो गा}$$

इस में केवल अभीष्टस्थान स्थित संख्याओं से उत्पन्न हुए भेदों का मान जानना हो तो स्पष्ट है कि भेद की संख्या

$$\frac{(\text{क}-१)(\text{क}-२)(\text{क}-३)\cdots(\text{क}-\text{स्या}+१)}{\left|\underline{\;\text{स्या}-१\;}\right.} \text{ यही हो गी।}$$

इस पर से श्रीभास्कराचार्य का "निरेकमङ्कैक्यमिदं निरेकस्थानान्तमेकापचितं विभक्तम्। रूपादिभिस्तन्निहतैः समाः स्युः संख्याविभेदा नियतेऽङ्कयोगे" यह उपपन्न होता है। परन्तु संख्या में प्रत्येकस्थानीय अङ्क दश से अल्प होना चाहिये इस लिये जब कभी इस से भिन्न स्थिति हो तो भास्कराचार्य के भेद में उतनी संख्या घटा देनी चाहिये जितनी में स्थानीय संख्या दश, और दश से अधिक है परन्तु इस का ज्ञान कैसे करना इस के लिये उपाय।

योग में नव को घटा कर शेषतुल्य योग मान उसी स्थानसम्बन्धी भेद ले आवो और कल्पना करो कि उस का मान ख है इन भेदों में से एक भेद ले इस के प्रत्येक स्थान में यदि नव को जोड़ दो तो स्पष्ट है कि एक भेद में स्थानतुल्य भेद ऐसे उत्पन्न हों गे जिन में प्रति एक एक स्थान में ऐसी भी संख्या हों गी जो दश वा दश से अधिक हों। इस लिये पूर्व भेदों में स्या · ख इतना घटा देना चाहिये। परन्तु

यदि इस नये भेद में जो ख तुल्य उत्पन्न हुए हैं इस में भी बहुत से भेद ऐसे हों जिन में स्थानीयसंख्या दश वा दश से अधिक हो तो नव के जोड़ने से उन में दो स्थानों में ऐसी संख्या हों गी जो दश वा दश से अधिक हों गी इस लिये इस प्रकार की जितनी संख्या हों उन को स्या · ख इस में घटा कर शेष को पूर्व भेद में घटाना चाहिये परन्तु इस का ज्ञान कैसे हो इस के लिये पूर्व योग में १८ घटा कर शेष को योग मान अभीष्टस्थानसम्बन्धीभेद निकाल उस का नाम $\text{ख}_{१}$ रख इस के एक भेद के दो दो स्थानों में नव, नव जोड़ दो तो एक भेद में $\frac{\text{स्या}(\text{स्या}-१)}{२}$ इतने भेद हों गे इस लिये $\frac{\text{स्या}(\text{स्या}-१)\text{ख}_{१}}{२}$ इतने भेद ऐसे हों गे जिन प्रत्येक के दो दो स्थानों में दश वा दश से अधिक संख्या हों गी परन्तु यहां भी जो $\text{ख}_{१}$ तुल्य भेद उत्पन्न हैं उन में यदि ऐसे भेद हों जिन के एक स्थान में दश वा दश से अधिक संख्या हों तो उन के दो दो स्थानो में नव नव जोड़ने से ऐसे भेद उत्पन्न हों गे जिन के तीन तीन स्थान में दश वा दश से अधिक संख्या हों गी इस लिये ऐसे भेदों की संख्याओं को $\frac{\text{स्या}(\text{स्या}-१)}{२}\text{ख}_{१}$ इस में घटा कर तब शेष को ख में घटा कर इस शेष को पूर्व भेद में घटाना चाहिये। परन्तु तीन स्थान में दश वा दश से अधिक संख्या जितने भेदों में हों गी उन का ज्ञान कैसे हो इस के लिये पहले योग में २७ घटा कर पूर्वोक्त विधि करो। ऐसे ही आगे भी करते जाओ तो वास्तव भेद जानने के लिये नीचे लिखी हुई श्रेढी उत्पन्न हो गी

$$\text{वास्तव}^{*}\ \text{भेद} = \text{पूर्व भे} - \text{स्या}\cdot\text{ख} + \frac{\text{स्या}(\text{स्या}-१)}{२}\text{ख}_{१}$$

$$- \frac{\text{स्या}(\text{स्या}-१)(\text{स्या}-२)}{|\underline{३}}\text{ख}_{२} + \cdots$$

* अथ वा $(\text{य} + \text{य}^{२} + \cdots + \text{य}^{९})^{\text{स्या}}$ इस में जो $\text{य}^{\text{क}}$ का गुणक होगा वही स्थानतुल्य स्थानों में १, २, आदि संख्याओं से उत्पन्न भेदों का प्रमाण हो गा जिन प्रत्येक भेदों में स्थानीय अङ्कों का योग "क" हो गा। स्थानतुल्य स्थानों में दश को रख कर, इस में प्रत्येक पूर्व भेदों को घटा दो तो उतने ही भेद के समान नई संख्या उत्पन्न हों गी जिन के स्थानीय अङ्कों का योग १० स्या−क हो गा

यदि शून्य को भी लेकर वास्तव भेद जानना हो तो मेरा बनाया जो यह सूत्र है उसे स्मरण रक्खो

इस लिये $(य + य^२ + \cdots + य^९)^{स्या}$ इस में $य^{क}$ का गुणक वा $य^{१० स्या - क}$ का गुणक जो हो वही भेद हो गा परन्तु

$$(य + य^२ + \cdots + य^९)^{स्या} = य^{स्या}(१ + य + य^२ + \cdots + य^८)^{स्या} = य^{स्या}\left(\frac{य^९ - १}{य - १}\right)^{स्या}$$

$$= य^{स्या}\left\{य^{९ स्या} - स्या \cdot य^{९(स्या - १)} + \frac{स्या(स्या - १)}{|\underline{२}} \cdot य^{९(स्या - २)} - \cdots\right\} \cdot \left\{य - १\right\}^{-स्या}$$

$$= य^{स्या}\left\{य^{९ स्या} - स्या \cdot य^{९(स्या - १)} + \cdots\right\} \cdot$$

$$\left\{य^{-स्या} + स्या \cdot य^{-(स्या + १)} + \frac{स्या(स्या + १)}{|\underline{२}} य^{-(स्या + २)} + \cdots\right\}$$

$$= य^{१० स्या}\left\{य^{-स्या} + स्या \cdot य^{-(स्या + १)} + \frac{स्या(स्या + १)}{|\underline{२}} य^{-(स्या + २)} + \cdots\right\}$$

$$- स्या \cdot य^{१० स्या - ९}\left\{य^{-स्या} + स्या \cdot य^{-(स्या + १)} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{स्या(स्या - १)}{|\underline{२}} \cdot य^{१० स्या - १८}\left\{य^{-स्या} + स्या \cdot य^{-(स्या + १)} + \cdots\right\}$$

....

यहां $\left\{य^{-स्या} + स्या य^{-(स्या + १)} + \cdots\right\}$ इस में $य^{-(स्या + म)}$ का गुणक $\frac{स्या(स्या + १)(स्या + २)\cdots(स्या + म - १)}{|\underline{म}}$ यह है इस लिये कल्पना करो कि

$१० स्या - (स्या + म) = ९ स्या - म = १० स्या - क \quad \therefore म = क - स्या$

$१० स्या - ९ - (स्या + म) = ९ स्या - म - ९ = १० स्या - क \quad \therefore म = क - स्या - ९$

इत्यादि

इन म का उत्थापन $य^{-(स्या + म)}$ के गुणक में देने से और उत्क्रम से लिखने से

$$पूर्व भे = \frac{क - १}{१} \cdot \frac{क - २}{२} \cdot \frac{क - ३}{३} \cdots \frac{स्या}{क - स्या} = \frac{क - १}{१} \cdot \frac{क - २}{२} \cdots \frac{क - (स्या - १)}{स्या - १}$$

$$ख = \frac{(क - ९) - १}{१} \cdot \frac{(क - ९) - २}{२} \cdots \frac{स्या}{क - स्या}$$

$$= \frac{(क - ९) - १}{१} \cdot \frac{(क - ९) - २}{२} \cdots \frac{(क - ९) - (स्या - १)}{स्या - १}$$

इसी प्रकार ख, इत्यादि को भी जान सकते हो फिर ख, ख, इत्यादि को स्या, $\frac{स्या(स्या - १)}{२}$, इत्यादि से क्रम से गुण कर पूर्वभेद में घटा जोड़ देने से भी यही समीकरण उत्पन्न हो गा ।

रूपोनितस्थानमुखैकह्रासस्थानेष्वभीष्टाख्ययुतो तु ये ते ।
यथार्थभेदाः क्रमतो हताः स्वस्वस्थानजेन्दुत्त्यनलादिघातैः ॥ १ ॥
तेषां युतिः प्राग्भवशुद्धभेदैर्युता भवेद्वास्तवभेदमानम् ।
शून्यैकसङ्ख्यादिभवं तथोक्तं श्रीभास्करैर्नो गुरुदोषतोऽत्र ॥ २ ॥

इस की उपपत्ति बहुत ही स्पष्ट है इस लिये व्यर्थ ग्रन्थ बढ़ाना मैं उचित नहीं समझता ।

९४ । बहुधा जिस महत्तम वा न्यूनतममान में तात्कालिकसम्बन्ध अनन्त के तुल्य होता है वहां थोड़ा सा रूपान्तर करने से तात्कालिकसम्बन्ध शून्य के तुल्य हो जाय गा फिर उस पर से मान भी पूर्ववत् सिद्ध हो जाय गा ।

जैसे, $क + (य - अ)^{\frac{2}{3}} + (य - अ)^{\frac{4}{3}} = फ(य) = न्यूनतम = स$

तो $(य - अ)^{\frac{2}{3}} + (य - अ)^{\frac{4}{3}} = न्यूनतम$

वा $\left\{(य - अ)^{\frac{2}{3}} + (य - अ)^{\frac{4}{3}}\right\}^{3} = (य - अ)^{2} + ३(य - अ)^{\frac{8}{3}}$

$+ ३(य - अ)^{\frac{10}{3}} + (य - अ)^{4} = न्यूनतम$

$\therefore \frac{तास}{ताय} = २(य - अ) + ८(य - अ)^{\frac{5}{3}} + १०(य - अ)^{\frac{7}{3}} + ४(य - अ)^{3} = 0$

वा $\{य - अ\}\left\{२ + ८(य - अ)^{\frac{2}{3}} + १०(य - अ)^{\frac{4}{3}} + ४(य - अ)^{2}\right\} = 0$

$\therefore$ $य - अ = 0$ और $य = अ$ ।

दूसरा उदाहरण,

$स = (य^{2} + र^{2})^{\frac{1}{3}} = न्यूनतम$

तो $स^{3} = (य^{2} + र^{2}) = न्यूनतम$

इस लिये $२य = 0$ और $२र = 0$

इन पर से $य = 0$, $र = 0$

इसी प्रकार और भी बहुत से उदाहरण हो सकते हैं ।

९५ । अब हम इस प्रक्रम में लाला रामचन्द्र की युक्ति महत्तम और न्यूनतममान में चलराशि का मान जानने के लिये दिखलाते हैं ।

*लाला रामचन्द्र ने तीन वर्ष के परिश्रम से यह सिद्ध किया कि यदि $फ(य) = य^{न} + प \cdot य^{न-१} + ब \cdot य^{न-२} + \cdots$ ऐसा हो तो फ(य) में यदि य − अ वा य + अ का भाग दिया जाय तो अन्त्य में क्रम से फ(अ) वा फ(−अ) यह शेष बचे गा, इसे सिद्ध करने के लिये कल्पना करो कि फ(य) में य − अ और य + अ का भाग देने से क्रम से ल और ल' लब्धि और शे और शे' शेष रहता है

तो $फ(य) = ल(य - अ) + शे$ .... (१)

वा $फ(य) = ल'(य + अ) + शे'$ .... (२)

(१) में य के स्थान में अ का उत्थापन और (२) में य के स्थान में − अ का उत्थापन देने से

$$\left.\begin{aligned} फ(अ) &= शे \\ फ(-अ) &= शे' \end{aligned}\right\} \text{ऐसा हुआ}$$

इसी प्रकार यदि फ(य) = 0 और य का एक मान ± अ हो तो स्पष्ट है कि $\frac{फ(य)}{य \mp अ} = 0$ इस लिये ल = 0 वा ल' = 0 और शे = 0 वा शे' = 0 हो गा।

जैसे यदि $फ(य) = य^३ - य^२ + मा = 0$ और य का एक मान − अ तो

$$\begin{array}{l} य + अ)\, य^३ - य^२ + मा\, (य^२ - (अ + १)य + अ(अ + १) = ल' = 0 \\ \quad य^३ + अय^२ \\ \hline \quad -(अ + १)य^२ \\ \quad -(अ + १)य^२ - अ(अ + १)य \\ \hline \qquad\qquad अ(अ + १)य + मा \\ \qquad\qquad अ(अ + १)य + अ^२(अ + १) \\ \hline \qquad\qquad\quad मा - अ^२(अ + १) = शे' = 0 \end{array}$$

ऊपर जो उदाहरण दिखलाया है उसी युक्ति से लाला रामचन्द्र ने जिन महत्तम वा न्यूनतम मानों में घन समीकरणादि हो जाते हैं उन का मान निकाला है।

परन्तु यदि ध्यान देकर विचारो कि $\frac{फ(य)}{य \mp अ} = 0$ इस में जब य

* ३० अध्याय में दूसरी रीति भी अपनी बनाई हम ने लिखी है।

का एक मान य $=\pm$ अ है तो अवश्य साधारण बीज की प्रक्रिया से सिद्ध है कि फ(य), य$\mp$अ से निःशेष हो गा इस लिये शेष तो अवश्य ही शून्य के तुल्य है और तब फ(य) $=$ (य$\mp$अ)$\cdot$फि(य) $=0$ ऐसा हो गा इस लिये (य$\mp$अ)$\cdot$फि(य) $=0$ इस में य$\mp$अ का भाग देने से फि(य) $=0$ हो गा अर्थात् लब्धि भी शून्य के तुल्य हो गी ।

(१) अ$\cdot$य $-$ य^2 $=$ महत्तम तो य का क्या मान होगा? मानो कि महत्तम का मान मा है, इस लिये तब पहला समीकरण अ$\cdot$य $-$ य^2 $=$ मा ऐसा हो गा, फिर वर्गसमीकरण को तोड़ने से

$$\text{य} = \frac{\text{अ}}{१} \pm \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{४} - \text{मा}} \text{ ।}$$

अब यहां स्पष्ट है कि मा, $\frac{\text{अ}^2}{४}$ इस से बड़ा नहीं हो सकता क्योंकि बड़ा होने से ऋणात्मक शेष बचै गा ऐसी दशा में य का कोई सम्भव मान न आवै गा इस लिये य के सम्भव मान में मा का सब से बड़ा मान $\frac{\text{अ}^2}{४}$ यही हो गा तब उस समय में य $= \frac{\text{अ}}{२}$

असम्भव मूल के विना भी य का मान निकालना ।

जब, अ$\cdot$य $-$ य^2 यह महत्तम है तो यहां मानो कि य $=$ र $+ \frac{\text{अ}}{२}$

इस लिये अ$\cdot$य $-$ य^2 $=$ अ$\cdot$र $+ \frac{\text{अ}^2}{२} -$ र$^2 -$ अर $- \frac{\text{अ}^2}{४} = \frac{\text{अ}^2}{४} -$ र^2

अब यहां स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों र का मान घटै गा त्यों त्यों $\frac{\text{अ}^2}{४} -$ र^2 इस का वा अय $-$ य^2 इस का मान बढै गा इस लिये अय $-$ य^2 इस के महत्तममान में र $=0$ हो गा तब य का मान $= \frac{\text{अ}}{२}$ ।

(२) य $+ \frac{२\text{अ}}{\text{य}} =$ न्यूनतम, $\cdots$ (१) यहां य का मान निकालो? ।

यहां भी मानो कि न्यूनतममान $=$ मा तो य $+ \frac{२\text{अ}}{\text{य}} =$ मा

$\therefore$ य^2 $-$ यमा $= -$ २अ फिर वर्गसमीकरण के विधि से

$य = \frac{मा}{२} \pm \sqrt{\frac{मा^२}{४} - २ अ}$ । यहां स्पष्ट है कि $\frac{मा^२}{४}$ यह २ अ से अल्प नहीं हो सकता इस लिये न्यूनतम मान में $\frac{मा^२}{४} = २ अ$

$\therefore$ $मा = २\sqrt{२ अ}$ और $य = \sqrt{२ अ}$ ।

विना असम्भव मूल से य का मान निकालना।

(१) समीकरण में कल्पना करो कि $य = र + \frac{मा}{२}$ तो $माय - य^२$ $= मा\left(र + \frac{मा}{२}\right) - \left(र + \frac{मा}{२}\right)^२ = मार + \frac{मा^२}{२} - र^२ - मार - \frac{मा^२}{४}$ $= \frac{मा^२}{४} - र^२ = २ अ$ $\therefore$ $मा^२ = ८ अ + ४ र^२$ यहां स्पष्ट है कि यदि $र = ०$ तो $मा^२$ सब से अल्प ८ अ के तुल्य हो गा और तब $य = \sqrt{२ अ}$ ।

(३) $अय - य^२ = महत्तम$ तो य का मान क्या है ?।

यहां भी पूर्ववत् $महत्तम = मा$ तो $य^२ - अ \cdot य = - मा$ वा, $य^२ + अ_१ य + मा = ०$ (यदि $अ = - अ_१$) फिर वर्गसमीकरण की युक्ति से, $य = - \frac{अ_१}{२} + \sqrt{\frac{अ_१^२}{४} - मा}$ परन्तु मा को महत्तम कल्पना किया है इस लिये $मा = \frac{अ_१^२}{४}$ और $य = - \frac{अ_१}{२}$ .... (१)

इस पर से वर्गसमीकरणसम्बन्धि जितने महत्तममान हैं सब में चलराशि का मान जान सकते हो

जैसे यदि $२० य - य^२ = महत्तम = मा$

तो $य^२ + (- २०) य + मा = ०$ इस लिये $अ_१ = - २०$

तब (१) समीकरण से $य = - \frac{अ_१}{२} = - \frac{- २०}{२} = १०$ इस प्रकार सर्वत्र चलराशि का मान निकाल सकते हो।

(४) $य^३ + अ_२ य^२ + अ_१ य + मा = ०$ ऐसा घनसमीकरणसम्बन्धि महत्तममान से यदि समीकरण बनै तो मानो कि य का एक मान $- अ$ है तब ९५ वें प्रक्रम से

$$य+अ)\,य^३+अ_२य^२+अ_१य+मा\,(य^२+(अ_२-अ)य+अ^२+अ_१-अअ_२ = ० \cdots (१)$$
$$\underline{य^३+अय^२}$$
$$(अ_२-अ)\,य^२+अ_१य$$
$$\underline{(अ_२-अ)\,य^२+अ\,(अ_२-अ)\,य}$$
$$(अ^२+अ_१-अअ_२)\,य+मा$$
$$(अ^२+अ_१-अअ_२)\,य+अ\,(अ^२+अ_१-अअ_२)$$

इस लिये $\frac{मा}{अ} = अ^२ + अ_१ - अअ_२$ इस का उत्थापन (१) समीकरण में देने से $य^२ + (अ_२ - अ)\,य = -\frac{मा}{अ}$

फिर वर्गसमीकरण से $य = -\frac{अ_२ - अ}{२} + \sqrt{\frac{(अ_२ - अ)^२}{४} - \frac{मा}{अ}}$

परन्तु मा महत्तम है $\therefore\ \frac{(अ_२ - अ)^२}{४} = \frac{मा}{अ} = अ^२ + अ_१ - अअ_२$

इस लिये $अ_२^२ - २अ_२अ + अ^२ = ४अ^२ + ४अ_१ - ४अअ_२$

वा $३अ^२ - २अ_२ \cdot अ = अ_२^२ - ४अ_१$

तीन का भाग देने से

$$अ^२ - \frac{२अ_२}{३}\,अ = \frac{अ_२^२ - ४अ_१}{३}$$

वर्गसमीकरण से $अ = \frac{अ_२ + \sqrt{४अ_२^२ - १२अ_१}}{३}$

और $य = -\frac{अ_२ - अ}{२} = \frac{अ - अ_२}{२} = \frac{\sqrt{४अ_२^२ - १२अ_१} - २अ_२}{६} \cdots (क)$

इस पर से चाहे घनसमीकरणसम्बन्धि महत्तममान कैसा ही हो उस में चलराशि का मान जान सकते हो।

जैसे यदि $य^२ - य^३ = महत्तम = मा$

तो $य^३ - य^२ + मा = ०$ इस लिये $अ_२ = -१,\ अ_१ = ०$ इन का उत्थापन (क) समीकरण में देने से

$$य = \frac{\sqrt{४अ_२^२ - १२अ_१} - २अ_२}{६} = \frac{\sqrt{४ - ०} - २\times -१}{६} = \frac{२+२}{६} = \frac{२}{३}\ ।$$

इसी प्रकार यदि $य - य^3 =$ महत्तम $=$ मा तो $य^3 - य + मा = 0$ इस लिये यहां $अ_2 = 0$, $अ_1 = -1$ फिर (क) समीकरण से

$$य = \frac{\sqrt{4 अ_2^2 - 12 अ_1} - 2 अ_2}{6} = \frac{\sqrt{0 - 12 \times - 1} - 0}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

और भी यदि $15 य + 6 य^2 - य^3 =$ महत्तम $=$ मा

तो $य^3 - 6 य^2 - 15 य + मा = 0$ इस लिये $अ_2 = -6$, $अ_1 = -15$

$$\text{और } य = \frac{\sqrt{4 अ_2^2 - 12 अ_1} - 2 अ_2}{6} = \frac{\sqrt{अ_2^2 - 3 अ_1} - अ_2}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{36 + 45} + 6}{3} = \frac{9 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

इस प्रकार से चतुर्घातसमीकरणसम्बन्धि महत्तमादि में भी बहुधा ९५ वें प्रक्रम के विधि से चलराशि का मान निकाल सकते हो।

९६। यदि अनेक चलराशिसम्बन्धि महत्तम वा न्यूनतममान हो तो वहां एक एक को चल और बाक़ियों को स्थिर मान प्रत्येक चलराशियों का मान ९५ वें प्रक्रम से निकाल सकते हो इस प्रकार से उदाहरण में जै चलराशि हों गे उतने समीकरण बनें गे फिर उन पर से सब चलराशियों का मान विदित हो जाय गा।

जैसे,

(१) $य^3 + र^3 - 3 अ_1 यर$, इस के महत्तम वा न्यूनतममान में य और र का क्या मान हो गा?।

यहां कल्पना करो कि महत्तम वा न्यूनतम का मान $=$ मा

तो $य^3 + र^3 - 3 अ_1 यर =$ मा, यहां पहले र को स्थिर मानो

तो महत्तम और न्यूनतम के नियम से $य^3 - 3 अ_1 यर =$ महत्तम वा न्यूनतम $=$ मा

$\therefore$ $य^3 - 3 अ_1 यर - मा = 0$ अब यहां मानो कि य का एक मान $= -अ$

तो $य + अ)\, य^3 - ३ अ_1 यर - मा\, (\, य^2 - अय + अ^2 - ३ अ_1 र = 0 \cdots$ (१)

$$\begin{array}{l} य^3 + अय^2 \\ \hline \quad - अय^2 - ३ अ_1 यर \\ \quad - अय^2 - \quad अ^2 य \\ \hline \qquad\qquad (अ^2 - ३ अ_1 र)\, य - मा \\ \qquad\qquad (अ^2 - ३ अ_1 र)\, य + अ\, (अ^2 - ३ अ_1 र) \end{array}$$

$\therefore$ $अ^2 - ३ अ_1 र = -\frac{मा}{अ}$ वा $३ अ_1 र - अ^2 = \frac{मा}{अ}$ इस का उत्थापन (१) समीकरण में देने से

$$य^2 - अय = \frac{मा}{अ} \;\therefore\; य = \frac{अ}{२} \pm \sqrt{\frac{अ^2}{४} + \frac{मा}{अ}} = \frac{अ}{२} \pm \sqrt{\frac{अ^3 + ४ मा}{४ अ}}$$

$$= \frac{अ}{२} \pm \sqrt{\frac{-३ अ^3 + ४ मा + ४ अ^3}{४ अ}}$$ यहां स्पष्ट है कि यदि

$४ मा + ४ अ^3$ ऋण हो तो न महत्तममान न न्यूनतममान हो गा इस लिये $४ मा + ४ अ^3$ इस के धनमान में भी $४ मा + ४ अ^3$ यह $-३ अ^3$ इस से छोटा नहीं हो सकता इस लिये मा के न्यूनतममान में

$४ मा + ४ अ^3 = ३ अ^3$ वा, $४\, (३ अ अ_1 र - अ^3) + ४ अ^3 = ३ अ^3$

$\therefore$ $अ = २ \sqrt{अ_1 र}$ और $य = \frac{अ}{२} = \sqrt{अ_1 र}$

इसी प्रकार यदि य को स्थिर मानो तो

$र = \sqrt{अ_1 य}$, य का उत्थापन $\sqrt{अ_1 र}$ इस से देने से

$र = \sqrt{अ_1 \sqrt{अ_1 र}}$ $\therefore$ $र^4 = अ_1^3 र$ और $र = अ_1 = य$ इस प्रकार से और भी बहुत उदाहरण कर सकते हो। यह सब लाला रामचन्द्र * की कल्पना है।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $य = का + का^2$ तो सिद्ध करो कि

---

* लाला रामचन्द्र दिल्ली की प्रधान पाठशाला में बहुत दिनों तक अङ्गरेज़ी पढ़ाते थे इसी लिये इन्हें लोग "मास्टर रामचन्द्र" भी कहते हैं। रामचन्द्र ही की बनाई म्याक्ज़िमा मिनिमा नामक पुस्तक की भूमिका में प्रोफ़ेसर डिमार्गन साहब ने इन का जीवनवृत्तान्त लिखा है।

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताका}^2} = \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}(\text{१} + \text{२का}) + \text{२}\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$$

(२) यदि $\text{य}^2 + \text{र}^2 = \text{अ}^2$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{र}^2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{अ}^2}{\text{य}}\,\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{य}^2 \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} \text{ ।}$$

(३) यदि य = स · कोज्याष, र = स · ज्याष तो सिद्ध करो कि

$$\text{स} \cdot \frac{\text{य} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} + \text{र} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताष}}}{\text{य} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताष}} - \text{र} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}}} = \frac{\text{तास}}{\text{ताष}} \text{ ।}$$

(४) यदि स = य − इ ज्याय और स्प $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ य = स्प $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ र $\sqrt{\frac{\text{१} - \text{इ}}{\text{१} + \text{इ}}}$

तो सिद्ध करो कि $\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{(\text{१} - \text{इ})^{\frac{3}{2}}}{(\text{१} + \text{इकोज्यार})^2}$ ।

(५) यदि य = स · कोज्याष, र = स · ज्याष तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{य}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{र}}{\sqrt{\left\{\text{१} + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}}} = \frac{\text{स}^2}{\sqrt{\left\{\text{स}^2 + \left(\frac{\text{तास}}{\text{ताष}}\right)^2\right\}}} \text{ ।}$$

(६) यदि र = ५ ज्याय + ६ कोज्याय तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} + \text{र} = 0 \text{ ।}$$

(७) $\text{र} + \text{इ}^{\text{य}}\,\text{ज्याय} = 0$ इस में $\text{इ}^{\text{य}}$ और ज्याय को उड़ा दो? ।

उत्तर, $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} - \text{२}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{२र} = 0$ ।

(८) $\text{र} = \text{इ}^{\text{य}} + \text{अ} \cdot \text{ज्याय}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ता}^6\text{र}}{\text{ताय}^6} - \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = 0 \text{ ।}$$

(९) $स = ला\left(\frac{य}{र}\right)$ तो सिद्ध करो कि $य\frac{तास}{ताय} + र\cdot\frac{तास}{तार} = 0$ ।

(१०) यदि $\frac{१}{स} - \frac{१}{य} - \frac{१}{ल} = फ\left(\frac{१}{र} - \frac{१}{य} + \frac{१}{व} - \frac{१}{ल}\right)$ तो सिद्ध करो कि

$$य^२\frac{तास}{ताय} + र^२\cdot\frac{तास}{तार} + ल^२\cdot\frac{तास}{ताल} + व^२\cdot\frac{तास}{ताव} = २स^२ ।$$

(११) यदि $र = ज्याला_य$ तो सिद्ध करो कि

$$य^२\cdot\frac{ता^२र}{ताय^२} + य\cdot\frac{तार}{ताय} + र = 0 ।$$

(१२) यदि $र = ला_{ज्याय}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^२र}{ताय^२} + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^२ + १ = 0 ।$$

(१३) यदि $र = स्प^{-१}य$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^२र}{ताय^२}(१ + य^२) + २य\cdot\frac{तार}{ताय} = 0 ।$$

(१४) यदि $र = अ\cdot ज्याय + क\cdot ज्या२य$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^४र}{ताय^४} + ५\frac{ता^२र}{ताय^२} + ४र = 0 ।$$

(१५) $स = अय + कर + ग$ इस में अ, क, और ग को उड़ा देना चाहिये ।

$$\text{उत्तर, } \frac{ता^३स}{ताय^३}\cdot\frac{ता^२र}{ताय^२} - \frac{ता^२स}{ताय^२}\cdot\frac{ता^३र}{ताय^३} = 0 ।$$

(१६) $स = य\cdot फ\left(\frac{र}{य}\right) + फि(यर)$ इस पर से सिद्ध करना चाहिये कि $\frac{य^२}{र^२} = \frac{ता^२स}{तार^२}\times\frac{ताय^२}{ता^२स}$ ।

(१७) सिद्ध करो कि

$$\frac{इ^य}{इ^य+१} = \frac{१}{२} + \frac{१}{२}\cdot\frac{य}{२} - \frac{१}{२}\frac{य^३}{\underline{|४}} + \frac{३}{२}\cdot\frac{य^५}{\underline{|६}} \cdots\cdots ।$$

(१८) इसे सिद्ध करना चाहिये कि

$$\frac{२इ}{इ^२+१} = १ - \frac{१}{२} + \frac{५}{\lfloor ४} - \frac{६१}{\lfloor ६} + \frac{१३८५}{\lfloor ८} - \frac{५०५२१}{\lfloor १०} + \cdots ।$$

(१९) इसे सिद्ध करो कि

$$उज्याय = कोज्याय \left\{ \frac{य^२}{२} + \frac{५ य^४}{\lfloor ४} + \frac{६१ य^६}{\lfloor ६} + \frac{१३८५ य^८}{\lfloor ८} + \frac{५०५२१ य^{१०}}{\lfloor १०} + \cdots \right\} ।$$

(२०) इसे सिद्ध करो कि

$$ज्याय = \frac{य}{१ + \frac{य^२}{६} + \frac{७}{१५} \cdot \frac{य^४}{\lfloor ४} + \frac{३१}{२१} \frac{य^६}{\lfloor ६} + \cdots} ।$$

(२१) इसे सिद्ध करो कि

$$१^३ + २^३ + ३^३ + \cdots + न^३ = \left\{ \frac{न(न+१)}{२} \right\}^२ ।$$

(२२) इसे सिद्ध करो कि

$$१ + ४ + १० + २० + ३५ + ५६ + \cdots = \frac{न(न+१)(न+२)(न+३)}{२ \cdot ३ \cdot ४} ।$$

(२३) सिद्ध करो कि

$$य - \frac{३}{२} य^२ + \frac{६}{३} य^३ - \frac{१०}{४} य^४ + \cdots = \frac{य}{१+य} - \frac{१}{२} \frac{य^२}{२(१+य)^२} ।$$

(२४) $१ + २ नय + ४ न \cdot \frac{न-१}{२} य^२ + ७ न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} य^३ + \cdots$

$= (१+य)^न \left\{ १ + न \frac{य}{१+य} + न \cdot \frac{न-१}{२} \left(\frac{य}{१+य} \right)^२ \right\}$ यह कैसे सिद्ध होगा? ।

(२५) यह कैसे सिद्ध होगा कि

$$१ + २य + \frac{३}{२} य^२ + \frac{४}{\lfloor ३} य^३ + \frac{५}{\lfloor ४} य^४ + \cdots = इ^य (१+य) ।$$

(२६) $क_1 य - क_3 \frac{य^3}{\lfloor ३} + क_5 \frac{य^5}{\lfloor ५} - क_7 \frac{य^7}{\lfloor ७} + \cdots$

$$= कोज्याय \left\{ \triangle कय - \triangle^3 क \frac{य^3}{\lfloor ३} + \cdots \right\} + ज्याय \left\{ क - \triangle^2 क \frac{य^2}{\lfloor २} + \cdots \right\}$$

यह कैसे सिद्ध होगा? ।

(२७) $१ + न + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} + \frac{न(न-१)(न-२)}{\lfloor ३}$

$$+ \frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{\lfloor ४} + \cdots$$

इस में पहले चौथे आठवें इत्यादि पदों का योग बतावो? ।

उत्तर, ८८ वें प्रक्रम से $(१ + य)^न$ इस के पहला चौथा आठवां इत्यादि पदों का योग कर य के स्थान में १ का उत्थापन देव ।

(२८) २७ वें उदाहरण में यदि न विषमसंख्या हो तो सिद्ध करो कि पूर्वोक्त योग $२^{\frac{न-३}{२}}$ इस से अवश्य निःशेष हो गा? ।

(२९) यह कैसे सिद्ध हो गा कि

$$१ - \frac{१}{\lfloor ४} + \frac{१}{\lfloor ७} - \frac{१}{\lfloor १०} + \cdots = \frac{१}{३} \cdot इ^{\frac{१}{२}} \left\{ कोज्या \left(\frac{९० \sqrt{३}^{\circ}}{\pi} \right) \right.$$

$$\left. + \sqrt{३}\, ज्या \left(\frac{९० \sqrt{३}^{\circ}}{\pi} \right) \right\} - \frac{१}{३इ} ।$$

(३०) $य^3 - य^4$ इस के महत्तममान में य का क्या मान हो गा? इस का उत्तर लाला रामचन्द्र की युक्ति से निकालो? ।

उत्तर, पहले $य^4 - य^3 + मा = 0$ ऐसा समीकरण बनावो, और मानो कि $य - अ_1 = 0$, $य - अ_2 = 0$ और इन दोनों का घात $= य^2 - अय + क = 0$ अब इसी घात का $य^4 - य^3 + मा$ इस में भाग देकर पूर्वयुक्ति से य का मान $= \frac{३}{४}$ ले आवो ।

(३१) $स = अय + कर + गल$ और $य^2 + र^2 + ल^2 = १$ यहां स के महत्तममान में लाला रामचन्द्र की युक्ति से य, र, और ल का मान निकालो? ।

(३२) यदि $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} - \frac{य}{१-य^{२}} \cdot \frac{तार}{ताय} + \frac{र}{१-य^{२}} = 0$

और प = कोज्या$^{-१}$य तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{२}र}{ताप^{२}} + र = 0 ।$$

(३३) यदि चार से ऊपर संख्याओं से अठारह को बनावें तो कितने भेद हों गे ? । उत्तर, ५० ।

(३४) शून्य समेत एकादि अङ्कों से तीन स्थान वाली ऐसी संख्यायें बनी हैं जिन के स्थानीय अङ्कों का योग ग्यारह है तो बताओ ऐसी कितनी संख्यायें होगीं ? । उत्तर, ६१ ।

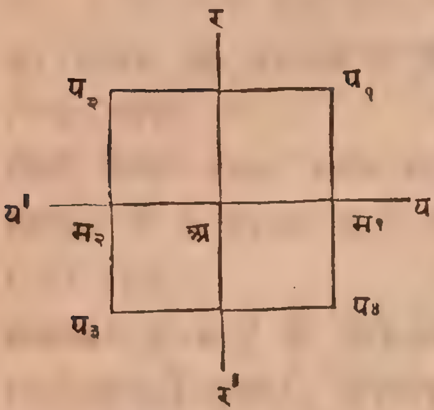
(३५) पांच स्थानविशिष्ट ऐसी संख्यायें हैं जिन के स्थानीय अङ्कों का योग ३५ होता है तो बताओ उन संख्याओं की संख्या कितनी है ? । उत्तर, ९९२ ।

इति दशमाध्याय समाप्त ।

एकादशाध्याय ११।

वक्रक्षेत्रों के समीकरण के विषय में।

९७। रर', य'य दो रेखा परस्पर लम्बरूप जो इस प्रक्रम के क्षेत्र में हैं उन्हें अक्षरेखा बोलते हैं। अ को मूलविन्दु, अम$_1$ को भुज और प$_1$म$_1$ को प$_1$ विन्दु की कोटि कहते हैं। यहां पर यदि यह मान लो कि अय और अर दिशा में भुजकोटिधन होते हैं तो प्रथम पद में अर्थात् जब तक प$_1$ विन्दु रअय समकोण के बीच में है तब तक भुजकोटिधन हों गे। द्वितीय पद में भुजऋण कोटिधन हो गी। तृतीय पद में भुजकोटि दोनों ऋण हों गे। और चतुर्थ पद में भुजधन कोटिऋण हो गी।



अब यदि किसी विन्दु का भुजकोटि और उन के धनत्व वा ऋणत्व का ज्ञान हो तो उस विन्दु का ज्ञान कर सकते हैं। अर्थात् अ विन्दु से य'य रेखा में यथादिक् भुज दान देने से और भुजाग्र से यथा दिक्कोटितुल्य रेखा लम्ब खड़ा करने से ठीक लम्बाग्र पर अभीष्ट विन्दु रहै गा।

भुज के स्थान में य और कोटि के स्थान में र लिखते हैं और जब कभी भुजकोटि दोनों को संग ही बोलते हैं तब "भुजयुग्म" कहते हैं जैसे यदि

य = + अ
र = + क } इस पर से प$_1$ का ज्ञान हो गा।

य = − अ
र = + क } .... प$_2$......

य = − अ
र = − क } .... प$_3$......

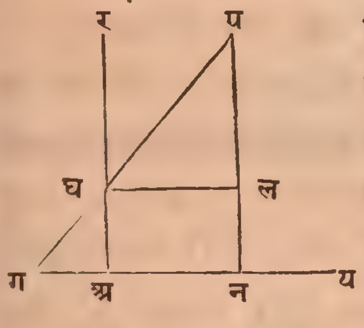
य = + अ
र = − क } .... प$_4$......

९८। जब स्पष्ट है कि वक्ररेखा अनेक विन्दुओं के योग से बनी है तब यदि अक्षरेखावों का योगविन्दु अर्थात् मूलविन्दु से प्रत्येक विन्दुओं का भुजयुग्म का ज्ञान हो तो उस से प्रत्येक विन्दु का स्थान जान सकते हो फिर उन स्थानों पर से उस वक्ररेखा का भी ज्ञान हो जाय गा।

९९। कभीं कभीं सुभीते के लिये मूलविन्दु से $प_1$ विन्दु तक जो रेखा हो उस का और उस रेखा से अय रेखा जितना बड़ा कोण बनाती है उस का ज्ञान कर उन पर से भी $प_1$ विन्दु का ज्ञान करते हैं क्यों कि अ विन्दु से अय रेखा के संग अभीष्टकोण तुल्य बनाने वाली जो रेखा हो उस में अविन्दु से अभीष्टरेखातुल्य खण्ड काटने से $प_1$ विन्दु का ज्ञान हो जाय गा।

इस कोण को प अक्षर से और इस रेखा को श्रु अक्षर से प्रकाश करते हैं। प्रायः श्रु और प को "अक्षीयभुजयुग्म" कहते हैं। जैसे ९७ प्रक्रम के क्षेत्र में $<प_1अय = प$ और $अप_1 = श्रु$ है।

१००। इस प्रक्रम में सरलरेखा का समीकरण दिखलाते हैं।



पग सरलरेखा है उस में कोई प विन्दु है जिस का भुज अन = य और कोटि पन = र है। अघ = क तथा < पगअ = प मानो। पन रेखा पर घल लम्ब कर दो तो घल = अन = य और < पघल = प ∴ पल = य · स्पप तब पन = पल + लन = र = य · स्पप + क यहां यदि स्पप = म तो र = म · य + क यही सरलरेखा का समीकरण हुआ अर्थात् यहां म और क को जान कर भुज पर से कोटि का ज्ञान हो जाय गा फिर भुजयुग्म पर से रेखा की स्थिति भी प्रगट हो जाय गी।

(१) यदि उस सरलरेखा का समीकरण जानना हो जो एक निर्दिष्टविन्दु पर हो के जाय और उस विन्दु का भुज = $अ_1$ और कोटि = $क_1$ हो तो स्पष्ट है कि पूर्व समीकरण पर से,

$क_1 = म \cdot अ_1 + क$ और $र = म \cdot य + क$

$\therefore र - क_1 = म(य - अ_1)$ यही अभीष्टसमीकरण हुआ।

(२) यदि सरलरेखा मूलविन्दु में हो के जाय तो स्पष्ट है कि क = 0 हो गा इस लिये तब उस रेखा का समीकरण र = म·य ऐसा हो गा।

(३) यदि दो सरलरेखा जिन का समीकरण ज्ञात है उन के योगविन्दु का भुजकोटि जानना हो तो स्पष्ट है कि $र = म \cdot य + क$ और $र = म_1 य + क_1$ ये दोनों तुल्य हों गे इस लिये

$मय + क = म_1 य + क_1 \quad \therefore य = \frac{क_1 - क}{म - म_1}$ इस का उत्थापन र में

देने से $र = \frac{मक_1 - मक}{म - म_1} + क = \frac{मक_1 - म_1 क}{म - म_1}$ ।

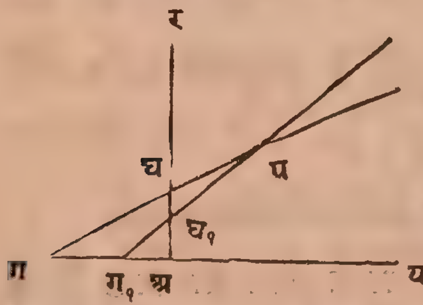
(४) जिन दो विन्दुओं का भुजयुग्म जानते हैं उन पर हो के जो सरलरेखा गई हो उस का समीकरण जानना हो तो $र = म \cdot य + क$ इस समीकरण में जो म और क है उन का मान विदित होने से समीकरण स्पष्ट हो जाय गा। प्रथम विन्दु का भुज $= अ_1$ और कोटि $= क_1$ तथा द्वितीय विन्दु का भुज $= अ_1$ और कोटि $= क_1$ मानो तो इन का उत्थापन ऊपर के समीकरण में देने से,

$$क_1 = म \cdot अ_1 + क \text{ और } क_2 = म \cdot अ_2 + क$$

$$क_1 - क_2 = म(अ_1 - अ_2) \text{ और } म = \frac{क_1 - क_2}{अ_1 - अ_2}$$

परन्तु $र = मय + क$ और $क_1 = मअ_1 + क$ इस लिये इन का अन्तर करने से $र - क_1 = म(य - अ_1) = \frac{क_1 - क_2}{अ_1 - अ_2}(य - अ_1)$ यही अभीष्टसमीकरण हुआ ।

१०१ । जिन दो रेखाओं का समीकरण दिया हुआ है उन के परस्पर सम्पात से जो कोण बनता है उस का ज्ञान करना हो तो नीचे का क्षेत्र देखो ।



यहां मानो कि गघ रेखा का समीकरण $र = म \cdot य + क$, और $ग_1 घ_1$ का समीकरण $र_1 = म_1 य_1 + क_1$ है तो स्पष्ट है कि कोस्प $< रघप = म$ और कोस्प $< घघ_1 प = म_1$ होगा

इस लिये $स्प^{-1} म_1 - स्प^{-1} म = < घपघ_1$

वा, $स्प < घपघ_1 = \frac{म_1 - म}{1 + मम_1}$

(१) यदि दोनों रेखा परस्पर समानान्तर हों तो

$स्प < घपघ_1 = 0 = \frac{म_1 - म}{1 + मम_1} \therefore म = म_1$ हो गा।

(२) यदि $< घपघ_1 = 90^0$ तो दोनों रेखा परस्पर लम्बरूप हों गी और $\frac{1}{0} = \frac{म_1 - म}{1 + मम_1} \therefore 1 + मम_1 = 0$ और $म_1 = -\frac{1}{म}$ इस लिये यदि $र = मय + क$ यह एक रेखा का समीकरण हो तो इस रेखा पर जो रेखा लम्ब हो गी उस का समीकरण $र = -\frac{1}{म} य + क_1$ यह हो गा।

१०२। जिस रेखा का समीकरण ज्ञात है उस रेखा पर जो लम्बरेखा है वह उस निर्दिष्टविन्दु पर हो के जाती है जिस का भुज-युग्म क्रम से $अ_2, क_2$ है ऐसी स्थिति में लम्बरेखा का समीकरण जानना है

कल्पना करो कि उस रेखा का समीकरण $र = मय + क$ है तब इस पर जो लम्बरेखा हो गी उस का समीकरण $र = -\frac{1}{म} य + क_1$ यह हो गा परन्तु यह निर्दिष्टविन्दु पर हो के जाती है इस लिये $क_2 = -\frac{1}{म} अ_2 + क_1 \therefore र - क_2 = -\frac{1}{म}(य - अ_2)$ यही समीकरण हुआ।

१०३। जिस सरलरेखा का समीकरण ज्ञात है उस पर जिस विन्दु से लम्ब डाला गया है उस विन्दु का भुजयुग्म जानते हैं उस पर से उस लम्ब का मान जानना है

कल्पना करो कि उस सरलरेखा का समीकरण $र = मय + क$ है और उस विन्दु का भुजयुग्म $अ_2, क_2$ है

अब यहां १०१ प्रक्रम की (२) क्रिया से लम्बरेखा का समीकरण $र = -\frac{1}{म} य + क_1$ यह हो गा और जब यह रेखा एक दिये हुए विन्दु पर हो के जाती है तब १०२ प्रक्रम से $र - क_2 = -\frac{1}{म}(य - अ_2)$ यह समीकरण हो गा इस लिये यदि लम्बमूल का भुजयुग्म $य_1, र_1$ मानो तो लम्ब का मान $= लं = \sqrt{(य_1 - अ_2)^2 + (र_1 - क_2)^2}$

$$= \sqrt{(य_1 - अ_2)^2 + \left\{-\frac{1}{म}(य_1 - अ_2)\right\}^2} = (य_1 - अ_2)\sqrt{1 + \frac{1}{म^2}}$$

$= (य_1 - अ_2)\sqrt{\frac{म^2+1}{म^2}} = (य_1 - अ_2)\frac{\sqrt{म^2+1}}{म}$ परन्तु लम्बरेखा और दी हुई रेखा जहां योग करती है उस बिन्दु का भुजयुग्म $य_1, र_1$ माना है इस लिये $र_1 = म \cdot य_1 + क = क_2 - \frac{य_1 - अ_2}{म}$ ५०० प्रक्रम की (३) क्रिया से

फिर समशोधन से $य_1 (म^2+1) = म \cdot क_2 + अ_2 - मक$

$\therefore\ य_1 = \frac{म \cdot क_2 + अ_2 - मक}{म^2+1}$ और $य_1 - अ_2$

$= \frac{म \cdot क_2 - मक - म^2 \cdot अ_2}{म^2+1} = \frac{म}{म^2+1}(क_2 - क - म \cdot अ_2)$ इस का उत्थापन लं में देने से $लं = \pm\frac{क_2 - क - मअ_2}{\sqrt{म^2+1}}$ भाज्य धन हो तो ऊपर का चिन्ह और ऋण हो तो नीचे का चिन्ह जानना ।

(१) यदि निर्दिष्टबिन्दु मूलबिन्दु हो तो $अ_2 = 0, क_2 = 0$

इस लिये $लं = \frac{क}{\sqrt{म^2+1}} = \frac{र - म \cdot य}{\sqrt{म^2+1}} = र \cdot कोज्याप - य \cdot ज्याप$

क्यों कि ($म =$ स्पप और $\sqrt{म^2+1} =$ छेप) ।

१०४ । यदि उस रेखा का समीकरण जानना हो जो कि अर और अय, रेखा में अ बिन्दु से "क" "अ" दूरी पर सम्पात करे तो पूर्व युक्ति से $र = म \cdot य + क$ जो यह सरलरेखा का समीकरण है उस में र को शून्य मानने से $0 = म \cdot अ + क \quad \therefore\ म = -\frac{क}{अ}$ पूर्व समीकरण में इस का उत्थापन देने से

$र = -\frac{कय}{अ} + क \quad \therefore\ \frac{र}{क} + \frac{य}{अ} = 1$ यही समीकरण हुआ ।

१०५ । यदि किसी बिन्दु का भुजयुग्म जान कर अन्तीयभुजयुग्म जानना हो तो सरलत्रिकोणमिति से

$य = कोज्याप \cdot श्रु,\ र = ज्याप \cdot श्रु$, ऐसा हो गा।

फिर इन पर से, $य^2 + र^2 = श्रु^2 \cdot कोज्या^2 प + श्रु^2 \cdot ज्या^2 प = श्रु^2$।

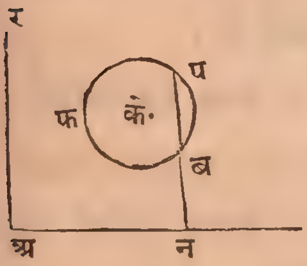
और $\frac{र}{य} = स्पप$।

अब इन पर से श्रु, और प दोनों विदित हो जायं गे।

इस प्रकार से सरलरेखा के विषय में ऊपर दिखलाई हुई युक्तियों से अनेक और नवीन सिद्दान्त बुद्दिमान निकाल सकता है।

वृत्त का समीकरण।

१०६। जिस वक्रक्षेत्र के भीतर ऐसा विन्दु हो जहां से वक्रक्षेत्र के परिधि तक जितनी रेखा खींची जायं वे सब आपस में समान हों तो उस वक्र को वृत्त बोलते हैं। वृत्त का कैसे समीकरण जानना यही इस प्रक्रम में दिखलाते हैं।



कल्पना करो कि पफब एक वृत्त है उस के "के" केन्द्र का भुजयुग्म $अ_2, क_2$ है और उस के परिधि में कोई प विन्दु है जिस का भुजयुग्म य, र है। वृत्त के व्यासार्द्ध का मान "त्रि" मानो तो गणित युक्ति से

$$\left.\begin{aligned}(य - अ_2)^2 + (र - क_2)^2 &= त्रि^2 \\ वा,\ य^2 + र^2 - 2अ_2 य - 2क_2 र + अ_2^2 + क_2^2 - त्रि^2 &= 0\end{aligned}\right\}$$ यही समीकरण हुआ।

(१) यदि अ विन्दु वृत्त के परिधि पर हो और अय रेखा केन्द्र में हो कर जाय तो स्पष्ट है कि $क_2 = 0$ और $अ_2 = त्रि$ इस लिये तब वृत्त का समीकरण

$$य^2 + र^2 - 2त्रिय + त्रि^2 - त्रि^2 = 0 = य^2 + र^2 - 2त्रि \cdot य$$

$\therefore\ र^2 = 2त्रि \cdot य - य^2$ यह हुआ।

(२) यदि "अ" मूलविन्दु केन्द्र ही में हो तब $अ_2 = 0$, $क_2 = 0$ हो गा इस लिये ऐसी स्थिति में $य^2 + र^2 = त्रि^2$

$\therefore\ र^2 = त्रि^2 - य^2$ यही वृत्त का समीकरण हो गा।

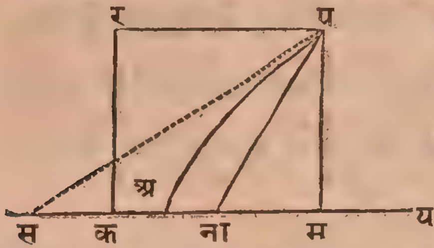
१०७। वृत्त का भुजयुग्म जान कर यदि ध्रुवीयभुजयुग्म जानना हो तो यहां $य = श्रु \cdot कोज्याप,\ र = श्रु \cdot ज्याप$, इस का उत्थापन पहले समीकरण में देने से

$$(\text{शु}\cdot\text{कोज्याप} - \text{अ}_2)^2 + (\text{शु}\cdot\text{ज्याप} - \text{क}_2)^2 = \text{त्रि}^2$$

$\therefore$ $\text{शु}^2\cdot\text{कोज्या}^2\text{प} + \text{शु}^2\text{ज्या}^2\text{प} - 2\,\text{शु}\cdot\text{अ}_2\,\text{कोज्याप} - 2\,\text{शु}\cdot\text{क}_2\text{ज्याप} + \text{अ}_2^2 + \text{क}_2^2 - \text{त्रि}^2 = 0 = \text{शु}^2 - 2\,\text{शु}(\text{अ}_2\text{कोज्याप} + \text{क}_2\text{ज्याप}) + \text{अ}_2^2 + \text{क}_2^2 - \text{त्रि}^2$ यही समीकरण होगा।

परवलय का समीकरण।

१०८। यदि अप वक्रक्षेत्र के भीतर ना ऐसा विन्दु हो कि जहां से परिधि तक कोई नाप रेखा खींची जाय और प विन्दु से कर नियत रेखा पर, पर लम्ब डाला जाय और नाप = पर तो अप वक्रक्षेत्र को "परवलय" कहते हैं। यहां क यदि मूलविन्दु, प विन्दु का कम = भु = य, और पम = कोटि = र तो अप वक्रक्षेत्र का समीकरण जान सकते हैं।



कना को २अ माना, अब यहां य − २अ = नाम इस लिये

$$\text{नाप}^2 = \text{र}^2 + (\text{य} - 2\,\text{अ})^2 = \text{पर}^2 = \text{य}^2$$

$\therefore$ $\text{र}^2 + \text{य}^2 - 4\,\text{यअ} + 4\,\text{अ}^2 = \text{य}^2$ और, $\text{र}^2 = 4\,\text{यअ} - 4\,\text{अ}^2$ यह समीकरण हुआ।

(१) यदि र = ० माने तो स्पष्ट है कि य = कअ इस लिये $4\,\text{य}\cdot\text{अ} - 4\,\text{अ}^2 = 0$ $\therefore$ य = अ = कअ।

(२) यदि अ को मूलविन्दु माने तो य + अ = कम, इस का उत्थापन पूर्व समीकरण में देने से $\text{र}^2 = 4\,\text{अय}$ यह परवलय का समीकरण हुआ।

(३) यदि य = अ तो $\text{र}^2 = 4\,\text{अ}^2$ $\therefore$ र = २अ ऐसे र के दूने मान को ध्रुवमान कहते हैं।

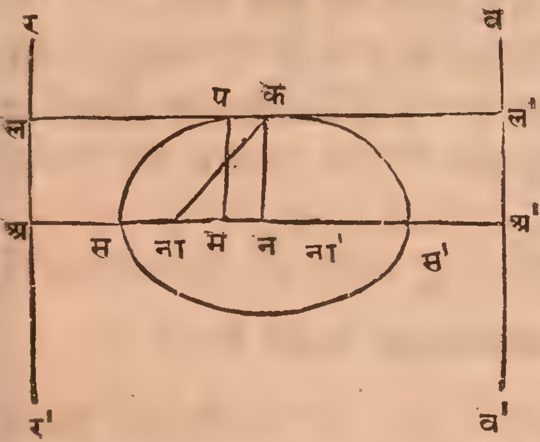
(४) यदि अनीयभुजयुग्म जानना हो तो शु = नाप और < अनाप = ष, कल्पना करो।

फिर इन पर से कम = शु = २अ + नाम = २अ − शु · कोज्याप

$\therefore$ $\text{शु}(1 + \text{कोज्याप}) = 2\,\text{अ}$, वा $\text{शु} = \dfrac{\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\,\frac{1}{2}\text{प}}$ यही समीकरण हुआ।

दीर्घवृत्त का समीकरण ।

१०९ । रर' स्थिर रेखा और ना स्थिर विन्दु है ना से परिधि के कोई प विन्दु तक नाप रेखा खींचो और प विन्दु से रर' रेखा पर पल लम्ब डालो तो यदि $\frac{\text{नाप}}{\text{पल}} < 1$ और $\frac{\text{नाप}}{\text{पल}} = \text{स्थिर} = \text{इ}$ तो ऐसे वक्र-क्षेत्र को दीर्घवृत्त कहते हैं ।



रर' रेखा पर ना विन्दु से नाअ लम्ब डालो और नाअ = प मानो। अब यदि अ को मूलविन्दु और प विन्दु का भुज = अम = य, और कोटि = पम = र मानो तो

$$\text{पल} \cdot \text{इ} = \text{नाप} = \text{य} \cdot \text{इ}$$

और अम − नाअ = नाम = य − प

$$\therefore \text{र}^2 + (\text{य} - \text{प})^2 = \text{इ}^2 \cdot \text{य}^2$$

वा $\text{र}^2 = \text{इ}^2 \cdot \text{य}^2 - (\text{य} - \text{प})^2$ यह समीकरण हुआ ।

(१) यदि $\text{र} = 0$ तो, $0 = \text{इ}^2 \cdot \text{य}^2 - (\text{य} - \text{प})^2$

$$\therefore \pm \text{इय} = \text{य} - \text{प} \text{ और } \text{य} = \frac{\text{प}}{1 \pm \text{इ}}$$

इस लिये $\text{अस} = \frac{\text{प}}{1 + \text{इ}}$ और $\text{अस}' = \frac{\text{प}}{1 - \text{इ}}$

तब, $\text{अस}' - \text{अस} = \text{सस}' = \frac{\text{प}}{1 - \text{इ}} - \frac{\text{प}}{1 + \text{इ}} = \frac{2\text{इप}}{1 - \text{इ}^2} = 2\text{अ}$, इस २अ को बृहद्व्यास बोलते हैं ।

(२) यदि स को मूलविन्दु मानो तो भुज में अस जोड़ देने से पहला अ मूलविन्दु से भुज हो गा फिर इस का उत्थापन देने से ।

$$\text{र}^2 = \left(\text{इ} \cdot \text{य} + \frac{\text{इ} \cdot \text{प}}{1 + \text{इ}}\right)^2 - \left(\text{य} - \frac{\text{इ} \cdot \text{प}}{1 + \text{इ}}\right)^2 \left\{ \because \text{इ} \cdot \text{अस} = \text{सना} = \frac{\text{इप}}{1 + \text{इ}} \right.$$

$$= \left\{\text{य}(1 + \text{इ})\right\} \left\{\frac{2\text{इय}}{1 + \text{इ}} - \text{य}(1 - \text{इ})\right\}$$

$= \{ य (१ + इ) \} \{ २ अ (१ - इ) - य (१ - इ) \}$

$= य (१ + इ) (१ - इ) (२ अ - य) = (१ - इ^२) (२ अ \cdot य - य^२)$

यह समीकरण हुआ ।

(३) यदि सस' के मध्य बिन्दु न को मूलबिन्दु कल्पना कर वहां से भुज की गणना करो तो य + अ यह (२) क्रिया का भुज होगा अब इस का उत्थापन (२) क्रिया के समीकरण में देने से

$र^२ = (१ - इ^२)(अ^२ - य^२)$ यह समीकरण हुआ ।

(४) (३) क्रिया से जो कोटिवर्ग सिद्ध हुआ है उस में यदि य = ० मानो तो $र^२ = क^२ = (१ - इ^२) अ^२ \therefore र = क$ हो गा । इस क को दीर्घवृत्त का लघुव्यासार्द्ध कहते हैं ।

(५) जब $क^२ = (१ - इ^२) अ^२ \therefore \frac{क^२}{अ^२} = १ - इ^२$ अब इस का उत्थापन (२) और (३) क्रिया के समीकरणों में देने से क्रम से,

$र^२ = \frac{क^२}{अ^२} (२ अय - य^२)$ । $र^२ = \frac{क^२}{अ^२} (अ^२ - य^२)$ ये समीकरण उत्पन्न हों गे ।

११० । यदि दीर्घवृत्त का "अक्षीयभुजयुग्म" जानना हो तो नाप = श्रु, $<$ सनाप = प, (१०९ प्रक्रम का क्षेत्र देखो)

अब, नाप = इ · पल = इ (अना + नाम)

वा श्रु = अ (१ - $इ^२$) + इ श्रुकोज्या (π - प)

इस लिये श्रु (१ + इ · कोज्याप) = अ (१ - $इ^२$)

$$और\ श्रु = \frac{अ (१ - इ^२)}{१ + इ \cdot कोज्याप}$$

$\{ यहां\ जब\ प = अना\ और\ \frac{इ \cdot प}{१ - इ^२} = अ \therefore प = \frac{अ (१ - इ^२)}{इ},$

और, (अना + नाम) इ = अ (१ - $इ^२$) + इ · श्रुकोज्या (π - प) $\}$

(१) यदि न मूलबिन्दु से अक्षीयभुजयुग्म जानना हो तो नप = श्रु, $<$सनप = प और य = - श्रुकोज्याप, र = श्रु · ज्याप

$$इस\ लिये\ र^२ = श्रु^२ \cdot ज्या^२प = \frac{क^२}{अ^२} \left\{ अ^२ - (- श्रुकोज्याप)^२ \right\}$$

वा, $\text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{प} = \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}(\text{अ}^2 - \text{श्रु}^2 \cdot \text{कोज्या}^2\text{प})$

$\therefore \text{अ}^2 \cdot \text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{प} = \text{अ}^2\text{क}^2 - \text{क}^2\,\text{श्रु}^2 \cdot \text{कोज्या}^2\text{प}$

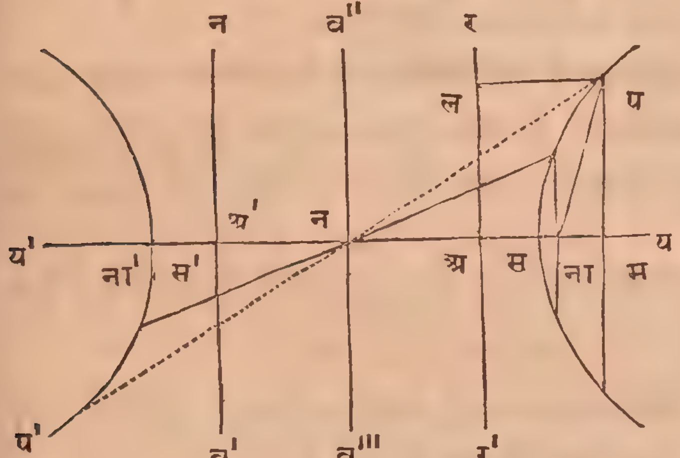
और $\text{श्रु}^2(\text{अ}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{प} + \text{क}^2 \cdot \text{कोज्या}^2\text{प}) = \text{अ}^2\text{क}^2$

वा, $\text{श्रु}^2 \left\{ \text{ज्या}^2\text{प} + (1 - \text{इ}^2) \cdot \text{कोज्या}^2\text{प} \right\} = \text{क}^2$

इस लिये $\text{श्रु}^2 = \frac{\text{क}^2}{1 - \text{इ}^2 \cdot \text{कोज्या}^2\text{प}}$ यह समीकरण उत्पन्न हुआ।

इस प्रकार दीर्घवृत्त की बहुत बातें जान सकते हो ग्रन्थ बढ़ जाने के भय से संक्षेप में लिखा है।

१११। अतिपरवलय का समीकरण।



यदि ना नियतविन्दु हो और रर' नियतरेखा और पविन्दु से रर' रेखा पर पल लम्ब गिरा समझो तो यदि $\frac{\text{नाप}}{\text{पल}} > 1$ और $\frac{\text{नाप}}{\text{पल}} =$ स्थिर = इ तो ऐसे वक्रक्षेत्र को अतिपरवलय कहते हैं। यहां भी यदि अ को मूलविन्दु कल्पना करो तो ११० प्रक्रम की युक्ति के ऐसा

$\text{र}^2 = \text{इ}^2 \cdot \text{य}^2 - (\text{य} - \text{प})^2$ और $\text{अस} = \frac{\text{प}}{1 + \text{इ}}$ यहां अस का दूसरा मान $\frac{\text{प}}{1 - \text{इ}}$ यह ऋण आता है क्यों कि $\text{इ} > 1$ इस लिये दिशा को उलटने से $\text{अस}' = \frac{\text{प}}{\text{इ} - 1}$ यह हो गा, फिर यहां भी $\text{सस}' = 2\,\text{अ} = \frac{\text{प}}{1 + \text{इ}} + \frac{\text{प}}{\text{इ} - 1}$ $= \frac{2\,\text{इप}}{\text{इ}^2 - 1}$ कल्पना करो।

(१) यदि स को मूलविन्दु मानो तो

यहां पहला भुज $= य + अस = य + \frac{प}{इ+१}$ इस का उत्थापन ऊपर के समीकरण में देने से,

$$र^2 = \left(इय + \frac{इप}{इ+१}\right)^2 - \left(य - \frac{इप}{इ+१}\right)^2$$
$$= \{इ \cdot य + अ(इ-१)\}^2 - \{य - अ(इ-१)\}^2$$
$$= \{य(इ+१)\}\{य(इ-१) + २अ(इ-१)\}$$
$$= (इ^2-१)(२अ \cdot य + य^2)$$ यह समीकरण उत्पन्न हुआ ।

(२) यदि सस' का मध्यविन्दु न मूलविन्दु हो तो (१) क्रिया के समीकरण का भुज $= य + अ$, अब इस पर से $र^2 = (इ^2-१)(भु^2 - अ^2) = (इ^2-१)(य^2-अ^2)$ यह समीकरण सिद्ध हुआ ।

देखो $(इ^2-१)(य^2-अ^2)$ इस समीकरण में जब तक य का मान अ से अल्प रहै गा तब तक कोटि का मान असम्भव हो गा । और यदि $क^2 = अ^2(इ^2-१)$ ऐसा कल्पना करो तो (१) और (२) क्रिया के समीकरणों को $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(२अय + य^2)$ । $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(य^2 - अ^2)$ ऐसे लिख सकते हो ।

११२ । यदि अतिपरवलय का अक्षीयभुजयुग्म जानना हो तो यहां भी नाप = श्रु, ∠सनाप = ष इस पर से

क्षेत्र लक्षण से, नाप = इ · पल (देखो, १११ प्र· का क्षेत्र)

वा, $श्रु = इ(अना + नाम) = अ(इ^2-१) + इ \cdot श्रुकोज्या(\pi - ष)$

(११० प्रक्रम की रीति के ऐसा)

इस लिये $श्रु(१ + इ \cdot कोज्याष) = अ(इ^2-१)$

और $श्रु = \frac{अ(इ^2-१)}{१ + इ \cdot कोज्याष}$ यह समीकरण हुआ ।

(१) यदि न मूलविन्दु हो तो

$य = -श्रु \cdot कोज्याष$, $र = श्रु \cdot ज्याष$

इन का उत्थापन १११ प्रक्रम की (२) क्रिया के अन्त्य में दूसरे समीकरण में देने से,

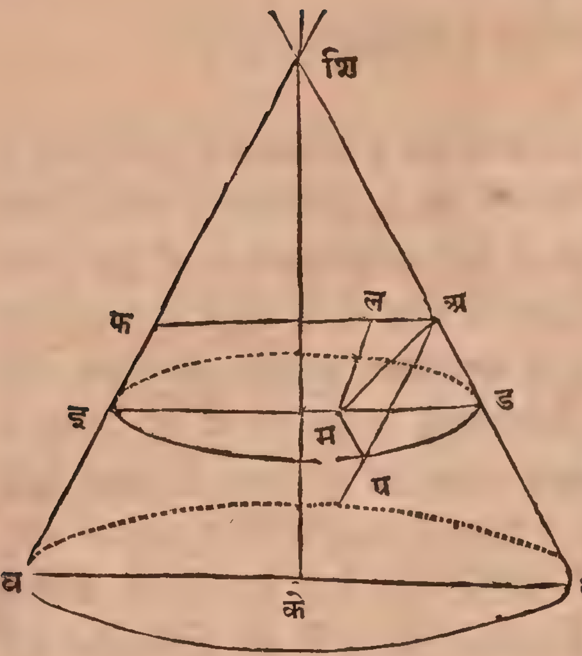
$$\text{श्र} = \frac{\text{क}}{\text{द्र}^2 \cdot \text{कोज्या}^2\text{य} - 1}$$ ऐसा समीकरण हो गा।

११३। परवलय में कोटिवर्ग का मूल धनऋण दोनों लेने से यह सिद्ध कर सकते हो कि परवलय का जितना अवयव अय से ऊपर है उतना ही नीचे है। दीर्घवृत्त में और अतिपरवलय में भी यही बात सिद्ध कर सकते हो परन्तु दीर्घवृत्त में यदि स' से दहने और वव' अक्ष कल्पना करो और अ' मूलविन्दु से बायें ओर भुजादि का गणना करो तो दीर्घवृत्त में एक और ना' नियतविन्दु उत्पन्न हो गा इस विन्दु से भी क्षेत्र में वही लक्षण पाये जायं गे जो कि ना विन्दु से उत्पन्न होते हैं। इसी प्रकार अतिपरवलय में न विन्दु से ऋणभुज ग्रहण करने से अति-परवलय का आधा अवयव रर' अक्ष से बायें ओर हो गा और न विन्दु से जितनी दूरी पर रर' अक्ष है उतनी ही दूरी पर बायें ओर वव' अक्ष कल्पना करने से अतिपरवलय के दूसरे आधे अवयव में भी एक ना' नियतविन्दु उत्पन्न हो गा इस से भी क्षेत्र का वही लक्षण पाया जाय गा। दीर्घवृत्त में और अतिपरवलय में इस प्रकार से जो दो नियत-विन्दु उत्पन्न हुए हैं उन को नाभी कहते हैं और न विन्दु को केन्द्र कहते है। (इन सब का बोध होने के लिये क्रम से १०८, १०९, और १११ प्रक्रम का क्षेत्र देखो) ये सब बातें बीजगणित में जो कुशल हैं वे अच्छी भांति से समझ सकते हैं। यदि दोनों अक्ष परस्पर लम्बरूप न हों तो उन के झुकाव को जान इष्टविन्दु से अर, अय के समानान्तर-रेखा खींच इन का नाम कोटिभुज रख सब समीकरण बना सकते हो।

११४। सरलरेखा, वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त, और अति परवलय, ये पांचो समसूच्याकार शङ्कु को समान धरातल से काटने से उत्पन्न होते हैं इस लिये इन का नाम शङ्कुच्छिन्न भी है। जैसे

(१) यदि शङ्कु को ऐसे धरातल से काटो जो कि शङ्कु के शिरः-कोण पर हो के गया हो तो रेखागणित के एकादशाध्याय से स्पष्ट हैं कि शङ्कु का कटा प्रान्त शिरःकोण से दोनों ओर में सरलरेखा हो गा।

(२) यदि शङ्कु के आधार वृत्त के धरातल के समानान्तरधरा-तल से शङ्कु को काटो तो शङ्कु का कटा प्रान्त भी वृत्त ही हो गा रेखागणित के एकादश, तथा षष्ठाध्याय की युक्ति से।



(३) कल्पना करो कि वकशि एक समसूच्याकार शङ्कु है। वकशि त्रिभुज का धरातल शङ्कु के आधार धरातल पर लम्ब है। शङ्कु को ऐसे धरातल से काटा जो कि इसी त्रिभुज के धरातल पर लम्ब भी हो तो अब विचार करना है कि शङ्कु का कटा प्रान्त अप वक्रक्षेत्र का कैसा लक्षण है। पविन्दु में लगा कर आधारवृत्त के धरातल के समानान्तर एक इपउ धरातल करो तो इस से कटा शङ्कु का प्रान्त इपउ इसी प्रक्रम की (२) क्रिया से वृत्त ही हो गा और इस वृत्त की व्यासरेखा इउ, त्रिभुज का धरातल और इसी वृत्त के धरातल की योगरेखा जानो। त्रिभुज का धरातल और शङ्कु को काटने वाला धरातल की योगरेखा अम कल्पना करो और फअ को इउ के समानान्तर बनावो। इउप धरातल और काटने वाला धरातल दोनो शिवक त्रिभुज के धरातल पर लम्ब हैं इस लिये इन की योगरेखा पम भी त्रिभुज के धरातल पर लम्ब हो गी रेखागणित के एकादशाध्याय के उन्नीसवें क्षेत्र से।

मल, शिव के समानान्तर खींचो।

अब यदि अ को मूलविन्दु, पविन्दु का भुज = अम = य, और कोटि = पम = र कल्पना करो, और $<$ वशिक = २अ, शिअ = ग, $<$ शिअम = ष, और $<$ अमल = π − ष − २अ, मानो तो,

$$\frac{\text{मउ}}{\text{अम}} = \frac{\text{ज्यामअउ}}{\text{ज्यामउअ}} = \frac{\text{ज्याष}}{\text{कोज्याअ}}, \text{ इस लिये मउ} = \frac{\text{य}\cdot\text{ज्याष}}{\text{कोज्याअ}}\text{।}$$

$$\text{इम} = \text{फल} = \text{फअ} - \text{अल} = \text{२ग}\cdot\text{ज्याअ} - \text{अल},$$

$$\text{परन्तु, } \frac{\text{अल}}{\text{अम}} = \frac{\text{ज्याअमल}}{\text{ज्याअलम}} = \frac{\text{ज्या}(\pi - \text{ष} - \text{२अ})}{\text{ज्या}(\frac{\pi}{2} + \text{अ})}$$

इस लिये $अल = \dfrac{य \cdot ज्या(ष + २अ)}{कोज्याअ}$

और $इम = २ग \cdot ज्याअ - \dfrac{य \cdot ज्या(ष + २अ)}{कोज्याअ}$

परन्तु, रेखागणित के तीसरे अध्याय से $पम^2 = इम \cdot मड$

इस लिये, $र^2 = \dfrac{य \cdot ज्याष}{कोज्याअ}\left\{२ग \cdot ज्याअ - \dfrac{य \cdot ज्या(ष + २अ)}{कोज्याअ}\right\}$

अब ऊपर के समीकरण में यदि $-\dfrac{ज्या(ष + २अ)}{कोज्या^2अ}$ यह ऋण, धन, वा शून्य के समान हो तो दीर्घवृत्तादि के समीकरणों से स्पष्ट हैं कि क्रम से दीर्घवृत्त, अतिपरवलय, वा परवलय हो गा अर्थात् ष + २अ यदि दो समकोण से छोटा हो तो दीर्घवृत्त, बड़ा हो तो अतिपरवलय और समान हो तो परवलय हो गा।

इस पर से अब यही सिद्ध हुआ कि यदि अम, शिव के समानान्तर हो तो कटा हुआ क्षेत्र परवलय हो गा यदि अम बढ़ाने से शिव में लगै तो कटा क्षेत्र दीर्घवृत्त हो गा। और यदि अम ऊपर के ओर बढ़ाने से मिलै तो कटा क्षेत्र अतिपरवलय हो गा।

यदि ग = ० तो ष + २अ का मान, दो समकोण से छोटा होने से कटा क्षेत्र शून्य, दो समकोण के तुल्य होने से कटा क्षेत्र एक सरलरेखा, और दो समकोण से बड़ा होने से कटा क्षेत्र दो सरलरेखारूप हो गा।

यदि ष = ० वा ष = π हो तो चाहे ग का मान जो हो परन्तु कटा क्षेत्र एक सरलरेखा ही हो गा।

ऊपर के समीकरण को

$$र^2 = \frac{ज्याष \cdot ज्या(ष + २अ)}{कोज्या^2अ}\left\{\frac{२ग\, ज्याअ \cdot कोज्याअ}{ज्या(ष + २अ)}य - य^2\right\}$$

ऐसे भी लिख सकते हो। यदि ष + २अ $< \pi$ अर्थात् जब कि कटा क्षेत्र दीर्घवृत्त हो अर्थात् $र^2 = \dfrac{क^2}{अ^2}(२अय - य^2)$ इस दीर्घवृत्त के समीकरण के साथ यदि ऊपर के समीकरण का तुलना करो तो

अवश्य $२ अ = \frac{२ ग \cdot ज्या अ \cdot कोज्या अ}{ज्या (प + २ अ)} = \frac{ग \cdot ज्या २ अ}{ज्या (प + २ अ)}$ ।

$$\frac{क^२}{अ^२} = \frac{ज्या प \cdot ज्या (प + २ अ)}{कोज्या^२ अ} \therefore क^२ = \frac{ग^२ \cdot ज्या^२ अ \cdot ज्या प}{ज्या (प + २ अ)}$$

$$और\ इ^२ = १ - \frac{क^२}{अ^२} = \frac{कोज्या^२ अ - \left\{ ज्या^२ (प + अ) - ज्या^२ अ \right\}}{कोज्या^२ अ}$$

$= \frac{कोज्या^२ (प + अ)}{कोज्या^२ अ}$ इसी प्रकार जब कटा क्षेत्र अतिपरवलय हो तो अतिपरवलय के समीकरण के साथ तुलना करने से अतिपरवलय का इ इत्यादि का मान निकाल सकते हो ।

इस प्रकार से यहां पर संक्षेप से इन वक्रक्षेत्रों का लक्षण प्रकाश किया गया है जिस में विद्यार्थी लोग इन के नाम और गुण से परिचित हो जायं । जिन को इन वक्रक्षेत्रों के विषय में विशेष जानना हो वे लोग मेरा बनाया दीर्घवृत्तलक्षण और भाभ्रमरेखानिरूपण नाम ग्रन्थ को देखें ।

११५ । इस प्रक्रम में परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के लक्षणों का शीघ्र ज्ञान होने के लिये उन के श्लोक और दोहे बना कर लिखते हैं और कुछ उदाहरण भी कर के दिखलाते हैं ।

श्लोक ।

या स्यान्निश्चलचिन्हाद्यत्क्षेत्रस्य वृतिस्थबिन्दुमत्र ।
रेखाऽथो तद्बिन्दोर्या लम्बो नियतरेखिकासंस्थः ॥ १ ॥
अनयोर्मिती समाने यर्हि भवेतां सदा तदा नूनम् ।
परवलयाख्यं क्षेत्रं भवति विचित्रं बहूपयोगीह ॥ २ ॥

दोहा ।

परिधिबिन्दु से लम्ब एक अरु एक रेखा मित्र ।
नियतरेखिकाबिन्दु पर क्रम से करिय विचित्र ॥ १ ॥
जौं समान ये हों दोऊ सकल गुनन को धाम ।
वक्रक्षेत्र को गणकवर धरिय परवलय नाम ॥ २ ॥

श्लोक ।

नियतस्थितविन्दोर्या रेखा यत्परिधिं गता ।
नियतस्थितरेखायां यश्च लम्बो वृतिस्थितात् ॥ १ ॥
तद्विन्दोस्तुल्यसम्बन्धस्त्वनयोर्यदि जायते ।
रूपाल्पो दीर्घवृत्तं तत्क्षेत्रं नव्यैरुदाहृतम् ॥ २ ॥

दोहा ।

परिधिविन्दु से लम्ब एक अरु एक रेखा मित्र ।
नियतरेखिकाविन्दु पर क्रम से करिय विचित्र ॥ १ ॥
लम्बभक्तपररेखिका फल जैां होय समान ।
न्यून एक तें कहत तेहि दीरघवृत्त सुजान ॥ २ ॥

श्लोक ।

निश्चलचिन्हाद्यस्य परिधिस्थं रेखिका कृता विन्दुम् ।
याऽथो निश्चलरेखोपरि तद्विन्दोः कृतो लम्बः ॥ १ ॥
अनयोर्यदि सम्बन्धो रूपानल्पो भवेत्समानश्च ।
अतिपरवलयक्षेत्रं विहितं तत्सर्वदोपयोगीह ॥ २ ॥

दोहा ।

परिधिविन्दु से लम्ब एक अरु एक रेखा मित्र ।
नियतरेखिकाविन्दु पर क्रम से करिय विचित्र ॥ १ ॥
लम्बभक्तपररेखिका फल जैां होय समान ।
अधिक एक से कहिय तेहि अतिपरवलय महान ॥ २ ॥

उदाहरण (१) जिस सरलरेखा का अर्द्धीयभुजजुग्म अर्थात् $प = \frac{\pi}{३}$ और श्रु = ३ हैं उस के भुजकोटि का मान बताओ? ।

यहां १०५ प्रक्रम से

$य = श्रु \cdot कोज्याप = \frac{३}{२}$ और $र = श्रु \cdot ज्याप = \frac{३\sqrt{३}}{२}$ यही उत्तर हुआ ।

उदाहरण (२) १०८ प्रक्रम में जो क्षेत्र है उस में <ना पर कोणार्धकारिणीरेखा पस है तो सिद्ध करो कि नाम = कस होगा? ।

यहां क्षेत्रलक्षण से, नास और पर समानान्तर हैं

इस लिये ∠ रपस = ∠ पसना परन्तु ∠ रपस = ∠ सपना

∴ ∠ नापस = ∠ पसना और नास = नाप = पर = कम अर्थात् सना = कम हुआ इन में समान कना को घटा देने से कस = नाम यही उत्तर हुआ।

उदाहरण (३) १०९ प्रक्रम के क्षेत्र में यह सिद्ध करो कि नाप + ना'प = २ अ हो गा?।

यहां क्षेत्रलक्षण से

$$\text{नाप} = \text{इ} \cdot \text{पल} = \text{इ}\,(\text{अस} + \text{सन} + \text{नम}) = \frac{\text{इ} \cdot \text{प}}{१ + \text{इ}} + \text{इ} \cdot \text{अ} + \text{इ} \cdot \text{य}$$

$$\text{और ना}'\text{प} = \text{इ} \cdot \text{पल}' = \text{इ}\,(\text{अ}'\text{स}' + \text{स}'\text{न} - \text{नम}) = \frac{\text{इप}}{१ + \text{इ}} + \text{इ} \cdot \text{अ} - \text{इ} \cdot \text{य}$$

$$\text{इस लिये नाप} + \text{ना}'\text{प} = \frac{२\,\text{इप}}{१ + \text{इ}} + २\,\text{इअ} = २\,\text{अ}\,(१ - \text{इ}) + २\,\text{इअ} = २\,\text{अ}$$

यह सिद्ध हुआ।

उदाहरण (४) १११ प्रक्रम के क्षेत्र में यह सिद्ध करो कि ना'प − नाप = २ अ हो गा?।

यहां क्षेत्रलक्षण से

$$\text{ना}'\text{प} = \text{इ} \cdot \text{अ}'\text{म} = \text{इ}\left(\text{य} + \text{अ} - \frac{\text{प}}{\text{इ} + १}\right) = \text{इय} + \text{इअ} - \frac{\text{इ} \cdot \text{य}}{\text{इ} + १}$$

$$\text{और नाप} = \text{इ} \cdot \text{अम} = \text{इ}\left(\text{य} - \text{अ} + \frac{\text{प}}{\text{इ} + १}\right) = \text{इय} - \text{इअ} + \frac{\text{इ} \cdot \text{य}}{\text{इ} + १}$$

$$\text{इस लिये ना}'\text{प} - \text{नाप} = २\,\text{इअ} - \frac{२\,\text{इप}}{\text{इ} + १} = २\,\text{इअ} - २\,\text{अ}\,(\text{इ} - १) = २\,\text{अ}$$

यह सिद्ध हुआ।

इस प्रकार सब उदाहरणों को करना चाहिये।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

(१) जिस सरलरेखा का भुज = ४ और कोटि = ३ है उस के ध्रुवीयभुजयुग्म का मान बतावो?।

उत्तर ध्रु = ५ और ध = ज्या$^{-१}\frac{३}{५}$।

(२) तीन सरलरेखाओं का समीकरण दिया हुआ है उन समीकरणों पर से उस त्रिभुज का फल बतावो जो कि तीनों रेखाओं के योग से उत्पन्न होता है?।

(३) परवलयक्षेत्र में रेखागणित से यह सिद्ध करो कि पस रेखा पबिन्दु पर स्पर्शरेखा हो गी?।

(१०८ प्रक्रम का क्षेत्र देखो)

(४) १०८ प्रक्रम के क्षेत्र में यह सिद्ध करो कि नार और पस का जहां योग हो गा उसी बिन्दु पर कररेखा के समानान्तर अबिन्दु से जो रेखा खींची जाय गी वह भी मिलै गी?।

(५) १०९ प्रक्रम के क्षेत्र में यह सिद्ध करो कि नना = द्द · अ और नाक = अ हो गा? (यहां नक = क)।

(६) १०९ प्रक्रम के क्षेत्र में नाप को बढ़ा देने से ना'पना त्रिभुज में जो बहिरुत्पन्नकोण हो गा उस का समान दो भाग करने वाली रेखा पबिन्दु पर स्पर्शरेखा हो गी? इसे केवल क्षेत्रलक्षण और रेखागणित की युक्ति से सिद्ध करो।

(७) १११ प्रक्रम के क्षेत्र में यह सिद्ध करो कि नापलकोण का आधा करने वाली रेखा पबिन्दु पर स्पर्शरेखा हो गी?।

(८) यह सिद्ध करो कि नप रेखा बढ़ा देने से दूसरी ओर जहां प'बिन्दु में लगी वहां से न तक जो खण्ड हो गा वही न से प तक हो गा अर्थात् नप = नप'।

(९) रावण की लड़ाई में रामचन्द्र एक स्थान से रावण की सेना के प्रत्येक निशाचरों को बाण से मारते थे और प्रत्येक समानगति के बाण मार कर ठीक रामचन्द्र जी के तरकश में चले आते थे तो बतावो रामचन्द्र की प्रेरणा से रावण की सेना किस वक्ररेखा में खड़ी थी।

उत्तर, दीर्घवृत्त में जिस की दोनों नाभी क्रम से रामचन्द्र का धनुष में बाण का स्थान और तरकश है।

(१०) एक राजा की सेना बिना हथियार एक सीधी पङ्क्ति में खड़ी थी और उसी समय सेनापति को शत्रु की सेना घेर कर उस की सेना में जाने से रोका सेनापति की आज्ञा से उस की सेना अचल खड़ी

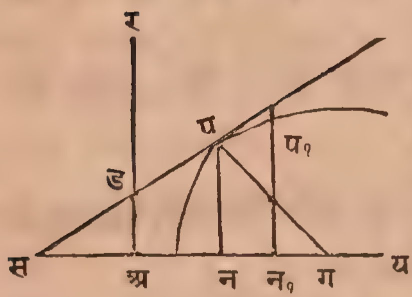
थी और शत्रु की सेना का जो कोई योद्धा उस सेना में अपने सन्मुख योद्धा को जिस गोली से मारता था उसी क्षण वह सेनापति भी उसी चाल के गोली से शत्रु के सेना में उस योद्धा को मारता था । अन्त्य में दोनों सेनाओं के सब योद्धा मारे गये केवल वह सेनापति बचा तो बतावो शत्रु की सेना किस वक्ररेखा में खड़ी हो उस सेनापति को घेरा था ? ।

उत्तर परवलय में जिस के नाभि में वह सेनापति और नियत-रेखा पर उस की सेना खड़ी थी ।

इति एकादशाध्याय ।

द्वादशाध्याय १२ ।

वक्रक्षेत्रों के स्पर्शरेखा के विषय में ।



११६ । पप$_1$ विन्दु पर हो के जो रेखा जाय गी उस की दिशा प$_1$विन्दु के वश से बदलती रहै गी अर्थात् यदि पविन्दु स्थिर रहै और वक्रक्षेत्र में प$_1$को भिन्न भिन्न मानो तो उस रेखा की दिशा भी बदलती रहै गी ।

परिभाषा ।

पप$_1$रेखा का समीकरण निकाल कर फिर पप$_1$ विन्दुओं का अन्तर शून्य मानने से जिस नये रेखा का समीकरण हो उस रेखा को पविन्दु की स्पर्शरेखा कहते हैं ।

कल्पना करो कि अ मूलविन्दु, अन $=$ य, पन $=$ र $=$ फ (य) और अन$_1$ $=$ य $+$ च इस लिये प$_1$न$_1$ $=$ र $+ \triangle$ र $=$ र$'$ $=$ फ (य $+$ च) अब १०० प्रक्रम की (४) क्रिया से प, प$_1$विन्दु पर गये हुए सरलरेखा का

$$\text{समीकरण } र_1 - र = \frac{र' - र}{य' - य}(य_1 - य) \text{ वा, } र_1 - र$$

$$= \frac{फ(य+च) - फ(य)}{च}(य_1 - य)$$ इस में यदि च $= 0$ तो प$_1$विन्दु प पर आवे गा इस लिये परिभाषा से तब स्पर्शरेखा का समीकरण

$$र_1 - र = \frac{तार}{ताय}(य_1 - य)$$ यह हो गा ।

(१) स्पर्शरेखा के समीकरण को

$र_1 = \frac{तार}{ताय} \cdot य_1 + र - \frac{तार}{ताय}य$ ऐसे लिखकर १०० प्रक्रम के सरल रेखा के समीकरण के साथ यदि तुलना करो

तो $म = \frac{तार}{ताय}$ और $क = र - \frac{तार}{ताय} \cdot य$ इस लिये $\angle$ पसग्र

$$= स्प^{-1}\left(\frac{तार}{ताय}\right) \text{ और } अड = र - \frac{तार}{ताय} \cdot य$$

देखो स्पर्शरेखा और अय अक्ष से जो कोण $स्प^{-1}\left(\frac{तार}{ताय}\right)$ के तुल्य उत्पन्न होता है इसी का ज्ञान करने से "चलनकलन" को "स्पर्शरेखा की क्रिया" इस नाम से भी पुकारते हैं ।

(२) जब $र_1 = \frac{तार}{ताय}य_1 + र - \frac{तार}{ताय} \cdot य$ इस लिये $र_1$ को शून्य मानने से, $अस = य_1 = \frac{ताय}{तार}\left(\frac{तार}{ताय}य - र\right) = -\left(य - \frac{ताय}{तार} \cdot र\right)$ ।

११७ । यदि स्पर्शरेखा पर एक लम्बरेखा ऐसी हो जो पबिन्दु में हो कर जाय तो १०२ प्रक्रम से उस रेखा का समीकरण
$र_1 = र - \frac{1}{\frac{तार}{ताय}}(य_1 - य)$ वा $र_1 = र - \frac{ताय}{तार}(य_1 - य)$ यह हो गा

कल्पना करो कि ११६ वें प्रक्रम के क्षेत्र में पस स्पर्शरेखा और इस पर पग रेखा लम्ब है तो

पग को मुख्यलम्ब कहते हैं ।

सन को अवान्तरस्पर्शरेखा कहते हैं ।

नग को अवान्तरमुख्यलम्ब कहते हैं ।

और, $स्प \angle पसन = \frac{तार}{ताय}$ तब पसन त्रिभुज में सरलत्रिकोण-

मिति से $\frac{पन}{सन} = \frac{तार}{ताय}$ इस लिये सन $= र \frac{ताय}{तार}$ और पनग त्रिभुज में

$$स्प < नपग = स्प < पसन = \frac{तार}{ताय} \text{ इस लिये } नग = र \cdot \frac{तार}{ताय} ।$$

११८। यदि मूलविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्ब का मान जानना हो तो १०३ प्रक्रम के (१) क्रिया से,

$$लम्ब \text{ का } मान = \frac{-क}{\pm\sqrt{1+म^2}} = \frac{य \cdot \frac{तार}{ताय} - र}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2}} ।$$

११९। इस प्रक्रम में शीघ्र स्मरण होने के लिये सब सिद्धान्तों को इकट्ठा कर, उन के श्लोक दोहे बना कर कुछ उदाहरण भी दिखलाते हैं।

(१) स्पर्शरेखा और अय रेखा से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा $= \frac{तार}{ताय}$ ।

(२) स्पर्शरेखा का समीकरण $र_1 - र = \frac{तार}{ताय}(य_1 - य)$ ।

(३) स्पर्शरेखा का और अर अक्ष का मूलविन्दु से सम्पात

$$= र - य \cdot \frac{तार}{ताय} ।$$

(४) स्पर्शरेखा और अय अक्ष का मूलविन्दु से सम्पात

$$= य - र \cdot \frac{ताय}{तार} ।$$

(५) मुख्यलम्ब का समीकरण $र_1 - र = -\frac{ताय}{तार}(य_1 - य)$ ।

(६) अवान्तरस्पर्शरेखा का मान $= र \cdot \frac{ताय}{तार}$ ।

(७) अवान्तरमुख्यलम्ब का मान $= र \cdot \frac{तार}{ताय}$ ।

(८) मूलविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़ा हुआ लम्ब का मान

$$= \frac{य \cdot \frac{तार}{ताय} - र}{\pm\sqrt{१ + (\frac{तार}{ताय})^२}} \text{ ।}$$

श्लोक ।

भुजगत्या हृता कोटिभुक्तिः स्पर्शाख्यरेखिका ।
भवेदाद्यात्तवक्रोत्थस्पर्शरेखाख्जा ध्रुवः ॥ १ ॥

दोहा ।

भुजगति हृत जो कोटिगति स्पर्शरेखिका अत्त ।
योगकोण को होत ध्रुव स्पर्शरेखिका स्वत्त ॥ १ ॥

श्लोक ।

भुजेन ध्रुवगुण्येन कोटिर्हीनान्तरं भवेत् ।
मूलविन्दुस्पर्शरेखान्यात्तयोगजचिन्हयोः ॥ २ ॥

दोहा ।

ध्रुवहतभुज को हीन करि कोटी में सो मान ।
स्पर्शरेख अन्यात्त को योग मूल से जान ॥ २ ॥

श्लोक ।

ध्रुवमानेन हृतया कोट्या हीनो भुजोऽन्तरम् ।
मूलविन्दुस्पर्शरेखाद्यात्तयोगजचिन्हयोः ॥ ३ ॥

दोहा ।

ध्रुवहृत कोटि घटाय करि भुज में शेष सुजान ।
स्पर्शरेख आद्यात्त को योग मूल से जान ॥ ३ ॥

श्लोक ।

कोटिर्द्विः स्थापिता भक्ता गुणिता च ध्रुवेण ते ।
अवान्तरस्पर्शरेखामुख्यलम्बमिती सदा ॥ ४ ॥

दोहा ।

ध्रुव से भागहु अरु गुणहु कोटि पृथक् धरि ध्यान ।
सो अवान्तरस्पर्श अरु मुख्यलम्ब को मान ॥ ४ ॥

श्लोक ।

ध्रुववर्गयुतेन्दुमूलभक्तं ध्रुवदोर्घातफलोनकोटिमानम् ।
भवतीह मितिः स्वमूलवक्रोत्थिततत्स्पर्शसुरेखिकान्तरं तत् ॥ ५ ॥

चौपाई ।

ध्रुव को वर्ग एक में जोड़हु । मूल लेइ भाजक तुम जोहहु ।
ध्रुवभुजघातकोटि को अन्तर । भाज्य मान फल लेहु निरन्तर ॥

दोहा ।

स्पर्शरेखिका पै करो मूलविन्दु से लम्ब ।
ताको मान बताइये यहि विधि धरि अवलम्ब ॥ ५ ॥

उदाहरण (१) परवलयक्षेत्र में किसी विन्दु पर स्पर्शरेखादि की स्थिति बतावो ? ।

यहां परवलय का समीकरण $र^2 = ४ अय$ जो यह है इस पर से

$$\frac{२र \cdot तार}{ताय} = ४अ \quad \therefore \quad \frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र} = \frac{२अ}{२\sqrt{अ}\sqrt{य}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{य}} ।$$

स्पर्शरेखा का समीकरण $र_१ - र = \frac{तार}{ताय}(य_१ - य)$

वा, $र_१ - २\sqrt{अय} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{य}}(य_१ - य)$ ।

स्पर्शरेखा का और अर अक्ष का मूलविन्दु से सम्पात

$$= र - य \cdot \frac{तार}{ताय} = २\sqrt{अय} - य\sqrt{\frac{अ}{य}} = २\sqrt{अ}\sqrt{य} - \sqrt{अ}\sqrt{य}$$

$$= \sqrt{अ}\sqrt{य} = \frac{र}{२} ।$$

स्पर्शरेखा और अय अक्ष का मूलविन्दु से सम्पात

$$= य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = य - २\sqrt{अय}\sqrt{\frac{य}{अ}} = य - २य = -य ।$$

मुख्यलम्ब का समीकरण $= र_१ - र = -\frac{ताय}{तार}(य_१ - य)$

वा, $र_१ - २\sqrt{अय} = -\sqrt{\frac{य}{अ}}(य_१ - य)$ ।

अत्रान्तरस्पर्शरेखा का मान $= र \cdot \frac{ताय}{तार} = २\sqrt{अय}\sqrt{\frac{य}{अ}} = २य$ ।

अवान्तरमुख्यलम्ब का मान $= र \cdot \frac{तार}{ताय} = २\sqrt{अय}\sqrt{\frac{अ}{य}} = २ अ$ ।

और मूलविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़ा हुआ लम्ब का मान

$$= \frac{य \cdot \frac{तार}{ताय} - र}{\pm\sqrt{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^२}} = \frac{य\sqrt{\frac{अ}{य}} - र}{\pm\sqrt{\frac{अ + य}{य}}}$$

$$= \frac{\sqrt{अय} - २\sqrt{अय}}{\pm\sqrt{\frac{अ+य}{य}}} = य\sqrt{\frac{अ}{अ+य}} ।$$

उदाहरण (२) जिस वक्रक्षेत्र का समीकरण $र = अ \cdot इू^{\frac{य}{क}}$ यह है उस के अवान्तरस्पर्शरेखा का मान जानना है? ।

यहां ११९ प्रक्रम के (६) सिद्धान्त से

अवान्तरस्पर्शरेखा का मान $= र \cdot \frac{ताय}{तार}$

परन्तु वक्र के समीकरण से $\frac{तार}{ताय} = \frac{अ}{क} \cdot इू^{\frac{य}{क}} = \frac{र}{क}$

इस लिये $र \cdot \frac{ताय}{तार} = र \cdot \frac{क}{र} = क$,

अर्थात् अवान्तरस्पर्शरेखा सर्वदा स्थिर है

इस वक्र को लाघुरिक्थिकवक्र कहते हैं।

उदाहरण (३) एक ऐसा वक्र है जिस के भुज और कोटि का फल शून्य है अर्थात् फ(य, र) = 0 तो वक्र के स्पर्शरेखा का समीकरण बतावो? ।

यहां ६५ वें प्रक्रम के अन्त्य में जो समीकरण

$\frac{तास}{ताय} = \left(\frac{तास}{तार}\right) \cdot \frac{तार}{ताय} + \left(\frac{तास}{ताल}\right)\frac{ताल}{ताय}$ यह सिद्ध हुआ है उस में $\frac{तास}{ताय}$ इस के स्थान में शून्य का उत्थापन (क्यों कि जब प्रश्न में सर्वदा

स = 0 तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$ भी शून्य हो गा) और ल के स्थान में य का उत्थापन देने से $0 = \left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right) \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)} = -\frac{\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right)}{\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right)}$ यहां फ = फ (य, र)

अब इस $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का उत्थापन स्पर्शरेखा के

इस $\text{र}_1 - \text{र} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} (\text{य}_1 - \text{य})$ समीकरण में देने से

$$\text{र}_1 - \text{र} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} (\text{य}_1 - \text{य}) = -\frac{\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right)}{\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right)} (\text{य}_1 - \text{य})$$

इस लिये $(\text{र}_1 - \text{र})\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right) + (\text{य}_1 - \text{य})\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right) = 0$ यह स्पर्शरेखा का समीकरण हुआ इसी प्रकार यदि मुख्यलम्ब का समीकरण ले आवो तो $(\text{र}_1 - \text{र})\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right) - (\text{य}_1 - \text{य})\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right) = 0$ यह और मूलविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्ब का मान

$$\frac{\text{य}\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right) + \text{र}\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right)}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right)\right\}^2}}$$ यह आवे गा ।

उदाहरण (४) वक्र के भुजकोटि पर से

$\text{अ} \cdot \text{र}^2 + २\text{कयर} + \text{ग} \cdot \text{य}^2 + २\text{घ} \cdot \text{र} + २\text{त} \cdot \text{य} + \text{न} = 0$ यह एक समीकरण दिया हुआ है इस पर से स्पर्शरेखा का समीकरण बतावो ।

यहां ठीक (३) उदाहरण से

$$\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right) = २\text{कर} + २\text{ग} \cdot \text{य} + २\text{त}, \quad \left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right) = २\text{अर} + २\text{कय} + २\text{घ}$$

इस लिये, $(\text{र}_1 - \text{र})\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}\right) + (\text{य}_1 - \text{य})\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}\right) = 0$

$= (\text{र}_1 - \text{र})(\text{अर} + \text{कय} + \text{घ}) + (\text{य}_1 - \text{य})(\text{कर} + \text{गय} + \text{त})$

$= \text{र}_1 (\text{अर} + \text{कय} + \text{घ}) + \text{य}_1 (\text{कर} + \text{गय} + \text{त}) - \text{अर}^2 - \text{कयर} - \text{घर}$
$- \text{गय}^2 - \text{कयर} - \text{तय}$

$= \text{र}_1 (\text{अर} + \text{कय} + \text{घ}) + \text{य}_1 (\text{कर} + \text{गय} + \text{त})$
$- (\text{अर}^2 + २\,\text{कयर} + \text{गय}^2 + \text{घर} + \text{तय})$

$\therefore\ \text{र}_1 (\text{अर} + \text{कय} + \text{घ}) + \text{य}_1 (\text{कर} + \text{गय} + \text{त}) + \text{घर} + \text{तय} + \text{न} = 0$

यही स्पर्शरेखा का समीकरण हुआ ।

क्यों कि जब प्रश्न से

$\text{अर}^2 + २\,\text{कयर} + \text{ग} \cdot \text{य}^2 + २\,\text{घर} + २\,\text{तय} + \text{न} = 0$ यह समीकरण ठीक है तब दोनों पक्षों में घर + तय + न घटा देने से

$\text{अर}^2 + २\,\text{कयर} + \text{गय}^2 + \text{घर} + \text{तय} = -(\text{घर} + \text{तय} + \text{न})$ हो गा ।

उदाहरण (५) एक वक्र ऐसा है जिस के भुजकोटि का फल शून्य होता है अर्थात् $\text{फ}(\text{य}, \text{र}) = 0 = \text{स}$

और $\text{स} = \text{स}_\text{न} + \text{स}_{\text{न}-१} + \text{स}_{\text{न}-२} + \cdots + \text{स}_१ + \text{स}_0$

जहां $\text{स}_\text{न}, \text{स}_{\text{न}-१}$ इत्यादि में साजात्य धर्म है अर्थात्

$$\text{र} \cdot \frac{\text{तास}_\text{न}}{\text{तार}} + \text{य}\frac{\text{तास}_\text{न}}{\text{ताय}} = \text{न} \cdot \text{स}_\text{न}$$

$$\text{र} \cdot \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \text{य}\frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} = (\text{न} - १)\,\text{स}_{\text{न}-१}$$

....

$$\text{र} \cdot \frac{\text{तास}_१}{\text{तार}} + \text{य} \cdot \frac{\text{तास}_१}{\text{ताय}} = \text{स}_१$$

तो बताओ कि स्पर्शरेखा का समीकरण कैसा हो गा? ।

यहां जब $\text{स} = \text{स}_\text{न} + \text{स}_{\text{न}-१} + \cdots$

इस लिये $\dfrac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \dfrac{\text{तास}_\text{न}}{\text{ताय}} + \dfrac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तास}_\text{न}}{\text{तार}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \cdots$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots\cdots}{\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{तार}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \cdots\cdots}$$ इसी प्रक्रम के

(३) उदाहरण से,

इस पर से स्पर्शरेखा का समीकरण

$$(\text{र}_१ - \text{र})\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{तार}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \cdots\right)$$

$$+ (\text{य}_१ - \text{य})\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots\right) = 0$$

वा, $\text{र}_१\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{तार}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \cdots\right) + \text{य}_१\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots\right)$

$$= \text{र}\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{तार}} + \text{य}\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{ताय}} + \text{र}\cdot\frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \text{य}\cdot\frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots$$

$$= \text{न}\cdot\text{स}_{\text{न}} + (\text{न} - १)\,\text{स}_{\text{न}-१} + \cdots$$

परन्तु $\text{न}(\text{स}_{\text{न}} + \text{स}_{\text{न}-१} + \cdots + \text{स}_१ + \text{स}_0) = 0$

इस लिये इसे दोनों पक्षों में घटा देने से,

$$\text{र}_१\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{तार}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \cdots\right) + \text{य}_१\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots\right)$$

$$= -\left\{\text{स}_{\text{न}-१} + २\,\text{स}_{\text{न}-२} + \cdots + (\text{न} - १)\,\text{स}_१ + \text{न}\text{स}_0\right\}$$

$$\therefore \text{र}_१\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{तार}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{तार}} + \cdots\right) + \text{य}_१\left(\frac{\text{तास}_{\text{न}}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तास}_{\text{न}-१}}{\text{ताय}} + \cdots\right)$$

$$+ \text{स}_{\text{न}-१} + २\,\text{स}_{\text{न}-२} + \cdots + (\text{न} - १)\,\text{स}_१ + \text{न}\,\text{स}_0 = 0$$

यह समीकरण उत्पन्न हुआ ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) एक वक्र ऐसा है कि उस के किसी विन्दु प पर यदि स्पर्श-रेखा करो तो उस स्पर्शरेखा और अय अक्ष से जो कोण उत्पन्न होता है उस से दूना पत्र, और अय अक्ष से उत्पन्न कोण होता है तो बतावो

जब $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{2}$, तब य और र में क्या सम्बन्ध हो गा ? । उत्तर $\frac{3}{4}$ ।

(२) जिस वक्र का र = ज्याय यह समीकरण है उस में अवान्तर-मुख्यलम्ब का मान बतावो ? । उत्तर $\frac{\text{ज्या}\,2\,\text{य}}{2}$ ।

(३) जिस वक्र का $\text{र}^2 = (\text{य} - 3)^2 (\text{य} - 3\,\text{ग})$ यह समीकरण है उस में यह सिद्ध करो कि यदि य = २ग + १ तो उस विन्दु पर वक्र की जो स्पर्शरेखा हो गी वह अय अक्ष के समानान्तर हो गी ? ।

(४) जिस वक्र का $\text{य}^2(\text{य}^2 - \text{र}^2) = \text{अ}^2 (\text{य} - \text{र})^2$ ऐसा समीकरण है उस में सिद्ध करो कि मूलविन्दु के स्पर्शरेखा का समीकरण र = य ऐसा हो गा ? ।

(५) जिस वक्र का $\text{र}^2 = 4\,\text{अ}\left(\text{य} + \frac{1}{\text{अ}}\text{ज्या}\,\text{अ}\text{य}\right)$ यह समीकरण है उस में यह सिद्ध करो कि जिन जिन विन्दुओं की स्पर्शरेखा अय अक्ष के समानान्तर हो गी वे विन्दु किसी एक परवलय के परिधि में हों गे ? ।

(६) जिस वक्र के विन्दु की अवान्तरस्पर्शरेखा ७२ और अवान्तरमुख्यलम्ब ८ है उस विन्दु की कोटि क्या हो गी ? । उत्तर २४ ।

(७) $\text{य}^2\text{र}^2 = \text{अ}^3 (\text{य} + \text{र})$ यह एक वक्र का समीकरण है इस पर से सिद्ध करो कि स्पर्शरेखा और अय अक्ष से उत्पन्नकोण की स्पर्शरेखा $= -\frac{\text{यर} + 2\,\text{र}^2}{\text{यर} + 2\,\text{य}^2}$ यह हो गी ? ।

(८) दीर्घवृत्त का $\text{र}^2 = \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}(\text{अ}^2 - \text{य}^2)$ यह समीकरण है इस में उस विन्दु का भुज बतावो जिस विन्दु पर की स्पर्शरेखा अय अक्ष के साथ 45° का कोण बनाती है ? ।

उत्तर $\frac{\text{अ}^2}{\sqrt{\text{अ}^2 + \text{क}^2}}$ ।

(९) दीर्घवृत्त के केन्द्र को मूल मान वहां से दीर्घवृत्त के किसी विन्दु की स्पर्शरेखा पर जो लम्ब हो गा उस का क्या मान हो गा ? ।

उत्तर, दोनों नाभियों से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्बों के योग का आधा ।

(१०) जिस वक्र का $य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण है उस के किसी विन्दु के अवान्तरस्पर्शरेखा का मान बतावो ? ।

उत्तर $य - \sqrt[३]{अ^२ य}$ ।

(११) जिस वक्र का $र = \frac{य}{य+१}$ यह समीकरण है उस की स्पर्शरेखा मूलविन्दु पर गई हुई अय अक्ष के साथ कितना बड़ा कोण बनावे गी ? । उत्तर $४५^०$ कोण ।

(१२) एक ही मूलविन्दु से परवलय का $र^२ = २ अय$ यह और वृत्त का $य^२ + र^२ = अ^२$ यह समीकरण है तो बतावो कि दोनों के योग विन्दु पर यदि दोनों वक्रों में पृथक् पृथक् स्पर्शरेखा खींची जाय तो उन स्पर्शरेखाओं के योग से कितना बड़ा कोण उत्पन्न हो गा ? ।

उत्तर, कोण = $स्प^{-१} २ \sqrt{१ + \sqrt{२}}$ ।

(१३) जिस वक्र का $य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण है उस के उस विन्दु के कोटि का मान बतावो जिस पर की स्पर्शरेखा अय अक्ष पर लम्ब हो ? । उत्तर, कोटि $= \pm अ$ ।

(१४) जिस परवलय का अ मूलविन्दु से $र^२ = ४ अय$ यह समीकरण है उस के किसी पविन्दु से जो स्पर्शरेखा और मुख्यलम्ब किया तो स्पर्शरेखा कर अक्ष के व विन्दु में लगा और वर्द्धितमुख्यलम्ब च विन्दु में लगा तो बतावो कि वपच त्रिभुज का फल कितना हो गा यदि य = अ और जिस स्थल में त्रिभुज का फल न्यूनतम हो गा वहां य का मान क्या हो गा ? । (१०८ प्रक्रम का क्षेत्र देखो) ॥

उत्तर, (१) $४ अ^२$ उत्तर (२) $य = \frac{अ}{५}$ ।

(१५) जिस का $य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण है उस के किसी विन्दु का मुख्यलम्ब य अक्ष से प कोण बनाता है तो सिद्ध करो कि उस मुख्यलम्ब का समीकरण $र - य \cdot स्पप = २ अ \cdot ज्याप$, ऐसा हो गा ? ।

(१६) जिस का $य^३ - ३ अयर - र^३ = ०$ यह समीकरण है उस

के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा है उस का और र अक्ष का मूलविन्दु से योग $र_1$ और य अक्ष का योग मूलविन्दु से $य_1$ के तुल्य है तो सिद्ध करो कि $अ(यर_1 - य_1 र) = य_1 य^2 - र_1 र^2$ ऐसा हो गा ? ।

(१७) जिस वक्र का $य^3 + र^3 = अ$ यह समीकरण है उस के दोनों अक्षों के बीच में जो स्पर्शरेखा का खण्ड है उस का मान बतावो ? ।

उत्तर, $\frac{अ}{य^2 र^2}\sqrt{य^4 + र^4}$ ।

(१८) दिखलावो कि $य^न + र^न = २$ इस समीकरण से जो न संख्या के तुल्य वक्र बनैं गे वे सब परस्पर उस विन्दु पर स्पर्श करैं गे जिस का भुजयुग्म १, १ है ।

(१९) $र^न = अ^{न-1}य$ यह एक वक्र का समीकरण है उस के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा है उस के और दोनों अक्षों के परस्पर सम्पात से जो त्रिभुज हो गा उस का क्षेत्र फल, बतावो न के किस मान में, $२ अ^2$ के तुल्य हो गा ? । उत्तर $न = -१$ ।

(२०) जिस वक्र का $र \cdot य = अ^2$ यह समीकरण है उस के उस विन्दु के, जिस का भुज, $य = १$ मुख्यलम्ब और दोनों अक्षों के योग से जो त्रिभुज हो गा उस का फल क्या हो गा ? ।

उत्तर, $फल = \frac{1}{2}\left(\frac{अ-1}{अ}\right)^2\left(\frac{अ+1}{अ}\right)^2$ ।

(२१) एक कीट एक दीर्घवृत्त में चलता था जिस का दोनों व्यासार्द्ध क्रम से अ, क, हैं इस में दो दो स्पर्शरेखा जो परस्पर लम्बरूप हैं उन के योगविन्दु जिस वक्र में पड़े हैं उस में उस का मादा चलता था । नर लघुव्यासाग्र पर आकर मादा से मिलने के लिये ठीक उस विन्दु पर जो स्पर्शरेखा थी उस में चला और उसी सीधी रेखा में चलते चलते मादा से मिला तो बतावो नर को उस स्पर्शरेखा में कितना चलना पड़ा ? । उत्तर, अ ।

इति द्वादशाध्याय ।

त्रयोदशाध्याय १३ ।

असीमपथ के विषय में ।

इस अध्याय में अक्ष चाहे परस्पर लम्बरूप हों वा न हों फल सब एक सा हो गा ।

१२० । जिस वक्र का र = फ (य) ऐसा समीकरण है उस में मूल-विन्दु से वक्र के किसी विन्दु की दूरी $=\sqrt{य^2+र^2}=\sqrt{य^2+\{फ(य)\}^2}$ इस में स्पष्ट है कि यदि य = ∞, वा, र = ∞, वा, दोनों = ∞ तो दूरी = ∞ ।

परिभाषा ।

मूलविन्दु से अनन्त दूर पर वक्र में जो विन्दु हो वक्र की उस विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होती है उसे "असीमपथ" कहते हैं ।

असीमपथ दोनों अक्षों को मूलविन्दु से जितने जितने अन्तर पर काटा है उन का ज्ञान यदि हो तो असीमपथ का भी ज्ञान तुरन्त हो सकता है ।

अर्थात् ११९ वें प्रक्रम में स्पर्शरेखा और य अक्ष का मूलविन्दु से सम्पात $= य - र \cdot \frac{ताय}{तार}$ और स्पर्शरेखा और र अक्ष का मूलविन्दु से सम्पात $र - य \cdot \frac{तार}{ताय}$ जो ये हैं इन में किसी एक का वा दोनों का य के अनन्त वा र के अनन्त अथवा दोनों के अनन्त मान में मान यदि नियतसंख्यात्मक हो तो असीमपथ का ज्ञान हो सकता है ।

विशेष ।

(१) यदि $य - र \cdot \frac{ताय}{तार}$ = नियतसंख्या और $र - य \cdot \frac{तार}{ताय} = \infty$ तो असीमपथ र अक्ष के समानान्तर हो गा ।

(२) यदि $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = \infty$ और $र - य \cdot \frac{तार}{ताय}$ = नियतसंख्या तो असीमपथ य अक्ष के समानान्तर हो गा ।

(३) यदि $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = 0$ और $र - य \cdot \frac{तार}{ताय} = \infty$ तो असी-

मपथ और र अक्ष एक ही हो जायं गे और यदि $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = \infty$ और $र - य \cdot \frac{तार}{ताय} = 0$ तो असीमपथ और य अक्ष एक ही हों गे।

१२१। (१) विशेष में जब $र - य \cdot \frac{तार}{ताय} = \infty$ तब स्पष्ट है कि $\frac{तार}{ताय} = \infty$ इस लिये यह भी (१) का रूपान्तर कर सकते हैं कि यदि $\frac{तार}{ताय} = \infty$ और $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} =$ नियत, तो असीमपथ र अक्ष के समानान्तर हो गा।

(२) विशेष में जब $य - र \frac{ताय}{तार} = \infty$ तब स्पष्ट है कि $\frac{तार}{ताय} = 0$ इस लिये (२) का यह भी रूपान्तर कर सकते हो कि यदि $\frac{तार}{ताय} = 0$ और $र - य \cdot \frac{तार}{ताय} =$ नियत, तो असीमपथ य अक्ष के समानान्तर हो गा।

यदि $\frac{तार}{ताय} = इ_१ =$ नियत, और $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = ग =$ नियत, तो सरलरेखा के समीकरण की युक्ति से असीमपथ का $र = इ_१ (य - ग)$ यह समीकरण हो गा।

जैसे (१) परवलय का $र^२ = ४ अय$ यह समीकरण है इस लिये

$$र = \pm २ \sqrt{अय} \text{ और } \frac{तार}{ताय} = \pm \sqrt{\frac{अ}{य}} = 0 \quad (\text{यदि } य = \infty)$$

और (२) विशेष के रूपान्तर से,

$$र - य \cdot \frac{तार}{ताय} = \pm (२\sqrt{अय} - \sqrt{अय}) = \pm \sqrt{अय} = \infty$$

यदि $य = \infty$ इस लिये यहां पर असीमपथ न हो गा।

क्यों कि (२) विशेष से स्पष्ट है कि $र - य \cdot \frac{तार}{ताय}$ इस का मान नियतसंख्यात्मक होना चाहता था ।

(२) अति परवलय का $र^२ = \frac{क^२}{अ^२}(य^२ - अ^२)$ समीकरण है इस लिये $र = \pm \frac{क}{अ}\sqrt{य^२ - अ^२}$, $\frac{तार}{ताय} = \pm \frac{कय}{अ\sqrt{य^२ - अ^२}}$

और $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = य - \frac{य^२ - अ^२}{य} = \frac{अ^२}{य}$ ।

अब यदि $य = \infty$, तो $\frac{तार}{ताय} = \pm \frac{क}{अ}$, और, $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = ग = 0$

इस लिये असीमपथ का एकसमीकरण $र = \frac{क}{अ} य$, यह

और दूसरा $र = -\frac{क}{अ} य$, यह हो गा ।

(३) $र = \frac{अ}{(य - क)}$ यह किसी वक्र का समीकरण है

तो $\frac{तार}{ताय} = -\frac{अ}{(य - क)^२} = \infty$ (यदि $य = क$, वा, $र = \infty$)

और $य - र \cdot \frac{ताय}{तार} = य + (य - क) = क$ (यदि $य = क$)

इस लिये १२० प्रक्रम के (१) विशेष से असीमपथ र अक्ष के समानान्तर हो गा जिस का समीकरण $य = क$, यह है ।

१२२ । कल्पना करो कि $र = इ_१ य + ब_१$ यह एक सरलरेखा का समीकरण और $र = इ_१ य + ब_१ + व$ यह एक वक्र का समीकरण है जिस में यदि य और र दोनों अनन्त हों तो $व = 0$ ।

यहां यदि वक्र के किसी विन्दु से सरलरेखा पर लम्ब डालो तो १०३ प्रक्रम से लम्ब का मान

$$= \frac{र - इ_1 य - ब_1}{\sqrt{1 + इ_1^2}} = \frac{व}{\sqrt{1 + इ_1^2}} = 0 \; (यदि \; य = \infty, र = \infty)$$

परन्तु जब वक्र का $र = इ_1 य + ब_1 + व$ यह समीकरण है तब $\frac{र}{य} = इ_1 + \frac{ब_1 + व}{य} = इ_1$ (यदि $य = \infty, र = \infty$) परन्तु जब य, और र दोनों अनन्त के तुल्य हों गे तब ३६ प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से, $\frac{र}{य} = \frac{तार}{ताय}$

$$इस \; लिये \; \frac{र}{य} = इ_1 = \frac{तार}{ताय}$$

और उसी समय में $ब_1 = र - इ_1 य$ ($\because$ $व = 0$ जब $य = \infty, र = \infty$)

$= र - य \cdot \frac{तार}{ताय}$ परन्तु वक्र के स्पर्शरेखा का समीकरण

$$र_1 = र + \frac{तार}{ताय}(य_1 - य) = र - य \cdot \frac{तार}{ताय} + \frac{तार}{ताय} य_1$$

वा, $र_1 = इ_1 य_1 + ब_1$ (यदि $य = \infty, र = \infty$) ।

इस लिये इस स्पर्शरेखा का वही समीकरण हुआ जो पहले सरलरेखा का कल्पना किया । परन्तु इसी स्पर्शरेखा का नाम असीमपथ है इस लिये असीमपथ का दूसरा लक्षण ऐसे हो सकता है कि यदि एक ऐसी सरलरेखा हो कि मूलविन्दु से ज्यों ज्यों वक्र में दूर विन्दु कल्पना कर उस विन्दु से उस रेखा पर लम्ब डालें त्यों त्यों लम्ब का मान अल्प होता जाय तो उस रेखा को असीमपथ कहते हैं ।

१२३ । अभी तक तो सरल असीमपथ का वर्णन किया गया है अब वक्र असीमपथ का विचार करते हैं ।

परिभाषा ।

दो वक्र जिन के, एक ही मूलविन्दु से, समीकरण बने हैं उन के एक ही भुज में उत्तरोत्तर यदि कोट्यन्तर अल्प होता जाय वा एक ही कोटि में उत्तरोत्तर भुजान्तर अल्प होता जाय तो एक वक्र को दूसरे का असीमपथ कहते हैं ।

इस लिये यदि किसी वक्र के समीकरण का

$र = अ_0 य^न + अ_1 य^{न-1} + अ_2 य^{न-2} + \cdots$

$+ अ_{न-1} य + अ_न + \frac{ब_1}{य} + \frac{ब_2}{य^2} + \frac{ब_3}{य^3} + \cdots$ ऐसा रूपान्तर हो तो

$र = अ_0 य^न + अ_1 य^{न-1} + \cdots + अ_{न-1} य + अ_न$ इसे उस वक्र का समीकरण कहें गे जो पहले का असीमपथ है क्यों कि यदि दोनों समीकरणों में य को एक ही मान कोटियों का अन्तर करो तो $\text{अं} = \frac{ब_1}{य} + \frac{ब_2}{य^2} + \cdots$ यह हो गा।

अब यहां स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जाय गा त्यों त्यों कोट्यन्तर अल्प होता जाय गा इस लिये परिभाषा से पहले वक्र का असीमपथ दूसरा वक्र हो गा।

जैसे, उदाहरण (१) $र^3 = य^3 + अय^2$ इस समीकरण के वक्र का असीमपथ जानना है।

$$\text{यहां } र^3 = य^3 + अ \cdot य^2 = य^3\left(1 + \frac{अ}{य}\right)$$

$$\text{इस लिये } र = य\left(1 + \frac{अ}{य}\right)^{\frac{1}{3}} = य\left(1 + \frac{1}{3}\frac{अ}{य}\right) + \frac{ब_1}{य} + \frac{ब_2}{य^2} + \cdots$$

(द्वियुक्पद सिद्धान्त से) इस लिये इसी प्रक्रम की युक्ति से

असीमपथ का समीकरण $र = य + \frac{अ}{3}$ यह हुआ।

उदाहरण (२) $र(अय + क^2) = य^3$ इस समीकरण के वक्र का असीमपथ जानना है।

$$\text{यहां } र = \frac{य^3}{अय + क^2} = \frac{1}{अ} \cdot \frac{य^2}{1 + \frac{क^2}{अय}} = \frac{1}{अ} \cdot \frac{य^2}{1 + \frac{ग}{य}} \left(\text{यदि } ग = \frac{क^2}{अ}\right)$$

$$= \frac{य^2}{अ}\left(1 - \frac{ग}{य} + \frac{ग^2}{य^2} - \frac{ग^3}{य^3} + \cdots\right) \text{ (केवल भागहार से)}$$

इस लिये असीमपथरूपवक्र का समीकरण

$$र = \frac{य^2}{अ} - \frac{ग \cdot य}{अ} + \frac{ग^2}{अ},$$ वा, $अर = य^2 - गय + ग^2$ यह हुआ ।

ऊपर के समीकरण का रूपान्तर भी कर सकते हो जैसे जब $अर = य^2 - गय + ग^2$ इस लिये $अर - \frac{3 ग^2}{4} = य^2 - गय + \frac{ग^2}{4}$

$$\therefore \; अ\left(र - \frac{3 ग^2}{4 अ}\right) = \left(य - \frac{ग}{2}\right)^2$$

वा, $अ \cdot र' = य'^2$, $\left(यदि\; र' = र - \frac{3 ग^2}{4 अ},\; य' = य - \frac{ग}{2}\right)$

देखो $अर' = य'^2$ इस से स्पष्ट है कि असीमपथरूपवक्र परवलय होगा ।

ऊपर के उदाहरण में पहली युक्ति से यह भी सिद्ध हो जाय गा कि यदि $य = -ग$ तो $\frac{तार}{ताय} = \infty$ और $य - र \frac{ताय}{तार} = -\frac{क^2}{अ}$ इस लिये मूलविन्दु से दूसरी ओर $\frac{क^2}{अ}$ इतने अन्तर पर र अक्ष के समानान्तर जो रेखा हो वह भी असीमपथ हो गा ।

१२४ । यदि किसी वक्र का फ $(य, र) = 0$ ऐसा समीकरण हो और इस पर से

$$य^न फा\left(\frac{र}{य}\right) + य^ध फि\left(\frac{र}{य}\right) + य^द फी\left(\frac{र}{य}\right) + \cdots = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ऐसा समीकरण बनै तो वक्र का असीमपथ नीचे की युक्ति से निकालो (न, ध, इत्यादि उत्तरोत्तर घटते हुए घात हैं)

$$(1) \text{ से, } फा\left(\frac{र}{य}\right) + \frac{1}{य^{न-ध}} फि\left(\frac{र}{य}\right) + \frac{1}{य^{न-द}} फी\left(\frac{र}{य}\right) + \cdots = 0 \cdots \quad (2)$$

ऐसा समीकरण बना सकते हो ।

अब असीमपथ जानने के लिये कल्पना करो कि जब य और र दोनों अनन्त होते हैं तब $\frac{र}{य} = इ_1$, इस लिये तब (२) समीकरण का रूप

$$फा(इ_1) = 0, \text{ ऐसा हो गा}$$

मानो कि $फा(इ_1) = 0$, इस समीकरण पर से $इ_1$ का एक मान

$इ_२$ सिद्ध हुआ "$इ_२$" इस को ग्रहण कर १२२ प्रक्रम की युक्ति से तब $ब_१ = र - इ_२ य$, यह समीकरण हुआ इस लिये $\frac{र}{य} = इ_२ + \frac{ब_१}{य}$ इस का उत्थापन (२) समीकरण में देने से

$$फा\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right) + \frac{१}{य^{न-ध}} फि\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right)$$
$$+ \frac{१}{य^{न-द}} फी\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right) + \cdots = 0 \text{ .... } (३)$$

परन्तु टेलर के सिद्धान्त से

$$फा\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right) = फा(इ_२) + \frac{ब_१}{य} फा'\left(इ_२ + \frac{पब_१}{य}\right)$$
$$= \frac{ब_१}{य} फा'\left(इ_२ + \frac{पब_१}{य}\right)$$

क्यों कि जब $फा(इ_१) = 0$, और $इ_२$, $इ_१$ का एक मान है इस लिये $फा(इ_२) = 0$ । इस का उत्थापन (३) में देने से

$$ब_१ \cdot फा'\left(इ_२ + \frac{पब_१}{य}\right) + \frac{१}{य^{न-ध-१}} फि\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right)$$
$$+ \frac{१}{य^{न-द-१}} फी\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right) + \cdots = 0 \cdots (४) ।$$

(४) समीकरण में यदि $ध > न - १$ तो दूसरा आदि पद अनन्त हो गा इस लिये $ब_१ = \infty$, तब असीमपथ नहीं हो गा ।

यदि $ध = न - १$, और $फा'(इ_२)$ यह शून्य के तुल्य न हो तो $ब_१ = -\frac{फि(इ_२)}{फा'(इ_२)}$ और असीमपथ का समीकरण $र = इ_२ य - \frac{फि(इ_२)}{फा'(इ_२)}$ ।

यदि $ध < न - १$ और $फा'(इ_२)$ शून्य के तुल्य न हो तो $ब_१ = 0$, तब असीमपथ का समीकरण $र = इ_२ य$ ।

सामान्यतः इस असीमपथ के जानने में $र = इ_१ य$, $फा(इ_१) = 0$,

$$फा\left(\frac{र}{य}\right) = 0, \text{ वा, } य^न \cdot फा\left(\frac{र}{य}\right) = 0$$ ये समीकरण उपयोगी हैं ।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि किसी वक्र का ऐसा समीकरण हो जिस के भुजकोटि से उत्पन्न फलों का योग शून्य हो और प्रत्येक पदों में उत्तरोत्तर जो घात हैं उन में सब से बड़ा घात, और घातों में एक युत इस से भी बड़ा हो तो उस वक्र में जितने असीमपथ हों गे वे सब मूलविन्दु में हो कर जायं गे और उन का समीकरण जानने के लिये य का सब से बड़ा जो घात हो उस के गुणक को शून्य के समान करना परन्तु यह सब तभी ठीक हो गा जब फा$'$(इ$_2$) यह शून्य के समान न हो अर्थात् यदि फा(इ$_1$) = 0 इस में इ$_1$ का समान मान न निकले (३५ प्रक्रम देखो)।

१२५। यदि फा$'$(इ$_2$) यह शून्य हो और ध = न − १ तो यदि फि(इ$_2$) यह शून्य न हो तो ब$_1$ का मान अनन्त हो गा इस स्थिति में असीमपथ हो ही गा नहीं फा(इ$_1$) = 0, इस के इ$_2$ मान में। परन्तु यदि फि(इ$_2$) = 0 तो ब$_1$ का मान लुप्त हुआ इस स्थिति में कल्पना करो कि द = न − २ तब (३) समीकरण का रूप

$$\text{फा}\left(\text{इ}_2+\frac{\text{ब}_1}{\text{य}}\right)+\frac{1}{\text{य}}\,\text{फि}\left(\text{इ}_2+\frac{\text{ब}_1}{\text{य}}\right)+\frac{1}{\text{य}^2}\,\text{फी}\left(\text{इ}_2+\frac{\text{ब}_1}{\text{य}}\right)+\cdots=0$$

जब फा(इ$_2$) = 0 और फा$'$(इ$_2$) = 0 तो टेलर के सिद्धान्त से

$$\text{फा}\left(\text{इ}_2+\frac{\text{ब}_1}{\text{य}}\right)=\frac{\text{ब}_1^2}{2\,\text{य}^2}\,\text{फा}''\left(\text{इ}_2+\frac{\text{प}\text{ब}_1}{\text{य}}\right)\text{।}$$

$$\text{और}\ \text{फि}\left(\text{इ}_2+\frac{\text{ब}_1}{\text{य}}\right)=\frac{\text{ब}_1}{\text{य}}\,\text{फि}'\left(\text{इ}_2+\frac{\text{प}_1\text{ब}_1}{\text{य}}\right)\text{।}$$

ऊपर के समीकरण में इन का उत्थापन दे य^2 से गुण फिर य को अनन्त के समान करने से

$$\frac{\text{ब}_1^2}{2}\,\text{फा}''(\text{इ}_2)+\text{ब}_1\text{फि}'(\text{इ}_2)+\text{फी}(\text{इ}_2)=0$$

इस वर्गसमीकरण पर से ब$_1$ का यदि दोनों सम्भव मान हों तो दो असीमपथ परस्पर समानान्तररूप हों गे।

यदि यहां भी कोई एक मान ब$_1$ का लुप्त हो तो पूर्ववत् क्रिया फैलाने से ब$_1$ को जानने के लिये एक घन समीकरण उत्पन्न हो गा।

यदि फा$'$ (इ$_२$) = ० और फि (इ$_२$) यह शून्य के समान न हो तो इसी प्रक्रम के आदि में जो कहा है कि कोई असीमपथ न हो गा उस से सरलासीमपथ समझना चाहिये और वक्रासीमपथ तो ऐसी स्थिति में अवश्य परवलयाकार हो गा ।

जैसे जब फा (इ$_२$) = ० और फा$'$ (इ$_२$) = ० तो टेलर के सिद्धान्त से $फा\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right) = \frac{१}{२} \cdot \frac{ब_१^२}{य^२} फा''\left(इ_२ + \frac{पब_१}{य}\right)$

इस लिये १२४ प्रक्रम के (३) समीकरण का रूप

$$\frac{१}{२} \cdot \frac{ब_१^२}{य^२} \cdot फा''\left(इ_२ + \frac{पब_१}{य}\right) + \frac{१}{य} फि\left(इ_२ + \frac{ब_१}{य}\right) + \cdots = ०$$

इस में य को अनन्त मानने से,

$$\frac{१}{२} \cdot \frac{ब_१^२}{य^२} = -\frac{फि (इ_२)}{यफा'' (इ_२)} \text{ वा } \frac{ब_१}{य} = \left\{-\frac{२ फि (इ_२)}{य \cdot फा'' (इ_२)}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$\therefore\ ब_१ = र - इ_२ य = य \left\{-\frac{२ फि (इ_२)}{य \cdot फा'' (इ_२)}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

वर्ग करने से $(र - इ_२ य)^२ = -\frac{२ यफि (इ_२)}{फा'' (इ_१)}$ यह वक्रासीमपथ का समीकरण परवलयाकार हुआ ।

यदि $ध < न - १$

तो १२४ प्रक्रम के (४) समीकरण से $ब_१$ का मान निश्चित न हो गा क्यों कि फा$'$ (इ$_२$) = ० । परन्तु अभी ऊपर जो क्रिया दिखा आये हैं उसी रीति से फैलाने से,

$$\frac{१}{२} \frac{ब_१^२}{य^२} = -\frac{फि (इ_२)}{य^{न-ध} फा'' (इ_२)} \text{ ऐसा हो गा ।}$$

यदि $न - ध = २$ तो

$$ब_१^२ = -\frac{२ फि (इ_२)}{फा'' (इ_२)} \text{ ऐसा हो गा ।}$$

इस में यदि फि (इ$_२$), और फा$''$ (इ$_२$) दोनों भिन्न भिन्न चिन्ह विशिष्ट हों अर्थात् एक धन दूसरा ऋण हो तो $ब_१$ का दो मान समान

ही विरुद्ध दिशा के आवें गे; इस लिये ऐसी स्थिति में दो असीमपथ परस्पर समानान्तर और मूलविन्दु से दोनों दिशा में तुल्य तुल्य अन्तर पर हों गे। परन्तु यदि न − ध यह दो के तुल्य न हो तो वक्रासीमपथ हो गा जिस का समीकरण $(र - इ_2 य)^2 = \frac{-2 फि(इ_2)}{य^{न-ध-2} फा'(इ_2)}$ ऐसा हो गा।

१२६। १२४ प्रक्रम में यदि $\frac{र}{य}$ का मान अनन्त हो तो स्पष्ट है कि $\frac{य}{र} = 0$, इस लिये वक्र का कोई असीमपथ र अक्ष के समानान्तर है वा नहीं इस की परीक्षा, पूर्व समीकरण का

$र^न फा_1\left(\frac{य}{र}\right) + र^ध फि_1\left(\frac{य}{र}\right) + \cdots = 0$ ऐसा रूपान्तर करने से पूर्ववत् तुरन्त हो जाय गा।

१२७। किसी वक्र का यदि

$र^न फ(य) + र^{न-अ} फ_1(य) + र^{न-अ_1} फ_2(य) + \cdots = 0$ इस प्रकार का समीकरण हो सकता हो तो जो असीमपथ र अक्ष के समानान्तर हो गा उस का ज्ञान $फ(य) = 0$ इस पर से संभव य मान जानने से मालूम हो जाय गा।

(अ, $अ_1$ इत्यादि धनसंख्या हैं) क्यों कि पहले समीकरण का

$फ(य) + \frac{फ_1(य)}{र^अ} + \frac{फ_2(य)}{र^{अ_1}} + \cdots = 0$ ऐसा रूपान्तर कर सकते हो फिर $र = \infty$ मानने से स्पष्ट है कि $फ(य) = 0$ (१२२ प्रक्रम के अन्त्य में असीमपथ का लक्षण देखो) इस से यह सिद्ध होता है कि वक्र के समीकरण में र के सब से बड़ा घात का जो गुणक है उस को शून्य के समान करने से र अक्ष के समानान्तर असीमपथ का ज्ञान हो जाय गा। इसी प्रकार वक्र के समीकरण में य के सब से बड़े घात के गुणक को शून्य के समान करने से य अक्ष के समानान्तर असीमपथ का ज्ञान हो जाय गा।

१२८। १२४ प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि र के स्थान में $इ_1 य + ब_1$ इस का उत्थापन दो और $ध = न - 1$, $द = न - 2$, ⋯ मानो तो

$$य^न फा\left(इ_1 + \frac{ब_1}{य}\right) + य^{न-1} फि\left(इ_1 + \frac{ब_1}{य}\right)$$

$+ य^{न-२} फी\left(इ_1 + \frac{ब_1}{य}\right) + \cdots = 0$ ऐसा हो गा । अब इस के प्रत्येक पद को टेलर के सिद्धान्त से फैला कर $फा'\left(इ_1 + \frac{पब_1}{य}\right)$ इत्यादि पदों में य को अनन्त मान य के घातक्रम से लिखने से,

$$य^{न} फा(इ_1) + य^{न-१}\left\{फि(इ_1) + ब_1\, फा'(इ_1)\right\}$$

$$+ य^{न-२}\left\{फी(इ_1) + ब_1\, फि'(इ_1) + \frac{ब_1^2}{य} फा''(इ_1)\right\} + \cdots$$

ऐसा हो गा इस में पहले पद के गुणक को शून्य के समान करने से $फा(इ_1) = 0$ ऐसा ठीक १२४ प्रक्रम का समीकरण हो गा ।

$य^{न-१}$ इस के गुणक को शून्य के समान करने से $ब_1 = -\frac{फि(इ_1)}{फा'(इ_1)}$ इस में $फा(इ_1) = 0$ इस पर से जो $इ_1$ का एक मान $इ_2$ आवे उस का उत्थापन देने से $ब_1 = -\frac{फि(इ_2)}{फा'(इ_2)}$ ।

यदि इस पर से $ब_1$ का मान लुप्त हो तो $य^{न-२}$ इस के गुणक को शून्य के समान कर ठीक १२४ प्रक्रम के विधि के ऐसा वर्गसमीकरण पर से $ब_1$ का मान निकालना ऐसा ही आगे भी जानना ।

इस पर से यह क्रिया सिद्ध होती है कि जिस वक्र का $फ(य, र) = 0$ ऐसा समीकरण हो उस में र के स्थान में $इ_1 य + ब_1$ का उत्थापन देकर ऐसा रूपान्तर करो कि य के घातक्रम से

अर्थात् $खय^{न} + ख_1 य^{न-१} + ख_2 \cdot य^{न-२}$ इस क्रम से पद हों फिर य के सब से बड़े घात के गुणक को और उस से उतर कर जो घात है उस के गुणक को भी शून्य के समान कर उन पर से $इ_1$ और $ब_1$ के मान लाओ यदि $ब_1$ का चाहे जो मान हो सब में $ख_1$ शून्य के समान हो तो $ख_2$ को शून्य के समान कर $इ_1$ और $ब_1$ का मान लाओ यदि $ब_1$ के सब मान में सर्वदा $ख_2$ शून्य हो तो $ख_3$ को शून्य के समान करना यों आगे भी जानना इस प्रकार से $इ_1$ और $ब_1$ के मान पर से फिर असीमपथ का समीकरण भी मालूम हो जाय गा । जैसे

(१) $२ य^२ + २ र^२ - ३ अयर = 0$

इस में माना कि $र = इ_१ य + ब_१$

तो $२ य^२ + २ (इ_१ य + ब_१)^२ - ३ अय (इ_१ य + ब_१) = 0$

वा, $य^२ (२ + २ इ_१^२ - ३ अइ_१) + ४ य (इ_१ ब_१ - \frac{३}{४} अब_१) = 0$

इस लिये, $२ + २ इ_१^२ - ३ अइ_१ = 0$, $इ_१ ब_१ - \frac{३}{४} अब_१ = 0$

इन दोनों समीकरणों से $इ_१ = \frac{३ अ \pm \sqrt{९ अ^२ - १६}}{४}$

और $ब_१ = 0$

इस लिये असीमपथ का समीकरण

एक $४ र = य (३ अ + \sqrt{९ अ^२ - १६})$ यह

दूसरा $४ र = य (३ अ - \sqrt{९ अ^२ - १६})$ यह हुआ।

(२) $य^२ (य + र) = ९ (य - र)$ यहां भी $र = इ_१ य + ब_१$

तब $य^२ (य + इ_१ य + ब_१) = ९ (य - इ_१ य - ब_१)$

$य^३ (१ + इ) + ब_१ य^२ + ९ य (इ_१ - १) + ९ ब_१ = 0$

इस लिये $इ + १ = 0$, $ब_१ = 0$

इन पर से असीमपथ का समीकरण $र = - य$।

(३) $यर^३ - २ य^२ र^२ + ३ अयर^२ + य^३ र - ३ अय^२ र + ४ अ^२ य - अ^४ = 0$

यहां पहले १२७ प्रक्रम से, $य = 0$ वा, $र = 0$

इस लिये दोनों अक्ष ही दो असीमपथ हुए। फिर र के स्थान में $इ_१ य + ब_१$ इस का उत्थापन देकर य के घातक्रम से रखने से,

$$य^४ \cdot इ_१ (इ_१ - १)^२ + य^३ (इ_१ - १) \{ ३ इ_१ अ + (३ इ_१ - १) ब_१ \}$$
$$+ य^२ \{ ब_१^२ (३ इ_१ - २) + ३ अब_१ (२ इ_१ - १) \} + \cdots$$

इस से $इ_१ (इ_१ - १)^२ = 0$ यह हुआ, इस पर से $इ_१ = 0$ वा $इ_१ = १$ यदि पहला $इ_१$ अर्थात् 0 लेकर $ब_१$ का मान निकालो तो य अक्ष ही असीमपथ हो गा जिसे ऊपर ले आ चुके हैं। और यदि $इ_१$ का दूसरा मान अर्थात् १ लेकर क्रिया करो तो $य^३$ का गुणक शून्य स्वयं हो जाता है इस लिये तब $य^२$ के गुणक को शून्य करने से

$$ब_१^२ (३ इ_१ - २) + ३ अब_१ (२ इ_१ - १) = 0$$

वा, $ब_१^२ + ३ अब_१ = 0$ $\therefore$ $ब_१ = 0$ वा, $ब_१ = - ३ अ$

इस पर से असीमपथ का समीकरण $र = य$ वा $र = य - ३अ$ यह हो गा ।

(४) $२य^३ + २र^३ - ३अयर = 0$

यहां यदि $र = इ_१य + ब_१$

तो $२य^३ + २(इ_१य + ब_१)^३ - ३अय(इ_१य + ब_१) = 0$

वा, $२य^३ + २इ_१^३य^३ + ६इ_१^२ब_१य^२ + ६इ_१ब_१^२य$
$+ २ब_१^३ - ३अइ_१य^२ - ३अब_१य = 0$ ।

वा, $य^३(२ + २इ_१^३) + ३य^२(२इ_१^२ब_१ - अइ_१)$
$+ ३य(२इ_१ब_१^२ - अब_१) + २ब_१^३ = 0$

इस पर से $२ + २इ_१^३ = 0$, $२इ_१^२ब_१ - अइ_१ = 0$

और फिर इन दोनों से $इ_१ = -१$, $ब_१ = -\frac{अ}{२}$ तब असीमपथ का समीकरण $र = -य - \frac{अ}{२}$ यह हुआ ।

(५) $अय^२र + कयर^२ + गयर + अ'य + क'र + ग' = 0$

यहां पहले १२७ प्रक्रम से य और र के सब से बड़े घात के गुणक को शून्य करने से $र = 0$, $य = 0$

दो असीमपथ तो दोनों अक्ष ही हुए

फिर र के स्थान में $इ_१य + ब_१$ का उत्थापन देने से

$अय^२(इ_१य + ब_१) + कय(इ_१य + ब_१)^२ + गय(इ_१य + ब_१) + अ'य$
$+ क'(इ_१य + ब_१) + ग' = 0$, य के घातक्रम से लिखने से

$य^३इ_१(अ + कइ_१) + य^२(अब_१ + २कइ_१ब_१ + गइ_१)$
$+ य(कब_१^२ + गब_१ + क'इ_१ + अ') + क'ब_१ + ग' = 0$

इस में $य^३$ और $य^२$ के गुणक को शून्य करने से

$इ_१(अ + कइ_१) = 0$, $अब_१ + २कइ_१ब_१ + गइ_१ = 0$

पहले समीकरण से $इ_१ = 0$ वा $इ_१ = -\frac{अ}{क}$ दूसरे समीकरण में पहले $इ_१$ का उत्थापन देने से $ब_१ = 0$ दूसरे $इ_१$ का उत्थापन देने से $ब_१ = -\frac{ग}{क}$ इस पर से पहले $ब_१$ से असीमपथ य अक्ष ही हुआ और दूसरे पर से $र = -\frac{अ}{क}य - \frac{ग}{क}$, वा, $कर + अय + ग = 0$ यह समीकरण हुआ।

असीमपथ का लक्षण श्लोक और दोहे में ।

श्लोक ।

या स्पर्शरेखा निजमूलविन्दोरनन्तदूरस्थितविन्दुगोक्ता ।
वक्रप्रपञ्चप्रचुरप्रवीणैर्वक्रस्य साऽसीमपथाख्यरेखा ॥ १ ॥

दोहा ।

मूलविन्दु से वक्र में विन्दु जो दूर अनन्त ।
स्पर्शरेखिका ताहि पर सोइ असीमपथ सन्त ॥ १ ॥

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

नीचे लिखे हुए समीकरणसम्बन्धिवक्रों में असीमपथ का समीकरण बतावो? ।

(१) $र^२ = \frac{८य^३ - अ^३}{८य - ८अ}$ । उत्तर, $य = अ$, वा $र = \pm\left(\frac{२य + अ}{२}\right)$ ।

(२) $\frac{र^३}{य^२} = ६अ - य$ । उत्तर, $र = -य + २अ$ ।

(३) $र(२अ^२ + य^२) = अ^२(अ - य + र)$ । उत्तर, $र = 0$ ।

(४) $र^२\left(अर + कय + \frac{२अकय}{र}\right) = (अर + कय)^२$ ।

उत्तर, $र = -\frac{क}{अ}य + २अ$ ।

(५) $र^३ = (य - ३अ)^२(य - ३ग)$ ।

उत्तर, $र = य - (२अ + ग)$ ।

(६) $र^२(य - १) + य^२(र^२ - १) = अ^३ - य^२ - र^२$ ।

उत्तर, $य = 0$, वा, $र = 0$, वा $र = -य$ ।

(७) $\frac{यर}{\sqrt{य^२ - र^२}} = \pm अ$ । उत्तर $र = \pm अ$ ।

(८) $\frac{य^३ - अय^२}{अ + ३य} = र^२$ ।

उत्तर, $र = \pm\left(\frac{३य - २अ}{३\sqrt{३}}\right)$ वा, $य = -\frac{अ}{३}$ ।

(९) $\frac{र^2}{य^2} = \frac{र + २ अ}{य + अ}$ ।

उत्तर, $य = - अ$, वा, $र = - २ अ$, वा, $र = य + अ$ ।

(१०) $(र - २ य)(र + य)(र - य)^2 - अ(र - य)^3$
$+ ४ अ^2 (र^2 - य^2) - अ^3 (र - य) = 0$ ।

उत्तर, $र = य$, वा, $र = - य + \frac{२ अ}{३}$ वा, $र = २ य + \frac{अ}{३}$ ।

(११) $र^2 (य - र) + अ य^2 = \frac{अ^2 (३ र^2 + अ^2)}{य - र}$ ।

उत्तर, $र = य + \frac{अ}{२}(१ \pm \sqrt{१३})$ ।

(१२) $य (य^2 - ४) - २ र (र^2 - ४) = ३ य र^2 + ८$ ।

उत्तर, $२ र = य$, वा, $य + र = २$ वा, $य + र = - २$ ।

(१३) $\frac{य (य - र)}{\sqrt{य^2 + र^2}} = \pm अ$ ।

उत्तर, $य = \pm अ$, $र = य \pm अ \sqrt{२}$ ।

(१४) परवलय में जिस का समीकरण $र^2 = ४ अ य$ यह है सिद्ध करो कि स्पर्शरेखा का समीकरण $र_१ = म य_१ + \frac{अ}{म}$ यह हो गा ।

यहां $म = \frac{२ अ}{र}$ ।

(१५) (१४) प्रश्न के समीकरण से सिद्ध करो कि मुख्यलम्ब का समीकरण $र_१ = म_१ (य_१ - २ अ - अ म_१^2)$ यह हो गा ।

यहां $- \frac{र}{२ अ} = म_१$ ।

(१६) परवलय का समीकरण $र^2 = ४ अ य$ यह है इस में दो दो मुख्यलम्ब परस्पर लम्बरूप हैं सिद्ध करो कि उन के योग उस वक्र में पड़ें गे जिस का समीकरण $र^2 = अ (य - ३ अ)$ यह है ।

(१७) जिस दीर्घवृत्त का $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(अ^2 - य^2)$ यह समीकरण है उस में सिद्ध करो कि स्पर्शरेखा का समीकरण

$र_१ = म य_१ + \sqrt{म^2 अ^2 + क^2}$ यह हो गा । यहां $म = - \frac{क^2 य}{अ^2 र}$ ।

(१८) जिस अतिपरवलय का $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(य^2 - अ^2)$ यह समीकरण है उस में पहले यह सिद्ध करो कि स्पर्शरेखा का समीकरण $र_1 = मय_1 + \sqrt{म^2अ^2 - क^2}$ यह हो गा।

जहां $म = \frac{क^2य}{अ^2र}$ फिर इस पर से यह सिद्ध करो कि स्पर्शरेखा पर मूलविन्दु से पड़े हुए लम्ब का मूल उस वक्र में हो गा जिस का समीकरण $(र^2 + य^2)^2 = अ^2य^2 - क^2र^2$ यह हो गा।

(१९) एक परवलय का शिरः*स्थान एक दीर्घवृत्त का केन्द्र है दीर्घवृत्त का बृहद्व्यास परवलय के य अक्ष पर लम्ब है, और दोनों वक्रों के योग† विन्दु का कोण नब्बे अंश है तो बतावो कि दीर्घवृत्त के दोनों व्यासों में क्या सम्बन्ध हो गा?। उत्तर $\sqrt{२} : १$।

(२०) जिस परवलय में बहिःस्थ व विन्दु से वट, और वप स्पर्शरेखा खींची गई हैं उस में सिद्ध करो कि $नाट \times नाप = नाव^2$ यहां ना परवलय की नाभि है।

(२१) जिस वक्र का $२र = \frac{अ}{क}\left(इ^{\frac{कय}{अ}} + इ^{\frac{-कय}{अ}}\right)$ यह समीकरण है उस के मुख्यलम्ब का मान बतावो?। उत्तर $लम्ब = \frac{कर^2}{अ}$।

(२२) एक सर्प उस वक्र में चलता था जिस का समीकरण $र(अय + क^2) = य^3$ यह है उस को पकड़ने के लिये एक नेउरा दौड़ा वह उस वक्र में सांप को धोखा देने के लिये चला जिस का समीकरण $अर = य^2 - गय + ग^2$ यह है तो बतावो किसी समय में नेउरा सांप को पकड़ा वा नहीं?। यहां $ग = \frac{क^2}{अ}$। उत्तर, नहीं।

इति त्रयोदशाध्याय।

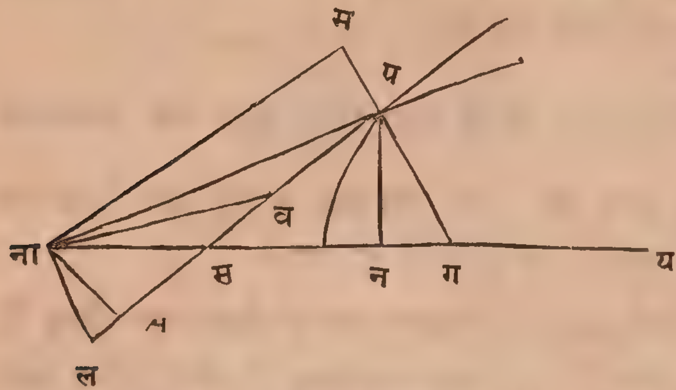
---

* य अक्ष और परवलय के योगविन्दु को परवलय का शिरःस्थान कहते हैं।

† दोनों वक्रों के योगविन्दु पर दोनों वक्रों की जो स्पर्शरेखा होती हैं उन के योग से जो कोण हो उसे वक्रों के योगविन्दु का कोण कहते हैं।

चतुर्दशाध्याय १४ ।

ध्रुवीय भुजयुग्म पर से स्पर्शरेखादि का समीकरणादि जानने के विषय में ।



१२९ । किसी वक्र के पविन्दु की स्पर्शरेखा पस, मुख्यलम्ब पग, भुज = नान = य और कोटि = पन = र, जहां र = फ (य) यहां १०५ प्रक्रम से य = श्रु · कोज्याप, र = श्रु · ज्याप

इस लिये श्रु = फा (प) वा फि (श्रु, प) = ०

(यहां नाप = श्रु और < पनाय = प) ऐसे समीकरण को ध्रुवीय-समीकरण, नाप को श्रुति और प को श्रुतिजकोण कहते हैं ।

< पसय को (ब) कल्पना करो तो

$$\text{स्पब} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},$$ ११६ प्रक्रम से परन्तु य = श्रुकोज्याप, र = श्रु · ज्याप

$$\text{इस लिये, } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \cdot \text{ज्याप} + \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याप}}{\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{कोज्याप} - \text{श्रु} \cdot \text{ज्याप}} = \text{स्पब}$$

१३० । यदि < नापस = भ तो भ = < पसय − < पनाय = ब − प ।

$$\text{इस लिये, स्पभ} = \frac{\dfrac{\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याप} + \text{श्रुकोज्याप}}{\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{कोज्याप} - \text{श्रुज्याप}} - \text{स्पप}}{1 + \dfrac{\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याप} + \text{श्रुकोज्याप}}{\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{कोज्याप} - \text{श्रुज्याप}} \cdot \text{स्पप}}$$

$$= \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}, \text{ लघुरूप करने से।}$$

१३१। पस रेखा पर यदि नार लम्ब डाल इस का नाम (ल) रक्खो तो $\text{ल} = \text{नाप} \cdot \text{ज्या} \angle \text{नापस} = \text{श्रु} \cdot \text{ज्याभ}$ परन्तु जब

$$\text{स्पभ} = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}, \text{ इस लिये}$$

$$\text{ज्याभ} = \frac{\text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}}{\sqrt{१ + \text{श्रु}^२ \cdot \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२}}} \text{ और } \text{ल} = \frac{\text{श्रु}^२ \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}}{\sqrt{१ + \text{श्रु}^२ \cdot \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२}}}$$

इस पर से,

$$\frac{१}{\text{ल}^२} = \frac{१ + \text{श्रु}^२ \cdot \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२}}{\text{श्रु}^४ \cdot \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२}} = \frac{\frac{\text{ताश्रु}^२}{\text{ताप}^२} + \text{श्रु}^२}{\text{श्रु}^४}$$

$$= \frac{१}{\text{श्रु}^२} + \frac{१}{\text{श्रु}^४} \cdot \frac{\text{ताश्रु}^२}{\text{ताप}^२} = \text{ह}^२ + \left(\frac{\text{ताह}}{\text{ताप}}\right)^२$$

$$\left(\text{क्यों कि यदि } \frac{१}{\text{श्रु}} = \text{ह तो } \frac{\text{ताह}}{\text{ताप}} = -\frac{\text{ताश्रु}}{\text{श्रु}^२ \cdot \text{ताप}}\right)।$$

१३२। यदि नाप रेखा के नाविन्दु पर लम्ब खड़ा करो और पस स्पर्शरेखा के लविन्दु में लगा समझो तो सरलत्रिकोणमिति ही की युक्ति से $\text{नाल} = \text{श्रु} \cdot \text{स्प} \angle \text{नापस} = \text{श्रु} \cdot \text{स्पभ} = \text{श्रु}^२ \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}$।

१३३। अतीयभुजयुग्म पर से स्पर्शरेखा का समीकरण जानना।

कल्पना करो कि स्पर्शरेखा में दूसरा विन्दु व और $\text{नाव} = \text{श्रु}'$, $\angle \text{वनाय} = \text{प}'$ तो पनाव त्रिभुज से $\frac{\text{श्रु}}{\text{श्रु}'} = \frac{\text{ज्या}(\text{प} - \text{प}' + \text{भ})}{\text{ज्याभ}}$

$$= \frac{\text{कोज्याभ} \cdot \text{ज्या}\,(\text{प} - \text{प}') + \text{ज्याभ} \cdot \text{कोज्या}\,(\text{प} - \text{प}')}{\text{ज्याभ}}$$

$$= \text{कोस्पभ} \cdot \text{ज्या}\,(\text{प} - \text{प}') + \text{कोज्या}\,(\text{प} - \text{प}'),$$

परन्तु $\text{स्पभ} = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}$

इस लिये $\frac{\text{श्रु}}{\text{श्रु}'} = \frac{1}{\text{श्रु}} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \cdot \text{ज्या}\,(\text{प} - \text{प}') + \text{कोज्या}\,(\text{प} - \text{प}')$ ⋯ (१)

वा, $\text{श्रु}' \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ताप}} \left\{ \text{श्रु} \cdot \text{ज्या}\,(\text{प} - \text{प}') \right\} = \text{श्रु}^2$ .... (२)

यदि $\frac{1}{\text{श्रु}} = \text{ह}$, और $\frac{1}{\text{श्रु}'} = \text{ह}'$

तो $-\frac{1}{\text{श्रु}^2} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताप}}$ अब (१) समीकरण में श्रु का भाग दे कर

ह का उत्थापन देने से $\text{ह}' = \text{ह} \cdot \text{कोज्या}\,(\text{प} - \text{प}') - \frac{\text{ताह}}{\text{ताप}} \cdot \text{ज्या}\,(\text{प} - \text{प}')$

वा, $\text{ह}' = \text{ह} \cdot \text{कोज्या}\,(\text{प}' - \text{प}) + \frac{\text{ताह}}{\text{ताप}}\,\text{ज्या}\,(\text{प}' - \text{प})$ यही स्पर्शरेखा का समीकरण हुआ ।

१३४ । इसी प्रकार यदि मुख्यलम्ब में दूसरा बिन्दु म मानो और नाम = श्रु', < यनाम = प' तो पनाम त्रिभुज से

$$\frac{\text{श्रु}}{\text{श्रु}'} = \frac{\text{ज्या}\,(\text{प}' - \text{प} + \frac{\pi}{2} - \text{भ})}{\text{ज्या}\,(\frac{\pi}{2} - \text{भ})}$$

$$= \text{स्पभ} \cdot \text{ज्या}\,(\text{प}' - \text{प}) + \text{कोज्या}\,(\text{प}' - \text{प})$$

$$= \frac{\text{श्रु} \cdot \text{ताप}}{\text{ताश्रु}}\,\text{ज्या}\,(\text{प}' - \text{प}) + \text{कोज्या}\,(\text{प}' - \text{प})$$

वा, $\text{श्रु}' \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \left\{ \text{श्रु} \cdot \text{कोज्या}\,(\text{प} - \text{प}') \right\} = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}$

वा, जैसा स्पर्शरेखा के समीकरण में सङ्केत कल्पना किया है उस

पर से $ह' = ह \cdot कोज्या(प' - प) - ह^2 \cdot \frac{ताप}{ताह} ज्या(प' - प)$ ।

१३५। जब स्पष्ट है कि मूलविन्दु से अनन्त दूर पर वक्र में जो विन्दु हो उस पर जो स्पर्शरेखा होती है उसी को असीमपथ कहते हैं तब यदि वक्र का ध्रुवीयसमीकरण ज्ञात हो तो उस विन्दु का $श्रु = \infty$ । इस लिये समीकरण में जिस प के मान में $श्रु = \infty$ हो पहले उस प का मान निकालो फिर उस प पर से नाल वा $श्रु^2 \cdot \frac{ताप}{ताश्रु}$ इस का मान निकालो तो इस पर से असीमपथ का भी ज्ञान हो जाय गा।

क्योंकि प पर से श्रु के दिशा का ज्ञान हो जाय गा फिर मूल-विन्दु पर श्रुति में लम्ब खड़ा कर उस में $श्रु^2 \cdot \frac{ताप}{ताश्रु}$ इस के तुल्य काट कर वहां से श्रुति के *समानान्तररेखा खींचने से यही असीमपथ हो गा।

१३६। यदि किसी वक्र का $फ(श्रु) = प$ ऐसा समीकरण हो और जब $श्रु = अ$ तब प का सब से बड़ा मान होता हो और जब $श्रु > अ$ तब प का मान असम्भव हो तो स्पष्ट है कि मूलविन्दु को केन्द्र मान अ व्यासार्द्ध से जो वृत्त हो गा उस के भीतर ही उस वक्र का सब अवयव रहे गा। ऐसे वृत्त को बहिर्वृत्तीयअसीमपथ अर्थात् बाहरी वृत्ताकारअसीमपथ कहते हैं। परन्तु यदि $श्रु > अ$ तब प का मान यदि सम्भव और जब $श्रु < अ$ तब प का मान असम्भव हो तो अ व्यासार्द्ध से मूलविन्दु केन्द्र से जो वृत्त होता है उसे अन्तर्वृत्तीयअसी-मपथ अर्थात् भीतरी वृत्ताकारअसीमपथ कहते हैं।

१३७। इस प्रक्रम में सब प्रक्रमों से सिद्ध पदार्थों को एकट्ठा कर के लिखते हैं और कुछ उदाहरण कर के दिखाते हैं।

---

* जब $श्रु = \infty$ तब $पल = \infty$ हो गा इस लिये इन का योग अनन्त दूर पर हो गा अर्थात् श्रु, वा नाप और लप दोनों कहीं नहीं मिलें गे इस लिये तब दोनों समा-नान्तर ही सिद्ध हों गे (१२६ प्रक्रम का क्षेत्र देखो)।

(१) $\text{स्पब} = \dfrac{\dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\,\text{ज्याप} + \text{श्रु}\cdot\text{कोज्याप}}{\dfrac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\,\text{कोज्याप} - \text{श्रु}\cdot\text{ज्याप}}$ ।

(२) $\text{स्पभ} = \text{श्रु}\cdot\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}$ ।

(३) $\dfrac{१}{\text{ल}^{२}} = \text{ह}^{२} + \left(\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताप}}\right)^{२}$

स्पर्शरेखा का समीकरण ।

(४) $\text{ह}' = \text{ह}\cdot\text{कोज्या}\,(\text{प}' - \text{प}) + \dfrac{\text{ताह}}{\text{ताप}}\,\text{ज्या}\,(\text{प}' - \text{प})$

मुख्यलम्ब का समीकरण ।

(५) $\text{ह}' = \text{ह}\cdot\text{कोज्या}\,(\text{प}' - \text{प}) - \text{ह}^{२}\cdot\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताह}}\,\text{ज्या}\,(\text{प}' - \text{प})$ ।

(६) $\text{नाल} = \text{श्रु}^{२}\cdot\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}$ = अतीयअवान्तरस्पर्शरेखा ।

उदाहरण ।

(१) $\text{श्रु} = \text{अ}\cdot\text{ज्याप}$ इस वक्र में भ का मान बतावो? ।

यहां $\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = \dfrac{१}{\text{अ}\cdot\text{कोज्याप}}$

इस लिये $\text{स्पभ} = \text{श्रु}\cdot\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = \dfrac{\text{अ}\cdot\text{ज्याप}}{\text{अ}\cdot\text{कोज्याप}} = \text{स्पप}$

∴ भ = प, इस प्रक्रम के (२) सिद्धान्त से ।

(२) $\text{अ} = \text{श्रु}\cdot\text{प}$ इस वक्र में अतीयअवान्तरस्पर्शरेखा का मान बतावो? ।

यहां $\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}\cdot\text{श्रु} + \text{प} = 0$ वक्र, के समीकरण से

इस लिये $\dfrac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = -\dfrac{\text{प}}{\text{श्रु}}$

$$\text{और नाल} = \text{श्रु}^2 \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = -\frac{\text{श्रु}^2 \cdot \text{प}}{\text{श्रु}} = -\text{श्रु} \cdot \text{प} = -\text{श्र} \text{ ।}$$

(३) $\text{श्रु}^2 = \text{श्र}^2 \cdot \text{कोज्या}\, २\text{प}$ इस वक्र में सिद्ध करो कि नाभि से स्पर्शरेखा पर खड़े हुए लम्ब का मूल किस वक्र में हो गा? । अर्थात् र विन्दु किस वक्र में हो गा? । (१२९ प्रक्रम का क्षेत्र देखो)

यहां पनार त्रिभुज में

$$\text{ज्या} < \text{पनार} = \frac{\sqrt{\text{नाप}^2 - \text{नार}^2}}{\text{नाप}} = \frac{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{श्रु}_1^2}}{\text{श्रु}} \text{ यदि नार} = \text{श्रु}_1$$

$$\text{इस लिये} < \text{रनाय} = < \text{पनाय} - < \text{पनार} = \text{प} - \text{प}_1$$

(यदि $< \text{पनार} = \text{प}_1$, और $< \text{रनाय}$ को ऋण मानो)

$$\text{परन्तु ज्याप}_1 = \frac{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{श्रु}_1^2}}{\text{श्रु}} \quad \therefore \quad \text{कोज्याप}_1 = \frac{\text{श्रु}_1}{\text{श्रु}}$$

$$\text{और ज्या}(\text{प} - \text{प}_1) = \text{कोज्याप}_1 \text{ज्याप} - \text{ज्याप}_1 \text{कोज्याप}$$

$$= \frac{\text{श्रु}_1 \text{ज्याप} - \text{कोज्याप}\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{श्रु}_1^2}}{\text{श्रु}} = \text{ज्याप}_2$$

(यदि $\text{प} - \text{प}_1 = \text{प}_2$) यह समीकरण हुआ ।

$$\text{वा जब १३१ प्रक्रम से } \frac{1}{\text{ल}^2} = \frac{1}{\text{श्रु}^2} + \frac{1}{\text{श्रु}^4} \cdot \frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताप}^2}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{श्रु}^4}{\text{ल}^2} = \text{श्रु}^2 + \frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताप}^2}$$

$$\text{वा, } \frac{\text{श्रु}^4 - \text{ल}^2 \cdot \text{श्रु}^2}{\text{ल}^2} = \frac{\text{श्रु}^2}{\text{ल}^2}(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2) = \frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताप}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = \frac{\text{ल}}{\text{श्रु}\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}} \text{ और ताप} = \frac{\text{ल} \cdot \text{ताश्रु}}{\text{श्रु}\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}}$$

अब जिस वक्र के र विन्दु का श्रुति ल है उस में र विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर ना से पड़े हुए लम्ब का मान ल_1 और $< \text{रनाय} = \text{प}_2$ तो ऊपर की युक्ति से $\text{ताप}_2 = \dfrac{\text{ल}_1 \cdot \text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^2 - \text{ल}_1^2}}$

परन्तु $प_2 = प - प_1 = प - कोज्या^{-1}\frac{ल}{स्रु}$

इस लिये इस की गति लेने से

$$ताप_2 = ताप - ता\left(कोज्या^{-1}\frac{ल}{स्रु}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

परन्तु यदि $स = कोज्या^{-1}\frac{ल}{स्रु}$ तो $कोज्यास = \frac{ल}{स्रु}$

इस लिये, $-ज्यास \cdot तास = \frac{स्रु \cdot ताल - ल \cdot तास्रु}{स्रु^2}$

$$\therefore\ तास = -\frac{स्रुताल - लतास्रु}{स्रु^2 \cdot ज्यास}$$

परन्तु जब $कोज्यास = \frac{ल}{स्रु}$ इस लिये $ज्यास = \frac{\sqrt{स्रु^2 - ल^2}}{स्रु}$

ऊपर के समीकरण में इस का उत्थापन देने से

$तास = -\frac{स्रु \cdot ताल - ल \cdot तास्रु}{स्रु\sqrt{स्रु^2 - ल^2}}$ अब इस तास का उत्थापन इस उदाहरण के (१) समीकरण में देने से

$$ताप_2 = ताप + \frac{स्रु \cdot ताल - ल \cdot तास्रु}{स्रु\sqrt{स्रु^2 - ल^2}}$$

इस में $ताप_2$ और ताप के स्थान में क्रम से

$\frac{ल_1 \cdot ताल}{ल\sqrt{ल^2 - ल_1^2}}$ और $\frac{ल \cdot तास्रु}{स्रु\sqrt{स्रु^2 - ल^2}}$ इस का उत्थापन देने से

$$\frac{ल_1 \cdot ताल}{ल\sqrt{ल^2 - ल_1^2}} = \frac{ल \cdot तास्रु}{स्रु\sqrt{स्रु^2 - ल^2}} + \frac{स्रु \cdot ताल - ल \cdot तास्रु}{स्रु\sqrt{स्रु^2 - ल^2}}$$

$$= \frac{स्रु \cdot ताल}{स्रु\sqrt{स्रु^2 - ल^2}} \quad \therefore \frac{ल_1}{\sqrt{ल^2 - ल_1^2}} = \frac{ल}{\sqrt{स्रु^2 - ल^2}}$$

दोनों का वर्ग कर छेदगम करने से $ल_1^2 स्रु^2 - ल^2 ल_1^2 = ल^4 - ल^2 ल_1^2$

इस लिये, $\frac{ल_1^2}{ल^2} = \frac{ल^2}{स्रु^2}$ वा, $ल_1 = \frac{ल^2}{स्रु}$

यदि $ल = स्रु_1$ तो उपर के समीकरण को

$ल_1 \cdot स्रु = ल_1$ फि $(स्रु_1) = स्रु_1^2$ (क्यों कि स्रु अवश्य ल का फल हो गा) ऐसे भी लिख सकते हो।

इस लिये $ल_1$ फि $(स्रु_1) = स्रु_1^2$ यह भी नये वक्र का समीकरण हुआ। वा केवल (ल) का मान जानने से भी समीकरण बन जाय गा।

देखो ऊपर के उदाहरण में जब $स्रु^2 = अ^2 \cdot कोज्या\,2प$

$$इस\ लिये\ 2स्रु \cdot \frac{तास्रु}{ताप} = -2अ^2 ज्या\,2प \quad \therefore \frac{तास्रु}{ताप} = -\frac{अ^2 ज्या\,2प}{स्रु}$$

$$तब\ \frac{1}{ल^2} = \frac{1}{स्रु^2} + \frac{1}{स्रु^4} \cdot \frac{तास्रु^2}{ताप^2} = \frac{1}{अ^2 \cdot कोज्या\,2प} + \frac{अ^4 \cdot ज्या^2 2प}{स्रु^4 \cdot स्रु^2}$$

$$= \frac{1}{अ^2 कोज्या\,2प} + \frac{अ^4 \cdot ज्या^2 2प}{अ^6 \cdot कोज्या^3 2प}$$

$$= \frac{1}{अ^2 कोज्या\,2प} + \frac{ज्या^2 2प}{अ^2 \cdot कोज्या^3 2प}$$

$$= \frac{कोज्या^2 2प + ज्या^2 2प}{अ^2 \cdot कोज्या^3 2प} = \frac{1}{अ^2 \cdot कोज्या^3 2प}$$

$$\therefore ल^2 = अ^2 \cdot कोज्या^3 2प \quad और\ ज्या(प - प_1)$$

$$= \frac{स्रु_1 ज्याप - कोज्याप \sqrt{स्रु^2 - स्रु_1^2}}{स्रु}$$

$$= \frac{-अ \cdot ज्याप \cdot कोज्या^{\frac{3}{2}} 2प - कोज्याप \sqrt{अ^2 कोज्या\,2प - अ^2 \cdot कोज्या^3 2प}}{अ \cdot कोज्या^{\frac{1}{2}} 2प}$$

$$= \frac{-अ \cdot ज्याप \cdot कोज्या^{\frac{3}{2}} 2प - अ \cdot कोज्याप \cdot कोज्या^{\frac{1}{2}} 2प \sqrt{1 - कोज्या^2 2प}}{+अ \cdot कोज्या^{\frac{1}{2}} 2प}$$

$$= -(ज्याप \cdot कोज्या\,2प + कोज्याप \cdot ज्या\,2प) = -ज्या\,3प = ज्याप_2$$

$\therefore$ $-३प = प_२$ (यह मान ल का ऋणमान मान कर सिद्ध हुआ है)

अब यदि $ल^२ = अ^२ (कोज्या\, २प)^३$ इस में प के स्थान में $-\frac{प_२}{३}$ इस का उत्थापन देओ तो $ल^२ = अ^२ (कोज्या\, \frac{२}{३} प_२)^३$ वा, ल के स्थान में $श्रु_१$ का उत्थापन देने से $श्रु_१^२ = अ^२ (कोज्या\, \frac{२}{३} प_१)^३$ यही नये वक्र का समीकरण हुआ ।

(४) $ज्याप = \frac{क}{श्रु - अ}$ यह समीकरण जिस वक्र का है उस में नाल का प्रमाण बतावो? (इस अध्याय के आदि में जो क्षेत्र है उसे देखो)

$$यहां \quad \frac{ताप \cdot कोज्याप}{ताश्रु} = -\frac{क}{(श्रु - अ)^२}$$

$$इस\ लिये\ श्रु^२ \cdot \frac{ताप}{ताश्रु} = -\frac{क \cdot श्रु^२}{कोज्याप\, (श्रु - अ)^२} = नाल$$

वा, $नाल \cdot कोज्याप = -\frac{क \cdot श्रु^२}{(श्रु - अ)^२}$ यदि यहां $श्रु = \infty$ तो श्रु का भाग देने से

$$नाल \cdot कोज्याप = -\frac{क}{\frac{(श्रु - अ)^२}{श्रु^२}} = -\frac{क}{१ - \frac{२अ}{श्रु} + \frac{अ^२}{श्रु^२}} = -क \text{ यह होगा।}$$

(५) $श्रु \cdot कोज्या\, २प = अ$ इस वक्र का असीमपथ जानना है

$$यहां\ -\frac{२ताप \cdot ज्या\, २प}{ताश्रु} = -\frac{अ}{श्रु^२}$$

$$इस\ लिये\ \frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{अ}{२श्रु^२ \cdot ज्या\, २प}$$

$$और\ श्रु^२ \cdot \frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{अ}{२ज्या\, २प} = नाल$$

परन्तु वक्र के समीकरण से यदि $कोज्या\, २प = 0$ तो $श्रु = \infty$ इस लिये $२प = \frac{\pi}{२}$, और $प = \frac{\pi}{४}$ इस का उत्थापन नाल में देने से

$$\text{नाल} = \frac{\text{अ}}{२\,\text{ज्या}\,२\,\text{ष}} = \frac{\text{अ}}{२},$$

अब ष और नाल पर से असीमपथ बना लेओ।

(६) $\text{ष} = \text{ला}\left(\frac{\text{अ} - \text{शु}}{\text{अ} + \text{शु}}\right)$ इस वक्र में असीमपथ को बनाओ?।

यहां $\text{ष} = \text{ला}\left(\frac{\text{अ} - \text{शु}}{\text{अ} + \text{शु}}\right)$ इस लिये यदि $\text{शु} = \text{अ}$ तो $\text{ष} = \text{ला}\ (0) = \infty$ और जब $\text{शु} > \text{अ}$ तो ष का मान असम्भव आता है इस लिये मूलविन्दु केन्द्र से और अ व्यासार्द्ध से जो वृत्त हो गा वही असीमपथ हो गा।

(७) $\text{शु} = \text{अ} \cdot \text{ज्याष}$ इस वक्र में असीमपथ जानना है।

यहां $\frac{\text{शु}}{\text{अ}} = \text{ज्याष}$ इस लिये जब $\text{शु} = \text{अ}$ तब ज्याष परम हो गा और यदि $\text{शु} > \text{अ}$ तो ज्याष का मान असम्भव हो गा इस लिये मूल-विन्दु को केन्द्र मान अ व्यासार्द्ध से जो वृत्त हो गा वही असीमपथ हो गा।

(८) यदि $\text{शु} \cdot \text{ज्याष} = \text{अ}$ ऐसा वक्र का समीकरण हो तो उस का असीमपथ कैसा हो गा?।

यहां पहले $\text{ज्याष} = \frac{\text{अ}}{\text{शु}}$ इस लिये $\frac{\text{ताष}}{\text{ताशु}} = -\frac{\text{अ}}{\text{शु}^{२} \cdot \text{कोज्याष}}$

और $\text{शु}^{२}\frac{\text{ताष}}{\text{ताशु}} = -\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याष}} = \text{नाल}$

परन्तु यदि $\text{ज्याष} = 0$ तो $\text{शु} = \infty$

इस लिये तब $\text{नाल} = -\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याष}} = -\text{अ}$

अर्थात् य अक्ष के ना विन्दु पर अधोमुखी अ तुल्य लम्ब कर वहां से जो य अक्ष के समानान्तररेखा हो वही पहला असीमपथ हो गा।

और जब $\text{ज्याष} = \frac{\text{अ}}{\text{शु}}$ तब स्पष्ट है कि यदि $\text{शु} = \text{अ}$ तो ज्याष

का मान परम हो गा परन्तु यदि श्रु $<$ अ तो ज्याप का मान असम्भव हो गा इस लिये अ व्यासार्द्ध से यहां जो वृत्त हो गा उसे भीतरी वृत्ताकार असीमपथ कहैं गे ।

इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि सब उदाहरणों को करें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $\frac{\text{श्रु}}{२\text{अ}} = \text{ज्या}^{२}\frac{१}{२}\text{प}$ इस में सिद्ध करो कि

$$\text{भ} = \frac{\text{प}}{२},\ \text{ल} = २\text{अ}\cdot\text{ज्या}^{३}\frac{१}{२}\text{प} \text{ और}$$

$$\text{नाल} = २\text{अ}\,\text{ज्या}^{२}\frac{\text{प}}{२}\,\text{स्प}\frac{१}{२}\,\text{प} ।$$

(२) $\text{श्रु} = २\text{अ}\cdot\text{कोज्या}^{२}\frac{१}{२}\text{प}$ इस में उस बिन्दु का मान बतावो जिस की स्पर्शरेखा य अक्ष के समानान्तर हो ।

उत्तर, उस बिन्दु की श्रुति $= \frac{३\text{अ}}{२}$ और $\text{प} = \frac{\pi}{३}$ ।

(३)* यदि $\text{श्रु} = \text{अ}(१ + \text{कोज्याप})$ तो सिद्ध करो कि र बिन्दु, $\text{श्रु} = २\text{अ}\ (\text{कोज्या}\frac{\text{प}}{३})^{३}$ इस वक्र में रहै गा? ।

(४)* यदि $\frac{\text{श्रु}}{\text{अ}} = \text{छे}^{३}\frac{\text{प}}{३}$ तो सिद्ध करो कि र बिन्दु परवलय में हो गा? ।

(५) यदि $\text{श्रु}\ (\text{इ}^{\text{प}} + \text{इ}^{-\text{प}}) = \text{अ}$ तो अधीयअवान्तरस्पर्शरेखा अर्थात् नाल का मान निकालो? ।

उत्तर, $\text{नाल} = -\frac{\text{अ}}{\text{इ}^{\text{प}} - \text{इ}^{-\text{प}}}$ ।

(६) यदि $\text{श्रु}^{२} = \text{अ}^{२}\ \text{छे}\ २\text{प}$ तो $\text{ज्याभ} = \frac{\text{अ}^{२}}{\text{श्रु}^{२}}$ हो गा? ।

(७) $\text{श्रु}^{२}\cdot\text{छे}\ २\text{प} = \text{अ}^{२}$ तो $\text{भ} = २\left(\text{प} + \frac{\pi}{४}\right)$ हो गा? ।

---

* (१२८ प्रक्रम का क्षेत्र देखो)

(८) किसी शङ्कुच्छिन्न वक्र में यदि नाभि मूलविन्दु हो तो सिद्ध करो कि असीमअवान्तरस्पर्शरेखाओं का मूल एक ही सरलरेखा में हो गा और वह रेखा य अक्ष पर लम्ब हो गी।

(९) $\text{श्रु} \cdot \text{ज्याब} = \text{अ} \cdot \text{ष}$ इस वक्र का असीमपथ बतावो?।

उत्तर, $\text{नाल} = (-1)^{\text{न}-1} \text{नअ} \pi$।

(१०) $\text{श्रु} = \text{अ} \cdot \text{कोज्या} \dfrac{\text{ष}}{3}$ इस वक्र का असीमपथ बतावो।

उत्तर, बाहरी वृत्ताकार असीमपथ हो गा जिस का व्यासार्द्ध $= \text{अ}$।

(११) $\text{ष} = \text{ला} \left(\dfrac{\text{श्रु} - \text{अ}}{\text{श्रु} + \text{अ}} \right)$ इस का असीमपथ बतावो।

उत्तर, भीतरी वृत्ताकार असीमपथ हो गा जिस का व्यासार्द्ध $= \text{अ}$।

(१२) $\text{श्रु} = \dfrac{\text{म}}{1 + \text{इ} \cdot \text{कोज्याष}}$ इस में नार अर्थात् (ल) का मान बतावो।

उत्तर, $\text{ल}^2 = \dfrac{\text{म}^2 \cdot \text{श्रु}}{2\text{म} - \text{श्रु}(1 - \text{इ}^2)}$।

(१३) यदि $\text{ष} = \dfrac{\text{अ}^{\text{न}}}{\text{श्रु}^{\text{न}}}$ और $\text{न} \cdot \text{अ}^{\text{न}} = \text{क}$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{नार}^2 = \text{ल}^2 = \frac{\text{क}^{2\text{न}} \cdot \text{श्रु}^2}{\text{क}^{2\text{न}} + \text{श्रु}^{2\text{न}}}\text{।}$$

(१४) $\text{ष} \cdot \text{श्रु} = \text{अ}$, इस के असीमपथ में नाल का मान बतावो।

(१५) $\text{ह}^2 = \dfrac{1}{\text{अ}^2 \text{कोज्या} 2\text{ष}}$ इस में (ल) का मान बतावो।

उत्तर, $\text{ल} = \dfrac{\text{श्रु}^3}{\text{अ}^2}$।

(१६) $\text{श्रु} = \text{अ}^{\text{ष}}$ इस में (भ) का मान बतावो।

उत्तर, $\text{स्पभ} = \dfrac{1}{\text{ला}(\text{अ})}$।

(१७) $\text{श्रु} = \text{अ} \cdot \text{छेनष}$ इस में (ल) का मान बतावो।

उत्तर, $\text{ल} = \dfrac{\text{अ} \cdot \text{श्रु}}{\sqrt{\text{न}^2 \text{श्रु}^2 - (\text{न}^2 - 1)\text{अ}^2}}$।

(१८) $श्रु = अ\left(इ^{क+प} + इ^{क-प}\right)$ इस में (ल) का मान बतावो।

$$\text{उत्तर, } ल = \frac{श्रु^{२}}{\sqrt{२श्रु^{२} - ४अइ^{२क}}} \text{ ।}$$

(१९) $श्रु = अ(१ + \text{कोज्याप})$ इस में ल का मान बतावो।

$$\text{उत्तर, } ल^{२} = \frac{श्रु^{३}}{२अ} \text{ ।}$$

(२०) दीर्घवृत्त के केन्द्र से परिधि के किसी विन्दु तक जो रेखा है वह "श्रु" के तुल्य है और उस विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर केन्द्र से पड़े लम्ब का मान "ल" है तो सिद्ध करो कि

$$ल^{२} = \frac{अ^{२} \cdot क^{२}}{अ^{२} + क^{२} - श्रु^{२}}$$

यहां "अ" बृहद्व्यासार्द्ध और "क" लघु-व्यासार्द्ध है।

(२१) बहुत से चींटे पङ्क्ति लगा कर एक वक्ररेखा में खड़े थे और बहुत सी चींटियां एक ही स्थान में अपने अपने मुंह में मीठा लिये बैठी थीं। एक चींटा अपने मीठे को जिसे पहले ही से अपने मुंह में लिये था अपने स्थान में रख एक चींटी के मीठे को लेने के लिये ठीक उस के सामने चला तब उस चींटी ने जिस दिशा से चींटा आता था उस दिशा के ठीक लम्ब दिशा में दश हाथ भाग फिर उसी चींटे के स्थान में हो कर उस चींटे का भी मीठा ले दूसरे जगह चली गई और किसी चींटे से भेंट तक भी न हुई। इसी प्रकार प्रत्येक चींटे प्रत्येक चींटियों के ओर चले और प्रत्येक चींटियां दश दश हाथ चींटे के दिशा की लम्ब दिशा में भाग भाग फिर प्रत्येक चींटे के स्थान में हो प्रत्येक का मीठा ले ले चली गईं परन्तु किसी चींटे से मीठा लेने के समय राह में न भेंट हुई तो बतावो सब चींटे किस वक्र में पङ्क्ति लगा कर खड़े थे?। उत्तर, उस वक्र में जिस का मूलविन्दु चींटियों का स्थान और समीकरण $प \cdot श्रु = १०$ यह है।

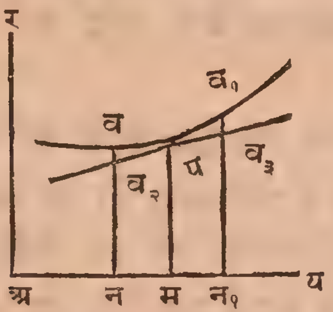
इति चतुर्दशाध्याय।

पञ्चदशाध्याय १५ ।

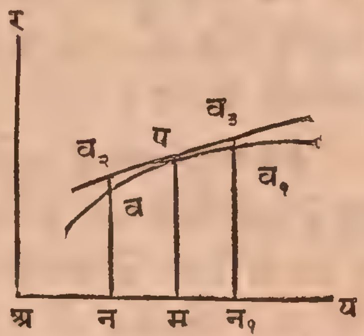
उन्नतत्व, नतत्व, और एक विशेषविन्दु के विषय में ।

१३८ । परिभाषा, यदि किसी वक्र की कोटि, स्पर्शरेखा की कोटि से ज्यों ज्यों भुज बढ़े वा घटे त्यों त्यों बढ़ती जाय तो य अक्ष के वश से उस वक्र को "उन्नतोदर" कहते हैं । और यदि वक्र की कोटि स्पर्शरेखा की कोटि से चाहे भुज बढ़े वा घटे घटती जाय तो उसे य अक्ष के वश से "नतोदर" कहते हैं ।

(१)



(२)



जैसे पहले क्षेत्र में वक्र के किसी विन्दु की स्पर्शरेखा $व_2 प व_3$ कल्पना करो तो स्पष्ट है कि अम भुज को बढ़ा के $अन_1$ भुज वा घटा के अन भुज मानो दोनों में वक्र की $व_1 न_1$ वा वन कोटि, स्पर्शरेखा की $व_3 न_1$ वा $व_2 न$ कोटि से बड़ी ही है इस लिये $वपव_1$ वक्र परिभाषा से "उन्नतोदर" हुआ । इसी प्रकार दूसरे क्षेत्र में स्पर्शरेखा की $व_3 न_1$ और $व_2 न$ कोटि से वक्र की $व_1 न_1$ और वन कोटि अल्प है इस लिये इसे "नतोदर" कहना चाहिये ।

१३९ । कल्पना करो कि किसी वक्र का र = फ (य) यह समीकरण है तो इस के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो गी उस का ११९ वें प्रक्रम से,

$र_1 - र = फ'(य)(य_1 - य)$ यह समीकरण हो गा इस में कल्पना करो कि $य_1 = य + च$ तो स्पर्शरेखा की कोटि $र_1 = र + च \cdot फ'(य)$

और य + च भुज में २३ वें प्रक्रम से वक्र की कोटि

$$र' = र + च \cdot फ'(य) + \frac{च^2}{२} फ''(य + षच)$$

$$\text{इस लिये } र' - र_1 = \frac{च^2}{२} \cdot फ''(य + पच)$$

यहां स्पष्ट है कि च को अल्प मानने से फ''(य + पच) इस का धनत्व वा ऋणत्व फ''(य) इस के आधीन हो गा इस लिये यदि फ''(य) धन तो कोट्यन्तर भी धन हो गा और तब स्पर्शरेखा की कोटि से वक्र की कोटि बड़ी हो गी इस लिये वक्र उन्नतोदर हो गा और यदि फ''(य) ऋण तो स्पर्शरेखा की कोटि से वक्र की कोटि अल्प हो गी इस लिये तब वह वक्र नतोदर हो गा। परन्तु यदि कोटि ऋण अर्थात् वक्र य अक्ष के नीचे हो तो स्पष्ट है कि पहली स्थिति अब उलट जाय गी अर्थात् यदि फ''(य) ऋण तो उन्नतोदर और यदि फ''(य) धन तो नतोदर हो गा।

१४०। जब र धन तब फ''(य) के धन मान में उन्नतोदर होता है इस लिये वहां र·फ''(य) यह धनात्मक हो गा और जब र ऋण तब फ''(य) के ऋण मान में उन्नतोदर हो गा इस लिये वहां भी र·फ''(य) धनात्मक ही हो गा। इस पर से यह सिद्ध कर सकते हो कि यदि र·फ''(य) धन हो तो य अक्ष के वश से वक्र उन्नतोदर हो गा। इसी प्रकार यह भी सिद्ध कर सकते हो कि यदि र·फ''(य) ऋण हो तो वक्र य अक्ष के वश से नतोदर हो गा।

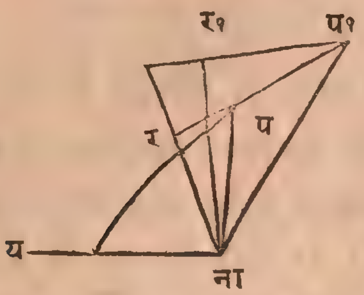
यदि र अक्ष के वश से उन्नतोदर वा नतोदर का ज्ञान करना हो तो स्पष्ट है कि भुज को कोटि और कोटि को भुज मानने से ठीक पूर्वोक्त क्रिया के ऐसी युक्ति उत्पन्न हो जाय गी अर्थात् यदि $य \cdot \frac{ता^2 य}{तार^2}$ धन तो उन्नतोदर और यदि $य \cdot \frac{ता^2 य}{तार^2}$ ऋण तो नतोदर हो गा।

१४१। यदि वक्र का अक्षीयसमीकरण दिया हो तो ध्रुवविन्दु के वश से वक्र नतोदर वा उन्नतोदर है इस का ज्ञान वक्र के स्पर्शरेखा पर ध्रुवविन्दु से लम्ब डालने से और श्रुति के बढ़ने घटने से लम्ब का भी बढ़ना घटना जानने से हो जाय गा।

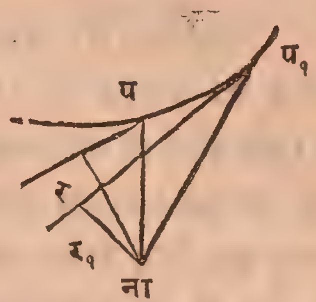
नीचे का पहला क्षेत्र नतोदर और दूसरा उन्नतोदर है और उन से स्पष्ट है कि यदि लम्ब (श्रु) के घटने बढ़ने से घटै बढ़ै अर्थात्

$\frac{\text{तालं}}{\text{ताभु}}$ यदि धन तो नतोदर और यदि लम्ब (भु) के घटने बढ़ने से बढ़े घटै अर्थात् $\frac{\text{तालं}}{\text{ताभु}}$ यह ऋण हो तो उन्नतोदर हो गा ।

(१)



(२)



यहां प और $प_1$ विन्दु कल्पना करो कि बहुत पास हैं तो पहले क्षेत्र में पर स्पर्शरेखा पर जो नार लम्ब है उस से $प_1र_1$ स्पर्शरेखा पर का $नार_1$ लम्ब बड़ा है इस लिये पहला क्षेत्र ना ध्रुवविन्दु के वश से नतोदर हुआ । इसी प्रकार दूसरा उन्नतोदर सिद्ध हो गा ।

विशेषविन्दु ।

१४२ । विशेषविन्दु से, सन्धि, स्वस्तिक, स्कन्ध, लक्ष, विश्राम, और शुष्क, इतने विन्दु ओं को समझना चाहिये,

सन्धि ।

१४३ । सन्धि उस विन्दु को कहते हैं जिस विन्दु की स्पर्शरेखा वक्र को उसी विन्दु पर काटै ।

इस सन्धिस्थान को जानने के लिये कल्पना करो कि वक्र का $र = फ(य)$ यह समीकरण है और कल्पना करो कि जब भुज अर्थात् य बढ़ के $य + च$ हुआ तब कोटि अर्थात् र का मान $र'$ हुआ ।

इस लिये एक ही भुज में स्पर्शरेखा और वक्र के कोटियों का १३९ वें प्रक्रम से अन्तर $र' - र_1 = \frac{1}{2}च^2 \cdot फ''(य + थच)$

यहां यदि $फ''(य)$ इस का मान शून्य न हो तो स्पष्ट है कि च को अल्प मानने से $र' - र_1$ का धनत्व वा ऋणत्व $फ''(य)$ इस के धनत्व वा ऋणत्व के अनुसार हो गा । इस लिये जब कोट्यन्तर का कुछ संख्यात्मक धन वा ऋण मान हुआ तब अवश्य दोनों कोटियों में भेद हो गा ऐसी स्थिति में वक्र को स्पर्शरेखा न काटै गी । इस लिये

यदि वक्र में सन्धिस्थान हो गा तो अवश्य वहां $फ''(य) = 0$ । कल्पना करो कि $फ''(य)$ शून्य के समान हुआ तब कोट्यन्तर

$$र' - र_1 = \frac{च^3}{\lfloor 3} फ'''(य + प_1 च) \text{ यह हुआ ।}$$

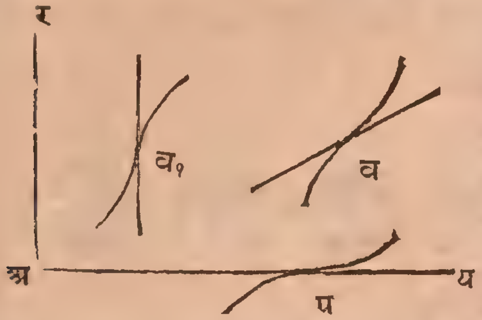
यहां पर भी च को अल्प मानने से $फ'''(य + प_1 च)$ इस का धनत्व वा ऋणत्व $फ'''(य)$ इस के धनत्व वा ऋणत्व के अनुसार हो गा । इस लिये च को धन मानने से जो धनात्मक वा ऋणात्मक कोट्यन्तर का मान हो गा उस का उलटा मान च को ऋण मानने से हो गा परन्तु जब कोई मान धन से ऋण हो वा ऋण से धन हो तो स्पष्ट है कि बीच में उस का अभाव होता है (२३ वां प्रक्रम देखो) इस लिये ऐसी दशा में अर्थात् जब $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ यह शून्य के समान हो तब अवश्य वक्र को उसी विन्दु पर स्पर्शरेखा काटे गी क्यों कि वहां पर कोट्यन्तर शून्य, और उस के आगे पीछे विजातीय हो गा ।

परन्तु यदि $फ'''(य)$ यह भी शून्य हो तो ऊपर ही की युक्ति से यह सिद्ध कर सकते हो कि यदि $फ''''(य)$ यह शून्य न हो तो सन्धिस्थान न हो गा ।

इस लिये यदि र का द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ आदि तात्कालिक-सम्बन्ध शून्य के समान होता जाय अन्त्य में कोई विषम तात्कालिक-सम्बन्ध संख्यात्मक हो तो उस वक्र में अवश्य सन्धिस्थान हो गा ।

१४४ । देखो $\frac{तार}{ताय}$ यह उस कोण की स्पर्शरेखा है जो कि वक्र की स्पर्शरेखा और य अक्ष से उत्पन्न होता है और $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ यह $\frac{तार}{ताय}$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध है और जब $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ यह शून्य होता है तब सन्धिस्थान होता है इस लिये इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि जहां $\frac{तार}{ताय}$ वा "ब" का महत्तम वा न्यूनतम मान हो गा वही सन्धिस्थान है ।

सन्धिस्थान में कोट्यन्तर शून्य और उस के आगे वा पीछे धन वा ऋण वा ऋण वा धन होता है इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि जहां वक्र का नतत्व से उन्नतत्व वा उन्नतत्व से नतत्व होता है वही स्थान सन्धिस्थान है परन्तु यदि य अक्षरेखा ही स्पर्शरेखा हो तो अक्ष से नीचे ऊपर दोनों ओर वक्र रहै गा इस लिये ऐसी स्थिति में वक्र में एक ही धर्म रहै गा ।



जैसा इस क्षेत्र में व विन्दु पर वक्र में नतत्व से उन्नतत्व होता है $व_1$ विन्दु पर उन्नतत्व से नतत्व और प विन्दु पर उन्नतत्व ही है ।

यदि $ब_1$ विन्दु की स्पर्शरेखा अर अक्ष के समानान्तर हो तो स्पष्ट है कि $\frac{तार}{ताय} = \infty$ इस लिये तब $\frac{ता^2र}{ताय^2} = \infty$ इस लिये ऐसी स्थिति में भी सन्धि-स्थान होता है उस स्थल में यदि यह जानना हो कि वक्र में स्पर्शरेखा से किस भाग में नतत्व वा उन्नतत्व है तो जिस य के मान में $\frac{ता^2र}{ताय^2}$ इस का मान अनन्त के तुल्य होता है उस मान से य को किंचित् घटा वा बढ़ा कर $\frac{ता^2र}{ताय^2}$ इस का मान ले आने से फिर उस पर से कोट्य-न्तर का धनत्व वा ऋणत्व जानने से वक्र का धर्म शीघ्र स्पष्ट हो जाय गा।

१४५ । १४१ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि यदि $\frac{तालं}{ताश्रु}$ धन तो न-तोदर और यदि $\frac{तालं}{ताश्रु}$ ऋण तो उन्नतोदर इस लिये सन्धिस्थान में अवश्य $\frac{तालं}{ताश्रु}$ यह शून्य के समान हो गा ।

इस लिये जब $\frac{1}{लं^2} = ह^2 + \left(\frac{ताह}{ताप}\right)^2$ १३१ वें प्रक्रम से

$$\text{तब} \; -\frac{२\,\text{लं}\cdot\dfrac{\text{तालं}}{\text{ताय}}}{\text{लं}^{४}} = २\,\text{ह}\cdot\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + २\cdot\frac{\text{ता}^{२}\text{ह}}{\text{ताय}^{२}}\cdot\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$\text{इस लिये,} \; -\frac{\dfrac{\text{तालं}}{\text{ताय}}}{\text{लं}^{३}} = \left(\text{ह}+\frac{\text{ता}^{२}\text{ह}}{\text{ताय}^{२}}\right)\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$\text{वा} \; \frac{\text{तालं}}{\text{ताह}} = -\text{लं}^{३}\left(\text{ह}+\frac{\text{ता}^{२}\text{ह}}{\text{ताय}^{२}}\right)$$

$$\text{परन्तु,} \; \frac{\text{तालं}}{\text{ताश्रु}} = \frac{\text{तालं}}{\text{ताह}}\cdot\frac{\text{ताह}}{\text{ताश्रु}} = -\frac{१}{\text{श्रु}^{२}}\cdot\frac{\text{तालं}}{\text{ताह}} = \frac{\text{लं}^{३}}{\text{श्रु}^{२}}\left(\text{ह}+\frac{\text{ता}^{२}\text{ह}}{\text{ताय}^{२}}\right)$$

इस लिये सन्धिस्थान में $\text{ह}+\frac{\text{ता}^{२}\text{ह}}{\text{ताय}^{२}}$ यह अवश्य अपने धनत्व वा ऋणत्व को बदलै गा अर्थात् शून्य हो गा ।

स्वस्तिक ।

१४६ । परिभाषा । वक्र के अनेक शाखाओं का जहां पर योग होता है उस विन्दु को स्वस्तिक कहते हैं ।

कल्पना करो कि वक्र का फ (य, र) = 0 ऐसा समीकरण है जिस में करणी नहीं है तो ११९ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण की युक्ति से

$$\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)+\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

यहां स = 0 ।

देखो कि जब वक्र की कई शाखा एक ही विन्दु पर मिलती हैं तब सम्भव है कि उसी विन्दु पर भिन्न भिन्न शाखाओं की स्पर्शरेखायें भिन्न भिन्न हों इस लिये ऐसी स्थिति में अवश्य $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इस का एक मान से अधिक मान आवे गा क्यों कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ उस कोण की स्पर्शरेखा

है जिसे स्पर्शरेखा य अक्ष से बनाती है इस लिये $\frac{तार}{ताय}$ इस का मान जब कई हों गे तभीं स्पर्शरेखा भी भिन्न भिन्न हो गी।

परन्तु य और र के निर्दिष्ट मान में $\left(\frac{तास}{ताय}\right)$ और $\left(\frac{तास}{तार}\right)$ का मान तो एक ही आवे गा * इस लिये तब $\frac{तार}{ताय}$ का मान भी अर्थात् $-\frac{\left(\frac{तास}{ताय}\right)}{\left(\frac{तास}{तार}\right)}$ इस का मान भी एक ही आवे गा इस लिये यदि $\left(\frac{तास}{ताय}\right)$ और $\left(\frac{तास}{तार}\right)$ का मान शून्य हो तो उस समय में $\frac{तार}{ताय} = \frac{0}{0}$ ऐसा हो गा ऐसी स्थिति में (१) समीकरण में $\left(\frac{तास}{ताय}\right) = \frac{ताफ}{ताय}$ और $\left(\frac{तास}{तार}\right) = \frac{ताफ}{तार}$ कल्पना करने से $\frac{ताफ}{ताय} + \frac{तार}{ताय} \cdot \frac{ताफ}{तार} = 0 = स_1$

इस लिये (१) समीकरण जैसे बना है उसी युक्ति से

$$\left(\frac{तास_1}{ताय}\right) + \frac{तार}{ताय}\left(\frac{तास_1}{तार}\right) = 0 \text{ ऐसा हो गा}$$

$$\text{परन्तु } स_1 = \frac{तास}{ताय} = \frac{ताफ}{ताय} + \frac{तार}{ताय} \cdot \frac{ताफ}{तार}$$

$$\text{इस लिये } \left(\frac{तास_1}{ताय}\right) = \frac{ता^2फ}{ताय^2} + \frac{तार}{ताय} \cdot \frac{ता^2फ}{तारताय}$$

$$\text{और } \left(\frac{तास_1}{तार}\right) = \frac{ता^2फ}{तायतार} + \frac{ता^2र}{तायतार} \cdot \frac{ताफ}{तार} + \frac{तार}{ताय} \frac{ता^2फ}{तार^2}$$

---

* यहां समझना चाहिये कि $\left(\frac{तास}{ताय}\right)$ और $\left(\frac{तास}{तार}\right)$ के मान में य और र के अभिन्न घात हैं क्योंकि फ (य, र) इस में करणी नहीं है।

इस लिये $\left(\frac{\text{तास}_1}{\text{ताय}}\right)+\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{तास}_1}{\text{तार}}\right)=0$

$$=\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2}+\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तार}\cdot\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तार}^2}\cdot\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}$$

$$+\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}\cdot\text{तार}}+\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\cdot\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}$$

$$=\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\cdot\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}+\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2}+2\,\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}\cdot\text{तार}}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तार}^2}\cdot\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}$$

परन्तु $\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}=0$ इस लिये $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2}+2\,\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}\cdot\text{तार}}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$

$$+\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तार}^2}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

इस वर्गसमीकरण पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का दो प्रकार का मान आवै गा इस लिये यदि $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}=0$, $\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}=0$ हो तो दूसरे समीकरण पर से जो द्विविध मान $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का आता है उस से स्पष्ट जान पड़ता है कि वक्र के दो शाखाओं का एक ही विन्दु पर संयोग हुआ है। इस संयोगविन्दु को सम्पातविन्दु कहते हैं।

यदि दूसरे समीकरण में $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2}$, $2\,\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तायतार}}$ और $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2}$ ये सब पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य हों तो फिर भी $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इस का मान लुप्त हुआ। इस लिये तब (२) समीकरण को स$_2$ के समान मान ठीक ऊपर की युक्ति से और शून्यगुणकसम्बन्धि पदों को उड़ा देने से

$$\frac{\text{ता}^3\text{फ}}{\text{ताय}^3}+3\,\frac{\text{ता}^3\text{फ}}{\text{ताय}^2\text{तार}}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+3\,\frac{\text{ता}^3\text{फ}}{\text{तायतार}^2}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2$$

$$+\frac{\text{ता}^3\text{फ}}{\text{तार}^3}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^3=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

ऐसा घनसमीकरण हो गा अब इस घनसमीकरण पर से $\frac{तार}{ताय}$ का तीन प्रकार का मान आवे गा तब इस पर से जान पड़े गा कि वक्र की तीन शाखा एक ही विन्दु पर मिलती हैं। यदि यहां भी गुणकों के शून्य हो जाने से $\frac{तार}{ताय}$ का मान लुप्त हो तो ऊपर ही की युक्ति से चतुर्घातसमीकरण एक ऐसा बने गा जिस पर से $\frac{तार}{ताय}$ का चार मान आवे गा तब यह जान पड़े गा कि वक्र की चार शाखा एक ही विन्दु पर मिलती हैं।

यदि $\frac{तार}{ताय}$ का जो द्विविध, त्रिविध वा चतुर्विध मान सिद्ध होते हैं यदि वे तुल्य हों तो उस विन्दु पर प्रत्येक शाखाओं में एक ही स्पर्श-रेखा हो गी इस लिये ऐसी स्थिति में शाखायें परस्पर स्पर्शमात्र करें गी आपस में कटें गी नहीं।

स्कन्ध ।

१४७। स्कन्ध उस वन्दु को कहते है जहां पर वक्र की दो शाखा परस्पर स्पर्श कर, समाप्त हो जायं और दोनों शाखाओं में उस विन्दु पर एक हो स्पर्शरेखा हो।

यदि स्पर्शरेखा के एक ओर एक शाखा दूसरे ओर दूसरी शाखा हो तो उस विन्दु को प्रथम प्रकार का स्कन्ध कहते हैं और यदि स्पर्श-रेखा के एक ही ओर दोनों शाखा हों तो उस विन्दु को दूसरे प्रकार का स्कन्ध कहते हैं।

लक्षण से स्पष्ट जान पड़ता है कि स्कन्ध भी एक प्रकार का स्वस्तिक ही है इस लिये यहां भी अवश्य $\frac{ताफ}{ताय} = 0$ और $\frac{ताफ}{तार} = 0$ ऐसा हो गा फिर इस पर से जो य और र के मान निकलें गे उन पर से और वक्र के समीकरण से शीघ्र ज्ञान हो जाय गा कि उसी जगह शाखाओं की समाप्ति है वा नहीं। और यदि वक्र का र = फ (य) ऐसा समीकरण

हो तो भी $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ और य, र के मान से स्कन्ध को जान सकते हो ।

१४८ । लग्न उस विन्दु को कहते हैं जहां पर वक्र की दो शाखा मिल कर समाप्त हो जांय और दोनों शाखाओं में उस विन्दु पर भिन्न भिन्न स्पर्शरेखा हों ।

यह भी यदि विचारो तो एक प्रकार का स्वस्तिक ही है इस लिये यहां भी $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}}=0$, $\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}}=0$ ऐसा हो गा फिर इन पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का दो मान आवे गा और य और र भी विदित हो जायं गे तब इसी य और र के मान में दोनों शाखाओं की समाप्ति होती है वा नहीं इस का भी ज्ञान वक्र के समीकरण पर से हो जाय गा ।

विश्राम ।

१४९ । विश्राम उस विन्दु को कहते हैं जहां वक्र के एक शाखा की समाप्ति हो जाय ।

इस का ज्ञान तो वक्र के समीकरण को देखने ही से हो जाय गा ।

शुष्क ।

१५० । वक्र के विन्दुरूप शाखा को शुष्क कहते हैं ।

इस स्थान को भी बुद्धिमान् वक्र के समीकरण ही पर से निकाल सकता है ।

१५१ । यदि किसी वक्र का ऐसा समीकरण हो कि उस के वश से अनेक शुष्क स्थान हों तो सब शुष्क स्थानों में गए हुए वक्र को शुष्कसमुदाय कहते हैं ।

१५२ । इस प्रक्रम में पूर्व प्रकारों की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण कर के दिखलाते हैं ।

उदाहरण ।

(१) $\text{अ}^2 \cdot \text{र} = \text{य}^3$ इस वक्र को जानना है कि नतोदर है वा उन्नतोदर ।

यहां $\text{र}=\frac{\text{य}^3}{\text{अ}^2}, \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{३\,\text{य}^2}{\text{अ}^2}, \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}=\frac{६\,\text{य}}{\text{अ}^2}$

इस लिये $र \cdot \frac{ता^2 र}{ताय^2} = \frac{य^3}{अ^2} \cdot \frac{६ य}{अ^2} = \frac{६ य^4}{अ^4}$

देखो यहां चाहे य धन हो वा ऋण हो परन्तु $\frac{६ य^4}{अ^4}$ यह सर्वदा धन ही होता है इस लिये १४० वें प्रक्रम से वक्र सर्वदा य अक्ष के वश से उन्नतोदर ही हुआ।

(२) $श्रु = प^न$ इस में सिद्ध करना है कि ध्रुवविन्दु के वश से वक्र उन्नतोदर है वा नतोदर।

$$यहां \frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{१}{न \cdot प^{न-१}} = \frac{प}{न \cdot श्रु} = \frac{श्रु^{\frac{१}{न}}}{न \cdot श्रु}$$

परन्तु $\frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{लं}{श्रु\sqrt{श्रु^2 - लं^2}}$ १३९ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से

$$इस लिये \frac{लं}{श्रु\sqrt{श्रु^2 - लं^2}} = \frac{श्रु^{\frac{१}{न}}}{न \cdot श्रु} \therefore \frac{लं}{\sqrt{श्रु^2 - लं^2}} = \frac{श्रु^{\frac{१}{न}}}{न}$$

वर्ग कर एक में भाग दे कर एक जोड़ देने से $\frac{श्रु^2}{लं^2} = \frac{श्रु^{\frac{2}{न}} + न^2}{श्रु^{\frac{2}{न}}}$

$$इस लिये लं = \frac{श्रु^{\frac{न+१}{न}}}{\sqrt{श्रु^{\frac{2}{न}} + न^2}}$$

$$और \frac{तालं}{ताश्रु}\sqrt{श्रु^{\frac{2}{न}} + न^2} = \frac{न+१}{न} \cdot श्रु^{\frac{१}{न}} - \frac{श्रु^{\frac{3}{2न}}}{न(श्रु^{\frac{2}{न}} + न^2)}$$

$$= श्रु^{\frac{2}{न}}\left(\frac{न+१}{न श्रु^{\frac{१}{न}}} - \frac{१}{न \cdot श्रु^{\frac{१}{2न}}(श्रु^{\frac{2}{न}} + न^2)}\right)$$

इस लिये यदि न अभिन्न और धन संख्या हो तो सर्वदा $\frac{\text{तालं}}{\text{ताअ}}$ यह धन ही रहै गा इस लिये यह १४१ प्रक्रम से नतोदर हो गा ।

(२) यर $=$ अ$^2 \cdot$ ला $\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)$ इस में सन्धिस्थान का विचार करना चाहिये ।

$$\text{यहां } \text{र} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{य} = \text{अ}^2 \cdot \frac{१}{\text{अ}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}} = \frac{\text{अ}^2}{\text{य}} \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{इस लिये, } \text{यर} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{य}^2 = \text{अ}^2$$

$$\text{र} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{य} + \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \text{य}^2 + २\text{य} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (२)$$

$$\text{परन्तु (१) से } \text{र} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{य} = \frac{\text{अ}^2}{\text{य}} \text{ और } २\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{य} = \frac{२(\text{अ}^2 - \text{यर})}{\text{य}}$$

इन का उत्थापन दूसरे में देने से

$$\frac{\text{अ}^2}{\text{य}} + \frac{२\text{अ}^2 - २\text{यर}}{\text{य}} + \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \text{य}^2 = 0$$

$$\text{परन्तु १४३ वें प्रक्रम से सन्धिस्थान में } \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = 0$$

$$\text{इस लिये, } \text{अ}^2 + २\text{अ}^2 - २\text{अ}^2 \cdot \text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right) = 0$$

$$\text{वा } १ + २ - २\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right) = 0 \quad \therefore \frac{३}{२} = \text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right) \text{ और } \frac{\text{य}}{\text{अ}} = \text{इ}^{\frac{३}{२}}$$

तब य $=$ अ $\cdot$ इ$^{\frac{३}{२}}$ इस लिये जब य $=$ अ $\cdot$ इ$^{\frac{३}{२}}$ तब सन्धिस्थान हो गा ।

$$\text{वा जब } \text{यर} = \text{अ}^2 \cdot \text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right) \text{ इस लिये } \text{र} = \frac{\text{अ}^2 \cdot \text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)}{\text{य}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{अ}^2 - \text{अ}^2 \cdot \text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)}{\text{य}^2}$$

$$\text{और } \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \frac{-\text{अ}^2\text{य} - २\text{य}\left\{\text{अ}^2 - \text{अ}^2 \cdot \text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}}{\text{य}^4} = 0$$

इस लिये, $\text{अ}^2\text{य}$ का अपवर्तन दे कर समशोधन करने से

$३ = २\,\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)$ वा $\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \text{इ}^{\frac{३}{२}}$ $\therefore$ $\text{य} = \text{अ} \cdot \text{इ}^{\frac{३}{२}}$ ।

(३) $\text{श्रु} = \frac{\text{अ} \cdot \text{ष}^2}{\text{ष}^2 - १}$ इस में सन्धिस्थान का विचार करना चाहिये ।

यहां $\frac{१}{\text{श्रु}} = \text{ह} = \frac{\text{ष}^2 - १}{\text{अ} \cdot \text{ष}^2}$

और $\frac{\text{ताह}}{\text{ताष}} = \frac{२\,\text{अष}^3 - २\,\text{अष}^3 + २\,\text{अष}}{\text{अ}^2 \cdot \text{ष}^4} = \frac{२}{\text{अ} \cdot \text{ष}^3}$

$\frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताष}^2} = \frac{-६\,\text{अ} \cdot \text{ष}^2}{\text{अ}^2\text{ष}^6} = -\frac{६}{\text{अ} \cdot \text{ष}^4}$ इस लिये १४५ वें प्रक्रम से

$\text{ह} + \frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताष}^2} = \frac{\text{ष}^2 - १}{\text{अ} \cdot \text{ष}^2} - \frac{६}{\text{अ} \cdot \text{ष}^4} = \frac{\text{ष}^4 - \text{ष}^2 - ६}{\text{अ} \cdot \text{ष}^4} = 0$

वा $\text{ष}^4 - \text{ष}^2 = ६$ वर्गसमीकरण पर से $\text{ष}^2 = ३$ इस का उत्थापन श्रु में देने से $\text{श्रु} = \frac{\text{अ} \cdot \text{ष}^2}{\text{ष}^2 - १} = \frac{३\,\text{अ}}{२}$ यही उत्तर हुआ ।

(४) $\text{र}^3 - ३\,\text{अयर} + \text{य}^3 = 0$ यह समीकरण जिस वक्र का है उस में स्वस्तिकस्थान बतावो? ।

यहां मानो कि $\text{र}^3 - ३\,\text{अयर} + \text{य}^3 = 0 = \text{फ}$

तब १४६ वें प्रक्रम के (१) समीकरण का रूप जानने के लिये

$$\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right) = \frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}} = ३\,\text{य}^2 - ३\,\text{अर}$$

$$\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right) = \frac{\text{ताफ}}{\text{तार}} = ३\,\text{र}^2 - ३\,\text{अय}$$

$$\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right) + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right) = 0$$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right)}{\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}\right)} = \frac{३\,\text{अर} - ३\,\text{य}^2}{३\,\text{र}^2 - ३\,\text{अय}} = \frac{\text{अर} - \text{य}^2}{\text{र}^2 - \text{अय}}$ यह

जब तक $\frac{0}{0}$ ऐसा न हो गा तब तक $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इस का कई मान न आवे गा।

इस लिये $\text{अर} - \text{य}^2 = 0$ । $\text{र}^2 - \text{अय} = 0$

और $\frac{\text{य}^2}{\text{र}} = \text{अ} = \frac{\text{र}^2}{\text{य}}$ $\therefore$ $\text{य}^3 = \text{र}^3$ वा $\text{य} = \text{र}$, परन्तु $\text{अर} - \text{य}^2 = 0$ इस लिय इस में र के स्थान में य का उत्थापन देने से $\text{अय} - \text{य}^2 = 0$

$\therefore$ $\text{य} = 0 = \text{र}$ इस पर से यह सिद्ध हुआ कि यदि स्वस्तिक-स्थान है तो मूलविन्दु ही है

अब यह सिद्ध करते हैं कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इस का के मान आता है ।

यहां पहले सिद्ध हो चुका है कि $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}} = ३\text{य}^2 - ३\text{अर}$,

$\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}} = ३\text{र}^2 - ३\text{अय}$ इस लिये $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2} = ६\text{य}$, $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तायतार}} = -३\text{अ}$

और $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तार}^2} = ६\text{र}$

इन का उत्थापन १४६ वें प्रक्रम के (२) समीकरण में देने से

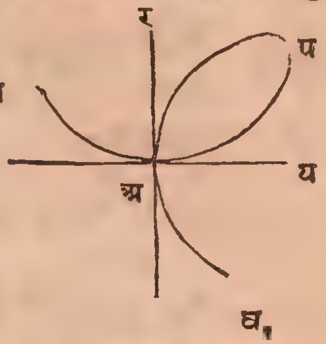
$$६\text{य} - ६\text{अ} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + ६\text{र}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 = 0$$

$$\text{वा,}\quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\text{र}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{अ}\right) = 0 \text{ क्यों कि } \text{य} = 0$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \text{ वा } \text{र} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{अ} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{अ}}{0}$$

क्यों कि $\text{र} = 0$ अर्थात् $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का एक मान शून्य और दूसरा अनन्त हुआ इस लिये मूलविन्दु पर वक्र की दो शाखा मिलती हैं जिन की स्पर्श-रेखा क्रम से दोनों अक्ष हैं ।

यदि वक्र के दिये हुए समीकरण पर से वक्र की आकृति बनावो तो ठीक नीचे लिखा हुआ वक्र उत्पन्न हो गा । इस वक्र में अ मूलविन्दु अय, य अक्ष और अर, र अक्ष है । और यहां वअप शाखा की स्पर्शरेखा अय रेखा और पअव$_1$ शाखा की स्पर्शरेखा अर रेखा है और दोनों शाखा अ विन्दु पर मिलती हैं इस लिये अ को सम्पातविन्दु कहना चाहिये ।



(५) $य^4 - अरय^2 + कर^3 = 0$ इस वक्र में स्वस्तिक का निर्णय करना है ।

यहां भी (४) उदाहरण के ऐसा

$$\frac{ताफ}{ताय} = 4 य^3 - 2 अरय$$
$$\frac{ताफ}{तार} = 3 कर^2 - अय^2$$
$$\frac{ता^2फ}{ताय^2} = 12 य^2 - 2 अर$$
$$\frac{ता^2फ}{तायतार} = -2 अय$$
$$\frac{ता^2फ}{तार^2} = 6 कर$$
$$\frac{ता^3फ}{ताय^3} = 24 य$$
$$\frac{ता^3फ}{ताय^2 तार} = -2 अ$$
$$\frac{ता^3फ}{ताय \cdot तार^2} = 0$$
$$\frac{ता^3फ}{तार^3} = 6 क$$

यहां स्वस्तिक जानने के लिये पहले १४६ वें प्रक्रम से

$$\frac{ताफ}{ताय} = 4 य^3 - 2 अरय = 0 \therefore य = 0$$
$$\frac{ताफ}{तार} = 3 कर^2 - अय^2 = 0 \therefore र = 0$$

इस लिये स्वस्तिक मूलविन्दु ही में हो गा ।

फिर $\frac{तार}{ताय}$ के मान जानने के लिये १४६ वें प्रक्रम के (२) समीकरणों के पदों के मानों को य, र के स्थान में शून्य का उत्थापन देकर लावो तो सब शून्य ही हो जायं गे इस लिये उसी प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\frac{ता^3फ}{ताय^3} + ३\frac{ता^3फ}{ताय^2तार}\cdot\frac{तार}{ताय} + ३\frac{ता^3फ}{तायतार^2}\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 + \frac{ता^3फ}{तार^3}\left(\frac{तार}{ताय}\right)^3 = 0$$

परन्तु $\frac{ता^3फ}{ताय^3} = २४\,य = 0$ यदि $य = 0$

$$३\frac{ता^3फ}{ताय^2तार} = -६\,अ$$

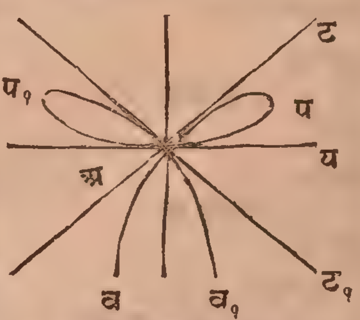
$$३\frac{ता^3फ}{तायतार^2} = 0,\ \text{और}\ \frac{ता^3फ}{तार^3} = ६\,क$$

$$\text{इस लिये}\ -६\,अ\cdot\frac{तार}{ताय} + ६\,क\left(\frac{तार}{ताय}\right)^3 = 0$$

$$= \frac{तार}{ताय}\left(क\cdot\frac{तार^2}{ताय^2} - अ\right) = 0$$

$$\text{इस पर से}\ \frac{तार}{ताय} = 0\ \text{वा}\ \frac{तार}{ताय} = \pm\sqrt{\frac{अ}{क}}$$

इस पर से यह जाना गया कि मूलविन्दु में वक्र की तीन शाखा मिलती हैं जिन में एक शाखा की उस विन्दु पर स्पर्शरेखा य अक्ष है और दो शाखाओं की स्पर्शरेखा य अक्ष से ऐसा कोण बनाती हैं जिन का स्पर्शरेखा क्रम से $\sqrt{\frac{अ}{क}}$ और $-\sqrt{\frac{अ}{क}}$ हैं।



यदि वक्र के समीकरण पर से वक्र को बनावो तो जैसा यहां वक्र लिखा है वैसा ही वक्र उत्पन्न हो गा यहां वअप पहली शाखा की स्पर्शरेखा अट है पअप$_1$ दूसरी शाखा की स्पर्शरेखा अय है और प$_1$ अव$_1$ तीसरी शाखा की स्पर्शरेखा अट$_1$ है

(६) $अ\cdot र^2 - य^3 = 0$ इस समीकरण के वक्र में यह विचारना है कि इस में स्कन्ध हो गा वा नहीं।

यहां यदि $अ\cdot र^2 - य^3 = 0 = फ$

तो $\frac{ताफ}{ताय} = -३\,य^2 = 0$ (१४० प्रक्रम से)

$$\frac{\text{ताफ}}{\text{तार}} = \text{२ अर} = 0 \quad (\text{१४७ प्रक्रम से})$$

इस लिये य और र का मान शून्य हुआ

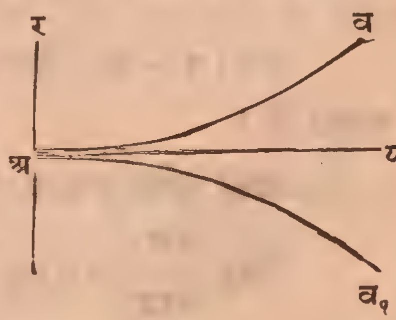
फिर $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{ताय}^2} = -\text{६ य}$, $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तायतार}} = 0$ और $\frac{\text{ता}^2\text{फ}}{\text{तार}^2} = \text{२ अ}$ इन का उत्थापन १४६ वें प्रक्रम के दूसरे समीकरण में देने से

$0 = \text{२ अ} \cdot \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ अर्थात् $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का दोनों मान समान हुए इस लिये वक्र की दोनों शाखा मूलविन्दु पर स्पर्श करें गी। अब यह विचार करना है कि शाखा ओं की समाप्ति भी वहां ही होती है वा नहीं।

वक्र के समीकरण पर से अर्थात् $\text{अर}^2 - \text{य}^3 = 0$ इस पर से

$\text{र} = \pm\sqrt{\frac{\text{य}^3}{\text{अ}}}$ अब इस में यदि $\text{य} = 0$ तो $\text{र} = 0$ परन्तु यदि य शून्य से भी छोटा मानो अर्थात् ऋण कल्पना करो तो र का मान असम्भव हो गा इस लिये अवश्य शाखा ओं की समाप्ति मूलविन्दु ही पर हुई तब यह निश्चय हुआ कि मूलविन्दु ही स्कन्ध है।

यहां $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ इस लिये य अक्ष ही स्कन्धविन्दु पर स्पर्शरेखा हो गा और य के प्रत्येक धन मान में र के दो मान एक धन और दूसरा ऋण हो गा इस लिये य अक्ष के एक ओर एक शाखा और दूसरे ओर दूसरी शाखा हुई। इसी कारण इसे प्रथम प्रकार का स्कन्ध कहना चाहिये। जैसा यहां पर वक्र लिखा है वैसा ही ऊपर के समीकरण पर से वक्र उत्पन्न होता है इस वक्र को घनात्मक परवलय कहते हैं इस की एक शाखा अव और दूसरी अव_1 है और दोनों शाखा ओं की समाप्ति (अ) स्कन्ध पर होती है और स्कन्धस्थान पर की अय स्पर्शरेखा दोनों शाखा ओं में एक ही है।



(७) $(क र - ग य)^{2} - (य - अ)^{5} = 0$ इस वक्र में यह विचार करना है कि स्कन्ध हो गा वा नहीं यहां १४७ वें प्रक्रम से

$$\frac{ताफ}{ताय} = -2ग(कर - गय) - 5(य - अ)^{4} = 0$$

$$\frac{ताफ}{तार} = 2क(कर - गय) = 0$$ इस पर से

$र = +\frac{गय}{क}$ इस का उत्थापन $\frac{ताफ}{ताय}$ में देने से $य = अ$ इस का उत्थापन वक्र के समीकरण में देने से $र = \frac{अ \cdot ग}{क}$ ।

परन्तु वक्र के समीकरण पर से $र = \frac{गय}{क} \pm \frac{1}{क}\sqrt{(य - अ)^{5}}$

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{ग}{क} \pm \frac{5}{2क}(य - अ)^{\frac{3}{2}} = \frac{ग}{क}$$ यदि $य = अ$

और, $\frac{ता^{2}र}{ताय^{2}} = \pm\frac{15}{4क}(य - अ)^{\frac{1}{2}}$ इन पर से स्पष्ट है कि यदि $य > अ$ तो र का सम्भव मान द्विविध हो गा और यदि $य < अ$ तो र का मान असम्भव आवै गा और $\frac{ता^{2}र}{ताय^{2}}$ (१३९ वें प्रक्रम से) दिखलाता है कि $(य - अ)^{\frac{5}{2}}$ के धन मान में जो वक्र की शाखा है वह उन्नतोदर और $(य - अ)^{\frac{5}{2}}$ के ऋण मान में जो वक्र की शाखा है वह नतोदर इस लिये दोनों शाखाओं के बीच ही में स्पर्शरेखा हुई और इसी लिये यहां भी प्रथम ही प्रकार का स्कन्ध हुआ ।

(८) $र = क + गय^{2} + (य - अ)^{\frac{5}{2}}$ इस में स्कन्ध का विचार करना है ।

यहां देखो जब $य = अ$ तब $र = क + ग \cdot अ^{2}$

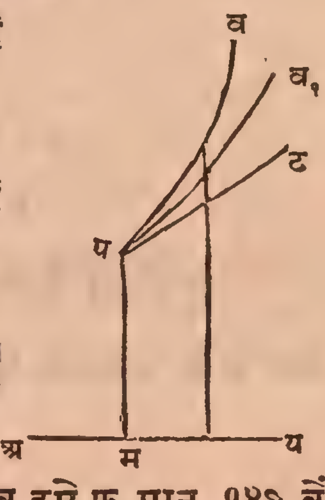
और $\frac{तार}{ताय} = 2गय + \frac{5}{2}(य - अ)^{\frac{3}{2}} = 2गअ$ यदि $य = अ$ इस

लिये जहां $य = अ$ और $र = क + ग \cdot अ^2$ तहां पर एक ही स्पर्शरेखा हुई। फिर यदि वक्र के समीकरण में $य > अ$ तो र का द्विविध मान सिद्ध हो गा और यदि $य < अ$ तो र का असम्भव मान हो गा इस लिये उस स्थान पर शाखाओं की समाप्ति हुई और शाखाओं में एक ही स्पर्शरेखा भी हुई।

$$\text{फिर जब } \frac{तार}{ताय} = २ गय + \frac{५}{२}(य - अ)^{\frac{३}{२}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{ता^2 र}{ताय^2} = २ ग + \frac{१५}{४}(य - अ)^{\frac{१}{२}}$$

जब य सर्वदा अ से बड़ा है तब स्पष्ट है कि सर्वदा $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ यह धन हो गा इस लिये १३९ वें प्रक्रम से दोनों शाखा उन्नतोदर हुई इस पर से यह विदित हुआ कि दोनों शाखाओं से स्पर्शरेखा बाहर हुई जैसा यहां क्षेत्र है उसी प्रकार की शाखायें उत्पन्न हों गी



यहां अ मूलविन्दु और प वह विन्दु है जिस का अम भुज = अ और पम कोटि $= क + ग \cdot अ^2$। प विन्दु पव, और $पव_1$ दोनों शाखाओं की समाप्ति स्थान में होने से दूसरे प्रकार का स्कन्धस्थान है क्यों कि यहां पट स्पर्शरेखा दोनों शाखाओं से बाहर है।

इसी उदाहरण में जब $र = क + गय^2 + (य - अ)^{\frac{५}{२}}$
इस लिये $(र - क - गय^2)^2 = (य - अ)^5$

और $(र - क - गय^2)^2 - (य - अ)^5 = 0$ अब इसे फ मान १४७ वें प्रक्रम की पहली ही युक्ति से $\frac{ताफ}{ताय}$ और $\frac{ताफ}{तार}$ को शून्य के समान कर सब वस्तु निकाल सकते हो।

(९) $र = \frac{य}{१ + इय^{\frac{१}{२}}}$ इस समीकरण के वक्र में लक्षस्थान का विचार करना है। यहां य के धन मान में

$$\text{र} = \frac{\text{य}}{१ + \text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}} = \frac{\text{य}}{१ + १ + \frac{१}{\text{य}} + \frac{१}{\text{य}^{२}|\!\underline{२}} + \frac{१}{\text{य}^{३}|\!\underline{३}} + \cdots} = 0 \text{ यदि } \text{य} = 0$$

$$\text{और } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{१ + \text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}} + \frac{\text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}}{\text{य}\left(१ + \text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}\right)^{२}}$$

$$= \frac{१}{१ + १ + \frac{१}{\text{य}} + \cdots} + \frac{१ + \frac{१}{\text{य}} + \frac{१}{\text{य}^{२}|\!\underline{२}} + \cdots}{\text{य}\left(१ + १ + \frac{१}{\text{य}} + \cdots\right)^{२}}$$

$$= \frac{१}{२ + \frac{१}{\text{य}} + \cdots} + \frac{१ + \frac{१}{\text{य}} + \frac{१}{\text{य}^{२}|\!\underline{२}} + \cdots}{\text{य}\left(४ + \frac{४}{\text{य}} + \frac{\text{अ}_{१}}{\text{य}^{२}} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{१}{२ + \frac{१}{\text{य}} + \cdots} + \frac{१ + \frac{१}{\text{य}} + \frac{१}{\text{य}^{२}|\!\underline{२}} + \cdots}{४\,\text{य} + ४ + \frac{\text{अ}_{१}}{\text{य}} + \cdots} = 0 \text{ यदि } \text{य} = 0$$

लुप्तभिन्न के मान से क्यों कि हर और अंश दोनों अनन्त हुए और य के ऋणमान में $\text{र} = \frac{\text{य}}{१ + \text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}} = -\frac{\text{य}}{१ + \frac{१}{\text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}}} = 0$, यदि $\text{य} = 0$

$$\text{और } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{१ + \text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}} + \frac{\text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}}{\text{य}\left(१ + \text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}\right)^{२}}$$

$$= \frac{१}{१ + \frac{१}{\text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}}} - \frac{१}{\text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}\,\text{य}\left(१ + \frac{१}{\text{इ}^{\frac{१}{\text{य}}}}\right)^{२}}$$

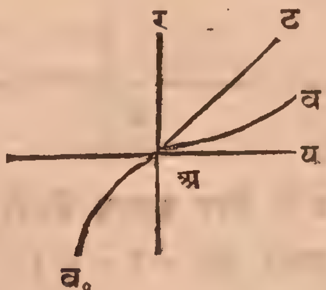
$$= \frac{१}{१ + \frac{१}{इ^{\frac{१}{य}}}} - \frac{१}{य \cdot इ^{\frac{१}{य}}\left(१ + \frac{२}{इ^{\frac{१}{य}}} + \frac{१}{इ^{\frac{२}{य}}}\right)}$$

$$= \frac{१}{१ + \frac{१}{इ^{\frac{१}{य}}}} - \frac{१}{य \cdot इ^{\frac{१}{य}} + २य + \frac{य}{इ^{\frac{१}{य}}}}$$

$$= \frac{१}{१ + \frac{१}{इ^{\frac{१}{य}}}} - \frac{१}{य + १ + \frac{१}{य\,|\underline{२}} + \cdots + २य + \frac{य}{इ^{\frac{१}{य}}}}$$

$= १$ यदि $य = ०$

इस लिये य के धन मान में जब य = ० तब एक शाखा आकर मूलविन्दु पर मिलती है जिस की स्पर्शरेखा य अक्ष है और य के ऋण मान में दूसरी शाखा य अक्ष के नीचे से आकर मूलविन्दु पर मिलती है जिस की स्पर्शरेखा य अक्ष से $स्प^{-१}(१) = ४५^{\circ}$ का कोण बनाती है और ऊपर वाली शाखा का अवयव न नीचे कुछ है और न नीचे वाली का कुछ अवयव ऊपर है इस लिये मूलविन्दु ही पर दोनों की समाप्ति हुई इसी लिये मूलविन्दु लक्षस्थान हुआ। (नीचे लिखी हुई आकृति देखो) यहां अब शाखा की अय स्पर्शरेखा है और $व_१$अ शाखा की अट स्पर्शरेखा है।



(१०) $र = इ^{-\frac{२}{य}}$ इस वक्र में विश्रामस्थान का विचार करना है। यहां समीकरण को देखने ही से जान पड़ता है कि य के धन मान में यदि य = ० तो र = ० और य के ऋणमान में यदि य = ०

तो र = ∞ इस लिये य के धन मान में जो वक्र की शाखा हो गी उस की समाप्ति मूलविन्दु ही पर हुई इसी लिये मूलविन्दु विश्रामस्थान ठहरा ।

यदि इस वक्र के दोनों शाखाओं का असीमपथ जानना हो तो वक्र के $र = इ^{-\frac{१}{य}}$ इस समीकरण से $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य^२} इ^{-\frac{१}{य}}$ इस में य के धन मान में जब य = ∞ तो $र = इ^{-\frac{१}{य}} = इ^० = १$

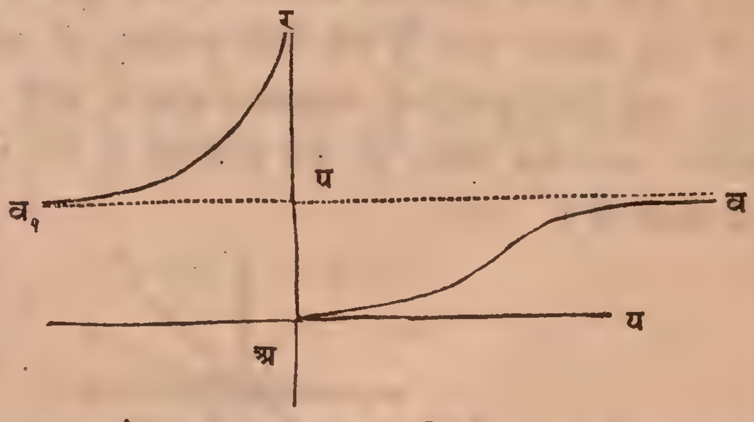
$$\text{और } \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य^२} \cdot इ^{-\frac{१}{य}} = \frac{१}{य^२} = \frac{१}{\infty} = ० ।$$

और य के ऋणमान में जब य = ∞ तो $र = इ^{-\frac{१}{य}} = इ^{\frac{१}{य}} = १$

$$\text{और } \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य^२} \cdot इ^{-\frac{१}{य}} = \frac{१}{य^२} \cdot इ^{\frac{१}{य}} = \frac{१}{\infty} = ०$$

इस लिये असीमपथ य अक्ष के समानान्तर हुआ और उस की कोटि अर्थात् र = १ हुआ । यहां पर जो क्षेत्र लिखा है वैसी ही आकृति वक्र की हो गी ।

यहां वक्र शाखा की समाप्ति अ मूलविन्दु पर होती है इस लिये वक्र शाखा का विश्रामस्थान अ विन्दु ठहरा । और य के ऋणमान में

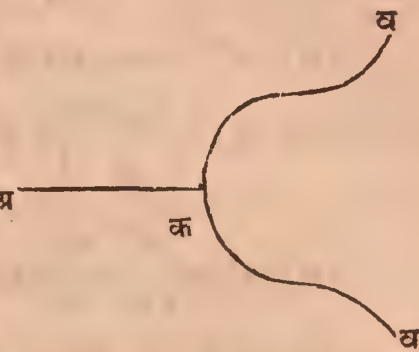


दूसरी शाखा र अक्ष के बायें ओर उत्पन्न होती है और दोनों शाखाओं का असीमपथ $व_१व$ है जहां अप = र = १ ।

(११) $र = य\sqrt{\frac{य - क}{अ}}$ इस में शुष्कस्थान जानना है ।

यहां समीकरण से स्पष्ट है कि यदि य < क तो र का असम्भव

मान हो गा परन्तु यदि य = 0 तो र = 0 इस लिये वक्र का एक विन्दु-रूप अवयव मूलविन्दु में हुआ फिर जब य = क तो र = 0 इस लिये मूलविन्दु में होकर वक्र की कोई शाखा नहीं गई है केवल एक विन्दु-रूप शाखा है अर्थात् शाखा जन्मते ही सूख गई इसी लिये यहां अ विन्दु को शुष्कस्थान कहते हैं ।



यहां जो आकृति लिखी है उस में वकव$_1$ वक्र के शुष्कशाखा का स्थान अ मूलविन्दु है और अक = क ।

(१२) र^2 = यज्या^{2}य इस वक्र में शुष्कस्थानों को जानना है ।

यहां य के प्रत्येक धनमान में र का दो मान सम्भव आवें गे परन्तु य के ऋणमान में सम्भवमान कोई न आवे गा परन्तु यदि य = − न · π जहां न कोई पूर्णाङ्क और धन है तो र = 0 इस लिये न के स्थान में १, २, ३ इत्यादि का उत्थापन देने से मूलविन्दु के बांये ओर य अक्ष में अनेक विन्दुरूप शाखा उत्पन्न हों गी इस लिये य अक्ष के उस खण्ड को शुष्कसमुदाय कहें गे । इस प्रकार विद्यार्थियों को चाहिये कि बहुधा उत्तर निकाल अच्छी भांति वक्रों के सिद्धान्तों से परिचय करें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $र = \frac{अ^2}{२ य}$ इस वक्र को सिद्ध करो कि उन्नतोदर हो गा? ।

(२) $र = य \left(\frac{य - २ अ}{य - अ}\right)$ इसे सिद्ध करो कि उन्नतोदर हो गा?।

(३) $स्रु = अ (१ - इ कोज्याष)$ इस में सिद्ध करो कि सन्धिस्थान में $स्रु = \frac{२ अ}{३} (१ - इअ)$ ।

(४) $र = \frac{२ अ}{य} \sqrt{२ अय - य^2}$ इस में सिद्ध करो कि दो सन्धिस्थान हों गे, जब $य = \frac{३ अ}{२}$ और $र = \pm \frac{२ अ}{\sqrt{३}}$ ।

(५) $र = \frac{य^३}{य^२ + ३}$ इस के सन्धिस्थान में सिद्ध करो कि

$य = ०, \pm ३$ ।

(६) $र^२ = अ^२ \left(\frac{अ - य}{य} \right)$ यहां सन्धिस्थान में $य = \frac{३ अ}{४}$ हो गा ? ।

(७) $य^{अ} =$ लार इस में सिद्ध करो कि सन्धिस्थान में

$य = \left(\frac{१ - अ}{अ} \right)^{\frac{१}{अ}}$ हो गा ? ।

(८) $र^२ = \frac{अ^२ \cdot य}{२ अ - य}$ इस के सन्धिस्थान में $य = \frac{अ}{२}$ के हो गा ? ।

(९) $श्रु = अ \cdot प^न$ इस में सिद्ध करो कि सन्धिस्थान में

$श्रु = क \left\{ - न (न + १) \right\}^{\frac{न}{२}}$ ।

(१०) $य = २ अ \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} स$, और $र = अ (न \cdot स + ज्यास)$ तो सिद्ध करो कि सन्धिस्थान में कोज्यास किस के तुल्य हो गा ? ।

उत्तर $कोज्यास = - \frac{१}{न}$ ।

(११) $र = \frac{अ - य}{अ^२ + य^२}$ इस में सिद्ध करो कि तीन सन्धिस्थान हों गे जिन में क्रम से $य = - अ$, $य = अ (२ + \sqrt{३})$, और $य = अ (२ - \sqrt{३})$ ये हों गे ।

(१२) (११) उदाहरण में जो र है उसे एक ऐसे स्थिराङ्क से गुण कर दूसरे वक्र की कोटि कल्पना किया कि इस वक्र में जो तीन सन्धिस्थान हों गे वे एक ही सरलरेखा में होते हैं तो उस स्थिराङ्क गुणक को बतावो ? ।

उत्तर $स्थि = अ^२$ ।

(१३) $अ \cdot र^२ - य^३ - क य^२ = ०$ इस में स्वस्तिकस्थान का भुज-कोटि बतावो ? । उत्तर मूलविन्दु में दो शाखा मिलती है और उन की स्पर्शरेखा य अक्ष से क्रम से $स्प^{-१} \sqrt{\frac{क}{अ}}$ । $स्प^{-१} \left(- \sqrt{\frac{क}{अ}} \right)$ ।

(१४) $(य^२ + र^२)^२ = अ^२ (य^२ - र^२)$ इस वक्र में स्वस्तिकस्थान

की स्थिति बतावो?। उत्तर, मूलस्थान में दो शाखा मिलती हैं और उन की स्पर्शरेखा य अक्ष से क्रम से ४५° । १३५° कोण बनाती हैं।

(१५) नीचे लिखे हुए समीकरण के वक्रों में सिद्ध करो कि मूलविन्दु ही में सन्धि हैं। $य = ज्या^{-1} र$, $य = कोज्या^{-1}\left(\frac{र}{य}\right)$, $य = स्प^{-1} र$, और $य = स्प^{-1}\left(\frac{र}{य^2}\right)$।

(१६) नीचे लिखे हुए समीकरण के वक्रों में सिद्ध करो कि मूलविन्दु ही स्कन्ध हैं। $र = य^{\frac{3}{2}}$, $र = य + य^{\frac{3}{2}}$, और $र = य^2 + य^{\frac{5}{2}}$।

(१७) नीचे लिखे हुए समीकरण के वक्रों में सन्धिस्थान बतावो?।

$र = \frac{१ - य + य^2}{\sqrt{१ + य^2}}$, $श्रु = \frac{अ}{\sqrt{प}}$ और $प = ज्या^{-1}\left(\frac{अ}{श्रु \cdot प}\right)$।

(१८) $य \cdot स्प\left(\frac{र}{य}\right) = १$ इस वक्र में सिद्ध करो कि मूलविन्दु लक्षस्थान हो गा और दोनों स्पर्शरेखा य अक्ष से क्रम से $स्प^{-1}\left(\frac{\pi}{२}\right)$, $स्प^{-1}\left(-\frac{\pi}{२}\right)$ कोण बनावैं गी।

(१९) $र = फ(य) + (य - अ)^{\frac{२क+१}{२ग}} फा(य)$ इस वक्र में सिद्ध करो कि यदि $य = अ$ और $\frac{२क+१}{२ग}$ एक से बड़ा और दो से छोटा हो तो उस विन्दु पर प्रथम प्रकार का स्कन्ध हो गा और यदि $\frac{२क+१}{२ग}$ दो से बड़ा तो उसी विन्दु पर द्वितीय प्रकार का स्कन्ध हो गा।

(२०) $(य - १)^3 + \frac{(यर + १)^2}{य - २} = 0$ इस में सिद्ध करो कि $य = १$ तो प्रथम प्रकार का स्कन्ध हो गा?।

(२१) $य^4 + अ^2 र^2 = अयर(२य + र)$ इस में सिद्ध करो कि मूल-विन्दु पर द्वितीय प्रकार का स्कन्ध हो गा?।

(२२) $(य^2 + र^2)^3 = ४ अ^2 य^2 र^2$ इस में सिद्ध करो कि मूलविन्दु पर चार शाखा मिलती हैं?।

(२३) र = यलाय इस में सिद्ध करेा कि मूलविन्दु विश्रामस्थान हेा गा?।

(२४) $र = क + (य - अ)^{2} \sqrt{य - ग}$ (यहां, $अ < ग$) इस में शुष्कस्थान का भुजकेाटि बतावेा?। उत्तर $भु = अ$, $केा = क$।

(२५) $अ \cdot र^{2} = (य - अ)^{2}(य - क)$ यहां यदि $अ < क$ तेा सिद्ध करेा कि जब $य = क$ तब शुष्कस्थान हेा गा?।

(२६) दिखलावेा कि $अर^{2} - य^{3} + कय^{2} = 0$ इस वक्र में मूलविन्दु पर शुष्कस्थान और $य = \frac{४क}{३}$ तहां सन्धिस्थान हेा गा?।

(२७) $य^{४} + अ^{2}र^{2} = अयर(य + र)$ इस में सिद्ध करेा कि मूलविन्दु पर शुष्कस्थान हेा गा?।

(२८) $र^{2} = यस्प^{2}य$ इस में सिद्ध करेा कि य अक्ष का वामखण्ड शुष्कसमुदाय हेा गा?।

(२९) $र^{2} = य \cdot उज्याय$ इस में सिद्ध करेा कि शुष्कसमुदाय हेा गा?।

(३०) $र^{2} = य(छेय - १)$ इस में सिद्ध करेा कि देा देा पास के शुष्कस्थानेां का अन्तर २π हेा गा?।

(३१) एक वृक्ष की शाखा नालकी के बांस की तरह जड़ से ऊपर केा चली गई थी एक कारीगर उस के जड़ के पास से देा हाथ उत्तर के ओर चल निश्चय किया कि मेरे शिर के ऊपर के विन्दु का अन्तर मेरे पैर से $१० \sqrt{\frac{१० - २}{२}}$ इतना है फिर उत्तर ही के ओर ४ हाथ चला तेा पैर से ऊपर का विन्दु $१० \sqrt{\frac{१० - ४}{४}}$ इत ने अन्तर पर पाया इसी प्रकार उस ने सर्वत्र नियम पाया अर्थात् जितना उत्तर के ओर चलता था उसे दश में घटा कर उसी का भाग देने से जेा फल मिलता था उस के मूल केा दश गुना कर देने से शिर के ऊपर के विन्दु की उंचाई पैर से हेाती थी अन्त में वह उत्तर के ओर इतना हटा कि वहां से उस के शिर के ऊपर ठीक २ शाखा जहां से दूसरे ओर घूमी थी वह विन्दु हुआ तेा बतावेा वह जड़ से कितना हटा था।

उत्तर $७\frac{१}{२}$ हाथ।

(३२) एक ज्योतिषी से एक धनी ने पूछा कि बतावो हमारे बाग में जो सब से बड़ा आम का पेड़ है उस में कै जड़ से शाखा हैं इतना हम जानते हैं कि शाखाओं के किसी विन्दु से यदि भूमि पर लम्ब गिरावो और इसे कोटि, लम्बमूल और जड़ के अन्तर को भुज और जड़ से शाखा के उस विन्दु के अन्तर को कर्ण कहो तो सर्वदा कर्ण का छ घात, छ गुना भुज और छ गुनी कोटि के घात के वर्ग के समान होता है । तो बतावो ज्योतिषी ने कै शाखा बताया? ।

उत्तर चार शाखा ।

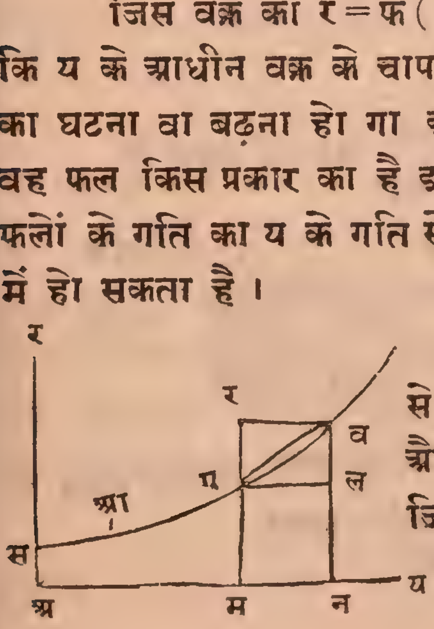
इति पञ्चदशाध्याय ।

षोडशाध्याय १६ ।

वक्र के चाप, फल, पृष्ठफल, और घनफल के गति के विषय में ।

१५३ । जिस प्रकार से वृत्त में अत्यन्त छोटे चाप की पूर्णज्या और स्पर्शरेखा चाप ही के तुल्य होती हैं उसी प्रकार वक्र के अत्यन्त छोटे चाप की पूर्णज्या भी चाप ही के तुल्य होती है क्यों कि वक्र के चाप में पास पास यदि दो विन्दु लेकर उन में रेखा लगा दो तो स्पष्ट है कि वह सरलरेखा दो विन्दुओं के योग से उत्पन्न हुई और चाप भी वही दो विन्दुओं के योग से उत्पन्न हुआ है इस लिये अत्यन्त छोटा चाप और उस की पूर्णज्या दोनों समान ही हों गी ।

जिस वक्र का र = फ(य) ऐसा समीकरण है उस में स्पष्ट है कि य के आधीन वक्र के चाप का, फल का, पृष्ठफल का और घनफल का घटना वा बढ़ना हो गा इस लिये चारो य के फल ही हों गे । वह फल किस प्रकार का है इस का जानना तो कठिन है परन्तु उन फलों के गति का य के गति से जो सम्बन्ध हो गा उस का ज्ञान सहज में हो सकता है ।



कल्पना करो कि चाप की गणना आविन्दु से आरम्भ है, पविन्दु का भुज = य = अम और पविन्दु के अत्यन्त पास दूसरा वविन्दु है जिस का भुज = अन = अम + मन = य + च, यहां च = मन = △य और वन = र'

$= र + वल = र + \triangle र, \triangle र = वल$, इसी प्रकार आप = चा और आव $= चा + \triangle चा$, वप पूर्णज्या $= \sqrt{\{\triangle य\}^२ + \{\triangle र\}^२} = \triangle चा$ क्यों कि प और व को अत्यन्त पास कल्पना किया है ।

इस लिये $\dfrac{\triangle चा}{\triangle य} = \sqrt{१ + \left(\dfrac{\triangle र}{\triangle य}\right)^२}$ यदि व को प विन्दु ही पर

मानो तो $\dfrac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \dfrac{तार^२}{ताय^२}}$ .... (१)

दोनों का वर्ग कर $\left(\dfrac{ताय}{ताचा}\right)^२$ इस से गुण देने से

$$१ = \left(\frac{ताय}{ताचा}\right)^२ + \left(\frac{तार}{ताचा}\right)^२ \quad \text{.................. (२)}$$

यदि य और र दोनों तीसरे चलराशि का फल हों तो

$$\frac{ताय}{ताचा} = \frac{\dfrac{ताय}{ताका}}{\dfrac{ताचा}{ताका}}, \text{ और } \frac{तार}{ताचा} = \frac{\dfrac{तार}{ताका}}{\dfrac{ताचा}{ताका}}$$

इन का उत्थापन (२) में देने से

$$\frac{ताचा^२}{ताका^२} = \frac{ताय^२}{ताका^२} + \frac{तार^२}{ताका^२} \quad \text{.............................. (३)}$$

१५४ । छे $\angle$ पटय $= \sqrt{१ + \dfrac{तार^२}{ताय^२}}$ ११९ वें प्रक्रम से

$$\text{इस लिये कोज्या} \angle पटय = \frac{१}{\sqrt{१ + \dfrac{तार^२}{ताय^२}}} = \frac{१}{\dfrac{ताचा}{ताय}} = \frac{ताय}{ताचा}$$

और ज्या $\angle$ पटय $= \sqrt{१ - \dfrac{ताय^२}{ताचा^२}} = \dfrac{तार}{ताचा}$ पिछले प्रक्रम के दूसरे समीकरण पर से ।

१५५। यदि अतीयभुजयुग्म हों अर्थात् $य = श्रु \cdot कोज्याप$, $र = श्रु \cdot ज्याप$ तो $\frac{ताचा}{ताप} = \frac{ताचा}{ताय} \cdot \frac{ताय}{ताप} = \frac{ताय}{ताप}\sqrt{1 + \frac{तार^2}{ताय^2}}$

$= \sqrt{\frac{ताय^2}{ताप^2} + \frac{तार^2}{ताप^2}}$ परन्तु $\frac{ताय}{ताप} = \frac{ताश्रु}{ताप}$ कोज्याप $- श्रु \cdot ज्याप$

$\frac{तार}{ताप} = \frac{ताश्रु}{ताप} \cdot ज्याप + श्रु \cdot कोज्याप$ दोनों का वर्ग जोड़ कर

मूल लेने से $\frac{ताचा}{ताप} = \sqrt{\frac{ताश्रु^2}{ताप^2} + श्रु^2}$ दोनों को $\frac{ताप}{ताश्रु}$ से गुण देने से

$\frac{ताप}{ताश्रु} \cdot \frac{ताचा}{ताप} = \frac{ताचा}{ताश्रु} = \sqrt{1 + श्रु^2 \cdot \frac{ताप^2}{ताश्रु^2}}$ १३० वें प्रक्रम से सिद्ध है

कि $स्पभ = श्रु \cdot \frac{ताप}{ताश्रु}$ जहां भ श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है इस लिये त्रिकोणमिति से

$$ज्याभ = \frac{श्रु \cdot \frac{ताप}{ताश्रु}}{\sqrt{1 + श्रु^2 \cdot \frac{ताप^2}{ताश्रु^2}}} = \frac{श्रु \cdot \frac{ताप}{ताश्रु}}{\frac{ताचा}{ताश्रु}} = श्रु \cdot \frac{ताप}{ताचा}$$

इसी प्रकार $कोज्याभ = \frac{ताश्रु}{ताचा}$।

१५६। यदि १५३ वें प्रक्रम में जो वक्र है उस में भुजकोटि के सम्बन्ध से जो अमपस क्षेत्र का फल है उसे यदि ग कल्पना करो और अनवस का फल ग' मानो तो $ग' - ग = \triangle ग$, पन आयत से बड़ा और रन आयत से छोटा हो गा

इस लिये $वन \times वर = \triangle य \cdot र' > \triangle ग > \triangle य \cdot र$

वा, $र' > \frac{\triangle ग}{\triangle य} > र$ यहां यदि प के पास व कल्पना करो तो

$$\text{र}' = \text{र और } \frac{\Delta\,\text{ग}}{\Delta\,\text{य}} = \frac{\text{ताग}}{\text{ताय}} \text{ इस लिये } \frac{\text{ताग}}{\text{ताय}} = \text{र ।}$$

१५७। यदि अक्षीयभुजयुग्म हों अर्थात् य = श्रु · कोज्याष

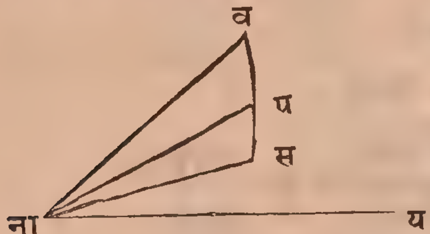
$$\text{र} = \text{श्रु} \cdot \text{ज्याष तो } \frac{\text{ताग}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताग}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ कोज्याष} - \text{श्रु} \cdot \text{ज्याष}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताग}}{\text{ताष}} = \text{श्रु} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ ज्याषकोज्याष} - \text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{ष}$$

$$= \frac{\text{श्रु}}{\text{२}} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ ज्या २ ष} - \text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{ष ।}$$

१५८। यदि, ध्रुवस्थान से वक्र के चाप प्रान्त में दो रेखा ले जाने से जो क्षेत्र बनता है, उस के फल की गति जानना हो तो कल्पना



करो कि ना ध्रुवस्थान, नाय य अक्ष, स, चाप का आरम्भ विन्दु, नापस क्षेत्र का फल = ग, वक्र का दूसरा विन्दु व, सनाव क्षेत्र का फल = ग', इन दोनों फलों का अन्तर = △ग, <पनाव = △ष, और नाव = श्रु + △श्रु इस लिये अब यदि पव चाप को सरलरेखा और ज्या <पनाव = △ष तो त्रिकोणमिति से

$$\Delta\,\text{ग बहुत ही पास } \frac{\text{श्रु}\,(\text{श्रु} + \Delta\,\text{श्रु})\,\Delta\,\text{ष}}{\text{२}} \text{ इस के हो गा}$$

$$\text{वा } \frac{\Delta\,\text{ग}}{\Delta\,\text{ष}} \text{ बहुत ही पास } \frac{\text{श्रु}}{\text{२}}(\text{श्रु} + \Delta\,\text{श्रु}) \text{ इस के हो गा परन्तु}$$

$$\text{यदि प और व को एक ही मानो तो ठीक } \frac{\text{ताग}}{\text{ताष}} = \frac{\text{श्रु}^2}{\text{२}} \text{ ऐसा हो गा}$$

$$\text{क्यों कि उस क्षण में } \frac{\Delta\,\text{ग}}{\Delta\,\text{ष}} = \frac{\text{ताग}}{\text{ताष}} \text{ और श्रु} + \Delta\,\text{श्रु} = \text{श्रु ।}$$

१५९। यदि समसूच्याकार शङ्कु को गिराकर ऐसा समभूमि में घुमावो कि शिरःस्थान स्थिर रहे तो स्पष्ट है कि आधार के जिस विन्दु से भ्रमण आरम्भ हुआ है वही विन्दु फिर जब घूम के भूमि में लगै गा तब शङ्कु का पूरा एक भ्रमण हो गा इस लिये शिरःस्थान से आधार तक जो कर्णरेखा है उस व्यासार्द्ध से जो वृत्तखण्ड उत्पन्न हुआ वही शङ्कु का पृष्ठफल हो गा इस लिये वृत्त के सिद्धान्त से पृष्ठफल = कर्ण-रेखा $\times \frac{\text{चाप}}{२}$ परन्तु यहां पर तो चाप शङ्कु का आधार परिधि ही हो गा।

$$\text{इस लिये पृष्ठफल} = \text{कर्णरेखा} \times \frac{\text{आप}}{२} \text{ ।}$$

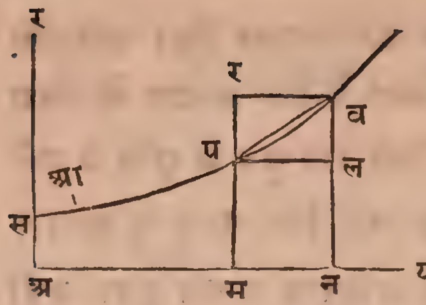
यदि इसी समसूच्याकार शङ्कु को आधार के समानान्तर धरा-तल से काटो तो दूसरा समसूच्याकार शङ्कु पहले का सजातीय उत्पन्न हो गा इस के कर्णरेखा को रें और आधार परिधि को आ' मानो तो ऊपर की युक्ति से इस का पृष्ठफल $= \frac{\text{रें} \times \text{आ}'}{२}$ और शङ्कु खण्ड वा वल-याकार प्रदेश का फल $= \frac{\text{रे}\cdot\text{आ}}{२} - \frac{\text{रें}\cdot\text{आ}'}{२}$, मानो कि रे = रें + △ रें तो वलय का फल $= \frac{\text{आ}\cdot\text{रें} + \triangle\,\text{रें}\cdot\text{आ} - \text{रें}\cdot\text{आ}'}{२}$ परन्तु जब दोनों शङ्कु सजातीय हैं तब आ $= \frac{(\text{रें} + \triangle\,\text{रें})\,\text{आ}'}{\text{रें}}$

$$\text{इस लिये आ}\cdot\text{रें} = \text{आ}'(\text{रें} + \triangle\,\text{रें})$$

$$\text{और वलयाकार का क्षेत्र फल} = \frac{\text{आ}'(\text{रें}+\triangle\,\text{रें}) + \triangle\,\text{रें}\,\text{आ} - \text{रें}\cdot\text{आ}'}{२}$$

$$= \frac{\triangle\,\text{रें}\cdot\text{आ} + \triangle\,\text{रें}\,\text{आ}'}{२} = \frac{\triangle\,\text{रें}\,(\text{आ} + \text{आ}')}{२}$$

१६०। कल्पना करो कि सआपव वक्रक्षेत्र को अय अक्ष के



चारो ओर घुमाने से जो घनक्षेत्र हुआ उस के पृष्ठफल की गति जानना है ।

प के बहुत ही पास एक व बिन्दु कल्पना करो तो असपम और असवन पृष्ठफल का अन्तर मपवन वलयाकार के क्षेत्रफल के तुल्य हो गा । प और व दोनों बहुत ही पास हैं इस लिये यह कल्पना कर सकते हैं कि मानो एक शङ्कु का आधारवृत्त पम वा र व्यासार्द्ध से उत्पन्न परिधि है और उसी शङ्कु के सजातीय दूसरे शङ्कु का आधार परिधि वन वा र' व्यासार्द्ध से उत्पन्न परिधि है और दोनों शङ्कुओं के कर्णरेखा का अन्तर स्वल्पान्तर से पव वा △ चा है इस लिये पृष्ठफलान्तर = △ पृ बहुत ही पास वलय के फल के हो गा परन्तु वलय का फल १५९ वें प्रक्रम से $\frac{\triangle \text{चा}}{२}(२\pi \text{र} + २\pi \text{र}')$

$= \triangle \text{चा} \cdot \pi(\text{र} + \text{र}')$ यह है इस लिये $\triangle \text{पृ} = \triangle \text{चा} \cdot \pi (\text{र} + \text{र}')$ स्वल्पान्तर से

वा $\frac{\triangle \text{पृ}}{\triangle \text{य}} = \frac{\triangle \text{चा}}{\triangle \text{य}} \cdot \pi(\text{र} + \text{र}')$ स्वल्पान्तर से

यदि प और व को एक ही मानो तो ठीक

$\frac{\text{तापृ}}{\text{ताय}} = २\pi \text{र} \cdot \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}$ यह हुआ ।

१६१ । इसी प्रकार ऊपर के घनक्षेत्रों का अन्तर पमनल समतल मस्तक शङ्कु से बड़ा और मरवन समतल मस्तक शङ्कु से छोटा हो गा इस लिये घनफलान्तर वा $\triangle \text{घ} > \pi \cdot \text{मन} \cdot \text{पम}^२ < \pi \, \text{मन} \cdot \text{वन}^२$

वा $\frac{\triangle \text{घ}}{\triangle \text{य}} > \pi \, \text{र}^२ < \pi \cdot \text{र}'^२$, प, और व को एक ही मानने से

$\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}} = \pi \cdot \text{र}^२$ ।

१६२ । इस प्रक्रम में इस अध्याय से उत्पन्न सिद्धान्तों को एकट्ठा स्मरणार्थ लिखते हैं और उन के श्लोक दोहे भी लिखकर कुछ उदाहरण कर के दिखाते हैं ।

(१) $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$ ।

(२) $\frac{\text{ताग}}{\text{ताय}} = \text{र}$ ।

(३) $\frac{\text{ताग}}{\text{ताष}} = \frac{\text{श्रु}^2}{2}$ ।

(४) $\frac{\text{ताए}}{\text{ताय}} = 2\pi\text{र} \cdot \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}$ ।

(५) $\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}} = \pi \cdot \text{र}^2$ ।

श्लोक । वक्रदोर्गतिवर्गाढ्यकोटिवेगकृतेः पदम् ।
वक्रक्षेत्रीयचापस्य गतिमानं भवेद्धि तत् ॥

दोहा । कोटिभुजागतिवर्ग को जोड़ि मूल जो होय ।
वक्रक्षेत्र के चाप की गति जानहु तुम सोय ॥

श्लोक । वक्रक्षेत्रस्य कोटिघ्नी भुजतात्कालिकी गतिः ।
वक्रक्षेत्रफलस्य स्याद्गतिमानं तदेव वै ॥

दोहा । वक्रक्षेत्र के कोटि को भुजगति से गुणि लेहु ।
वक्रक्षेत्र को जो अहै फल ता गति कहि देहु ॥

श्लोक । श्रुतिजकोणगतिर्दलिता तया श्रुतिकृतिर्गुणिता ध्रुवविन्दुतः ।
कुटिलजातफलोत्थगतिर्भवेच्चलनभेदकलाकुशलेश्वर ॥

दोहा । श्रुतिजकोणगति से गुणहु श्रुतिवर्गार्द्ध सुजान ।
ध्रुवविन्दुवश कुटिल के फलगति सोई जान ॥

श्लोक । द्विघ्नकोटिमिते व्यासे परिधिर्गुणितस्तया ।
चापगत्या गतिः सा स्याद्वक्रपृष्ठफलोद्भवा ॥

दोहा । द्विगुणकोटिसमव्यास में परिधि आनि गुणि लेहु ।
चापगती से पृष्ठफल की गति सो कहि देहु ॥

श्लोक । द्विघ्नकोटिमिते व्यासे वृत्तक्षेत्रफलं हतम् ।
भुजगत्या भवेद्वृक्षघनोत्थफलजा गतिः ॥

दोहा । द्विगुणकोटिसमव्यास में वृत्त विरचि फल आनु ।
ताको भुजगति से गुणहु घनफलगति सोइ जानु ॥

उदाहरण

(१) अतिपरवलय के चापगति के सम्बन्ध को निकालो ।

यहां वक्र का समीकरण $र = \frac{क}{अ}\sqrt{य^2 - अ^2}$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{क}{अ} \frac{य}{\sqrt{य^2 - अ^2}}$

और $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{1 + \frac{तार^2}{ताय^2}} = \sqrt{\frac{(अ^2 + क^2)य^2 - अ^4}{अ^2(य^2 - अ^2)}}$

$= \sqrt{\frac{इ^2 \cdot य^2 - अ^2}{य^2 - अ^2}}$ यहां $इ^2 = \frac{अ^2 + क^2}{अ^2}$

(२) $र^3 - 3 अयर + य^3 = 0$ इस वक्र के पृष्ठक्षेत्रफल के गति का सम्बन्ध निकालो ।

यहां $3 र^2 \cdot \frac{तार}{ताय} - 3 अर - 3 अय \cdot \frac{तार}{ताय} + 3 य^2 = 0$

इस पर से $\frac{तार}{ताय} = \frac{अर - य^2}{र^2 - अय}$

और $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{1 + \left(\frac{अर - य^2}{र^2 - अय}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{र^4 - 2 अयर^2 + अ^2 य^2 + अ^2 र^2 - 2 अरय^2 + य^4}}{र^2 - अय}$

$= \frac{\sqrt{य^4 + र^4 + अ^2(य^2 + र^2) - 2 अरय(य + र)}}{र^2 - अय}$

और $\frac{तापृ}{ताय} = 2\pi र \cdot \frac{ताचा}{ताय}$

$$=२\pi र\frac{\sqrt{य^४+र^४+अ^२(य^२+र^२)-२ अयर(य+र)}}{र^२-अय}$$

(३) $श्रु = अ \cdot ष^न$ इस के ध्रुवविन्दु से उत्पन्न क्षेत्र के फल के गति का सम्बन्ध निकालेा ।

यहां $\frac{ताग}{ताष} = \frac{१}{२} श्रु^२ = \frac{अ^२}{२} \cdot ष^{२न}$ और $ताग = \frac{अ^२}{२} \cdot ताष \cdot ष^{२न}$

$\left(\right.$इस लिये $ग = \frac{अ^२ \cdot ष^{१+२न}}{२(१+२न)}$ यही वक्र का फल चलराशि-कलन से अर्थात् इस ग्रन्थ के दूसरे खण्ड से भी सिद्ध हेा गा$\left.\right)$ ।

(४) परवलय, य अक्ष के चारेा ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है उस के गति का सम्बन्ध निकालेा यहां $र^२ = ४ अय$

इस लिये $\frac{ताघ}{ताय} = \pi र^२ = ४ अ \pi \cdot य^२$

और $ताघ = ४ अ \cdot \pi ताय \cdot य^२$ ।

(इस पर से $घ = \frac{४}{३} अ \cdot \pi \cdot य^३$ यही घनफल इस ग्रन्थ के दूसरे खण्ड से भी सिद्ध हेा गा) ।

(५) $श्रु = \frac{२ अ}{१ + कोज्याष}$ यह अक्षीय समीकरण परवलय का है इस पर से ध्रुवविन्दुवश वक्र के क्षेत्रफल का सम्बन्ध निकालेा ।

यहां $\frac{ताग}{ताष} = \frac{श्रु^२}{२} = \frac{४ अ^२}{२(१+कोज्याष)^२} = \frac{अ^२}{२} \cdot \frac{१}{कोज्या^४ \frac{१}{२} ष}$

$$= अ^२ \frac{\frac{१}{२}}{कोज्या^२ \frac{१}{२} ष} (१ + स्प^२ \frac{१}{२} ष)$$

(इस पर से ग अर्थात् फल $= अ^२ \left\{ स्प \frac{१}{२} ष + \frac{१}{३} स्प^३ \frac{१}{२} ष \right\}$ यही इस ग्रन्थ के दूसरे खण्ड से सिद्ध हेा गा) ।

इस प्रकार विद्यार्थियेां केा चाहिये कि सब का सम्बन्ध निकाल अच्छी भांति सब सिद्धान्तेां से परिचय करें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $र = अ \cdot य^{\frac{म}{न}}$ इस वक्र के चाप के गति का सम्बन्ध निकालो ? ।

उत्तर, $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \frac{म^२}{न^२} अ^२ य^{२\frac{म-न}{न}}}$ ।

(२) $र = \sqrt{२ अय - य^२} + अ \cdot उज्या^{-१}\frac{य}{अ}$ इस में चाप के गति का सम्बन्ध निकालो ? । उत्तर, $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\frac{२ अ}{य}}$ ।

(३) परवलय के चाप के गति का सम्बन्ध निकालो ? ।

उत्तर, $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\frac{य + अ}{य}}$ ।

यहां परवलय का समीकरण $र^२ = ४ अय$ है ।

(४) $रय = \frac{अ^२}{२}$ इस में क्षेत्रफल के गति का सम्बन्ध निकालो ? ।

उत्तर, $\frac{ताग}{ताय} = \frac{अ^२}{२ य}$ ।

(५) $र^२ = \frac{य^३}{२ अ - य}$ इस के फल के गति का सम्बन्ध निकालो ? ।

उत्तर, $\frac{ताग}{ताय} = \frac{य^{\frac{३}{२}}}{\sqrt{२ अ - य}}$ ।

(६) $श्रु^२ = अ^२ कोज्या\, २ प$ इस में ध्रुवविन्दु के वश से क्षेत्रफल के गति का सम्बन्ध बतावो ? । उत्तर, $\frac{ताग}{ताप} = \frac{अ^२}{२} कोज्या\, २ प$ ।

(७) $र = \frac{क}{अ}\sqrt{अ^२ - य^२}$ इस में पृष्ठफल गति का सम्बन्ध बतावो ? । उत्तर, $\frac{तापृ}{ताय} = \frac{२ \pi क}{अ}\sqrt{अ^२ - इ^२ य^२}$ ।

(८) वृत्त में सिद्ध करो कि $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{अ}{र}$ ।

(९) $इ^{र}(इ^{य}-१) = इ^{य}+१$ इस में सिद्ध करो कि

$\frac{ताचा}{ताय} = \frac{इ^{२य}+१}{इ^{२य}-१}$ यह हो गा? ।

(१०) $य^{\frac{२}{३}}+र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ इस में सिद्ध करो कि $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt[३]{\frac{अ}{य}}$ ।

(११) $श्रु = अ^{ष}$ इस में सिद्ध करो कि

$\frac{ताचा}{ताष} = श्रु\sqrt{\{१+(लाअ)^{२}\}}$

(१२) $श्रु^{२} = अ^{२}कोज्या\,२ष$ इस में सिद्ध करो कि $\frac{ताचा}{ताष} = \frac{अ^{२}}{श्रु}$ ।

(१३) $श्रु = अष$ इस में सिद्ध करो कि $\frac{ताचा}{ताश्रु} = \sqrt{१+ष^{२}}$ ।

(१४) $यर = (अ+य)\sqrt{क^{२}-य^{२}}$ इस में घनफल के गति का सम्बन्ध निकालो? ।

उत्तर, $\frac{ताघ}{ताय} = -\pi\frac{अक^{२}+य^{३}}{\sqrt{क^{२}-य^{२}}}$ ।

(१५) एक कबूतर ऐसा उड़ता था कि उस के चाल से परवलय का चाप बनता चला जाता था कुछ देर के अनन्तर उस क्षणभर में जो उस की चाल थी उसी चाल से फिर बराबर प्रति क्षण में उलटा चलने लगा और सौ हाथ चल के जिस स्थान से उड़ा था उस के पीछे ३० हाथ के अन्तर पर भूमि पर आया तो बतावो वह भूमि से कितना ऊंचा गया था? । उत्तर, अस्सी हाथ ।

इति षोडशाध्याय ।

सप्तदशाध्याय १७ ।

युति, अवलूत, और अनवलूत के विषय में ।

१६३ । कल्पना करो कि एक वक्र का समीकरण $र = फ(य)$ ऐसा और दूसरे का समीकरण $र = फा(य)$ ऐसा है अब यहां यदि

य = अ तो यदि फ (अ) = फा (अ) तो स्पष्ट है कि उस विन्दु पर दोनों वक्र परस्पर कटैं गे जिस विन्दु का भुज = अ है । उसी दशा में यदि फ' (अ) = फा' (अ) तो दोनों वक्रों में उस विन्दु पर ११९ वें प्रक्रम से एक ही स्पर्शरेखा हो गी ऐसे स्थल में दोनों वक्रों की प्रथमसम्बन्ध से युति हुई ऐसा कहते हैं । इसी स्थान में यदि फ" (अ) = फा" (अ) तो द्वितीयसम्बन्ध से युति हुई ऐसा कहते हैं । इसी प्रकार यदि बराबर नसंख्यकसम्बन्ध तक दोनों वक्रों के सम्बन्ध तुल्य होते जायं अर्थात् फ' (अ) = फा' (अ), फ" (अ) = फा" (अ), फ''' (अ) = फा''' (अ), …… $\text{फ}^{(\text{न})}$ (अ) = $\text{फा}^{(\text{न})}$ (अ) ऐसा हो परन्तु $\text{फ}^{(\text{न}+१)}$ (अ) यह $\text{फा}^{(\text{न}+१)}$ (अ) इस के समान न हो तो दोनों वक्रों की नसंख्यकसम्बन्ध से युति हुई ऐसा कहते हैं ।

१६४ । कल्पना करो कि र = फ (य), और र = फा (य) इन समीकरणों के क्रम से जो दो वक्र हैं उन की युति नसंख्यकसम्बन्ध से है और पहला वक्र (जिस का र = फ (य) यह समीकरण है) और र = फि (य) इस समीकरण के वक्र की उसी विन्दु पर मसम्बन्ध से युति है और समझो कि न से म छोटा है तो २३ वें प्रक्रम से अ + च तुल्य भुज में पहले की कोटि

$$\text{र}_1 = \text{फ}(\text{अ}) + \text{च}\text{फ}'(\text{अ}) + \frac{\text{च}^2}{\underline{|२}}\text{फ}''(\text{अ}) + \cdots + \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{अ})$$
$$+ \frac{\text{च}^{\text{न}+१}}{\underline{|\text{न}^{\text{न}+१}}}\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{अ} + \text{ष}_1\text{च})$$

दूसरे की कोटि

$$\text{र}_2 = \text{फा}(\text{अ}) + \text{च}\text{फा}'(\text{अ}) + \frac{\text{च}^2}{\underline{|२}}\text{फा}''(\text{अ}) + \cdots + \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\text{फा}^{(\text{न})}(\text{अ})$$
$$+ \frac{\text{च}^{\text{न}+१}}{\underline{|\text{न}+१}}\text{फा}^{(\text{न}+१)}(\text{अ} + \text{ष}_2\text{च}) \quad \text{इस लिये}$$

$$\text{र}_1 - \text{र}_2 = \frac{\text{च}^{\text{न}+१}}{\underline{|\text{न}+१}}\left\{\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{अ} + \text{ष}_1\text{च}) - \text{फा}^{(\text{न}+१)}(\text{अ} + \text{ष}_2\text{च})\right\}$$

क्यों कि फ(अ) = फा(अ), फ'(अ) = फा'(अ) इत्यादि न सम्बन्ध तक। इसी प्रकार पहले और तीसरे वक्र के कोटिओं का अन्तर उसी भुज में अर्थात् अ + च तुल्य भुज में

$$र_1 - र_3 = \frac{च^{म+1}}{|म+1}\{फ^{(म+1)}(अ + ष_1 च) - फि^{(म+1)}(अ + ष_3 च)\}$$

यहां च का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिस में $र_1 - र_2$ यह $र_1 - र_3$ से छोटा हो सकता है इस लिये पहले दो वक्रों के बीच में हो कर तीसरा ऐसा वक्र नहीं जा सकता जो उसी विन्दु पर न संख्यकसम्बन्ध के अपेक्षा अल्पसम्बन्ध से युति करे।

१६५। यदि च को बहुत अल्प मानें तो $र_1 - र_2$ इस का धनत्व वा ऋणत्व $\frac{च^{न+1}}{|न+1}\{फ^{(न+1)}(अ) - फा^{(न+1)}(अ)\}$ इस के धनत्व वा ऋणत्व के अनुसार हो गा। इस लिये यदि न समसंख्या हो तो $र_1 - र_2$ इस का मान युति विन्दु के आगे पीछे भिन्न भिन्न चिन्ह का हो गा इस लिये दोनों वक्र आपस में कटैं गे परन्तु यदि न विषमसंख्या हो तो युति विन्दु से आगे वा पीछे $र_1 - र_2$ इस का मान एक ही चिन्ह विशिष्ट हो गा इस लिये तब दोनों वक्र उस विन्दु पर स्पर्श करैं गे।

१६६। यदि एक वक्र का समीकरण दिया हो और उस के किसी विन्दु पर एक वक्र न संख्यकसम्बन्ध से योग करता हो तो १६३ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि न + १ इतने समीकरण हों गे इस लिये यदि उस वक्र के समीकरण में न + १ स्थिराङ्क हों तो सब का ज्ञान उन समीकरणों से हो सकता है जैसे ऐसी एक सरलरेखा जानना है जो प्रथम सम्बन्ध से र = फ(य) इस समीकरण के वक्र से युति करे।

तो देखो रेखा का समीकरण जो र = मय + ग यह है इस में दो स्थिराङ्क हैं इस लिये मअ + ग = फ(अ), $\frac{तार}{ताय}$ = म = फ'(अ) इन पर से अ·फ'(अ) + ग = फ(अ) ∴ ग = फ(अ) − अ·फ'(अ)

इन का उत्थापन रेखा के समीकरण में देने से

$$र = फ'(अ) \cdot य + फ(अ) - अ \cdot फ'(अ)$$

और, $र_1 = फ'(अ) \cdot अ + फ(अ) - अ \cdot फ'(अ)$

इस लिये, $र - र_1 = \{फ'(अ)\}\{य - अ\}$ यह समीकरण ११९ वें प्रक्रम से वक्र रेखा के स्पर्शरेखा ही का सिद्ध हुआ क्यों कि

$फ'(अ) = \dfrac{तार}{ताय}$ जब कि $य = अ$।

यदि $र = फ(य)$ एक वक्र का समीकरण हो और,

$$र = फ(अ) + (य - अ) फ'(अ) + \frac{(य - अ)^2}{\lfloor 2} फ''(य) + \cdots$$

$$+ \frac{(य - अ)^न}{\lfloor न} फ^{(न)}(अ)$$ इस समीकरण का एक नया वक्र कल्पना करो तो यह न संख्यकसम्बन्ध से पहले वक्र के उस विन्दु पर युति करै गा जिस का भुज = अ, इस की सत्यता तुरन्त ज्ञात हो सकती है जैसे

$$र = फ(अ) + (य - अ) फ'(अ) + \frac{(य - अ)^2}{\lfloor 2} फ''(अ) + \cdots$$

$$+ \frac{(य - अ)^न}{\lfloor न} फ^{(न)}(अ)$$ इस लिये

$$\frac{तार}{ताय} = फ'(अ) + (य - अ) फ''(अ) + \cdots + \frac{(य - अ)^{न-1}}{\lfloor न - 1} फ^{(न)}(अ)$$

$$\vdots$$

$\dfrac{ता^न र}{ताय^न} = फ^{(न)}(अ)$ इन सब में यदि $य = अ$ तो $र = फ(अ)$,

$\dfrac{तार}{ताय} = फ'(अ), \cdots\cdots, \dfrac{ता^न र}{ताय^न} = फ^{(न)}(अ)$ यही मान पहले वक्र के समीकरण से भी सिद्ध हो गा यदि $य = अ$, इस लिये नया वक्र पहले वक्र के उस विन्दु पर जिस का भुज = अ, न सम्बन्ध से युति करता है यह सिद्ध हुआ।

वक्रजातीयवृत्त ।

१९७। सामान्यतः वृत्त के समीकरण में तीन स्थिराङ्क होते हैं एक केन्द्र का भुज, दूसरा केन्द्र की कोटि और तीसरा वृत्त का व्यासार्द्ध, इस लिये वक्र के किसी विन्दु पर द्वितीयसम्बन्ध से योग करै ऐसा जो वृत्त, उस वृत्त के व्यासार्द्ध का और उस वृत्त के केन्द्र सम्बन्धि भुजकोटि का ज्ञान हो सकता है।

परिभाषा। जो वृत्त किसी वक्र के किसी विन्दु पर द्वितीयसम्बन्ध से योग करता है उस वृत्त को वक्रजातीयवृत्त कहते हैं।

कल्पना करो कि उस वृत्त का व्यासार्द्ध वि और केन्द्र सम्बन्धि भुजकोटि क्रम से अ, और क हैं तब वृत्त के समीकरण से

$$(य_1 - अ)^2 + (र_1 - क)^2 = वि^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

इस का दो बार तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\left.\begin{aligned} & य_1 - अ + (र_1 - क)\frac{तार_1}{ताय_1} = 0 \\ & 1 + \frac{तार_1^2}{ताय_1^2} + (र_1 - क)\frac{ता^2र_1}{ताय_1^2} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2)$$

परन्तु यह वृत्त वक्र के उस विन्दु पर (जिस का भु = य और कोटि = र) द्वितीयसम्बन्ध से योग करता है इस लिये

$$\left.\begin{aligned} & य_1 = य \\ & र_1 = र \\ & \frac{तार_1}{ताय_1} = \frac{तार}{ताय} \\ & \frac{ता^2र_1}{ताय_1^2} = \frac{ता^2र}{ताय^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

(३) का उत्थापन (२) में देने से

$$\left.\begin{aligned} & य - अ + (र - क)\frac{तार}{ताय} = 0 \\ & 1 + \frac{तार^2}{ताय^2} + (र - क)\frac{ता^2र}{ताय^2} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

(४) पर से समशोधनादि करने से

$$\left.\begin{aligned} र - क &= -\frac{1 + \dfrac{ता र^2}{ता य^2}}{\dfrac{ता^2 र}{ता य^2}} \\ \text{और,}\quad य - अ &= \frac{\dfrac{ता र}{ता य}\left(1 + \dfrac{ता र^2}{ता य^2}\right)}{\dfrac{ता^2 र}{ता य^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (५)$$

(५) का उत्थापन (१) में दे कर मूल लेने से

$$वि = \frac{\left(1 + \dfrac{ता र^2}{ता य^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{ता^2 र}{ता य^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (६)$$

इस लिये (५) और (६) वें से अ, क, और वि तीनों का ज्ञान हो जाय गा फिर इन पर से वक्रजातीयवृत्त का भी ज्ञान हो जाय गा।

वि का मान सर्वदा धन करने के लिये चाहिये कि हर जैसा धन वा ऋण हो वैसा ही अंश भी होना चाहिये इस लिये यदि र मान धन हो और वक्र नतोदर हो तो १३९ वें प्रक्रम से $\dfrac{ता^2 र}{ता य^2}$ ऋण हो गा इस लिये तब वि का मान धन करने के लिये $वि = -\dfrac{\left(1 + \dfrac{ता र^2}{ता य^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{ता^2 र}{ता य^2}}$ ऐसा समीकरण मानना चाहिये।

(४) का प्रथम समीकरण देखो ठीक ११९ वें प्रक्रम में जैसा मुख्यलम्ब का समीकरण है वैसा ही है इस लिये वक्र के जिस विन्दु का भुज युग्म य, र है उस विन्दु पर जो मुख्यलम्ब हो गा उसी में वह

विन्दु जिस का भुज युग्म अ, क है अर्थात् वक्रजातीयवृत्त का केन्द्र भी हो गा इस केन्द्र को लाघव से वक्रजातीयकेन्द्र और वक्रजातीयवृत्त के व्यासार्द्ध को वक्रजातीयव्यासार्द्ध कहते हैं ।

यदि वक्र और वक्रजातीयपरिधि के योगविन्दु से अर्थात् वक्र के जिस विन्दुसम्बन्धि वक्रजातीयपरिधि बना है उस विन्दु से कोई सरलरेखा खींची जाय तो वक्रजातीयवृत्त के अन्तर्गत जितना इस रेखा का खण्ड हो गा उसे वक्रजातीयपूर्णज्या कहते हैं यह पूर्णज्या वक्रजातीयव्यासार्द्ध से जितना बड़ा कोण बनाती है उस के कोटिज्या से वक्रजातीयव्यास को गुण देने से जो हो गा वही स्पष्ट है कि इस पूर्णज्या का मान हो गा ।

१६८ । यदि मूलविन्दु से वक्र के उस विन्दु को जिस का भुजयुग्म य, र है स्पर्शरेखा पर लम्ब डाला जाय और इस लम्ब को ल कहो तो ११८ वें प्रक्रम से

$$\text{ल} = \frac{\text{य}\cdot\frac{\text{ता र}}{\text{ता य}} - \text{र}}{\sqrt{1+\frac{\text{ता र}^2}{\text{ता य}^2}}} \text{ इस लिये}$$

$$\frac{\text{ता ल}}{\text{ता य}} = \frac{\text{य}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ता य}^2}\left(1+\frac{\text{ता र}^2}{\text{ता य}^2}\right) - \frac{\text{ता र}}{\text{ता य}}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ता य}^2}\left(\text{य}\cdot\frac{\text{ता र}}{\text{ता य}} - \text{र}\right)}{\left(1+\frac{\text{ता र}^2}{\text{ता य}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ता य}^2}\left(\text{य}+\text{र}\cdot\frac{\text{ता र}}{\text{ता य}}\right)}{\left(1+\frac{\text{ता र}^2}{\text{ता य}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

परन्तु $\text{अु}^2 = \text{य}^2 + \text{र}^2$

$$\text{और अु}\cdot\frac{\text{ता अु}}{\text{ता य}} = \text{य} + \text{र}\cdot\frac{\text{ता र}}{\text{ता य}} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(१) में (२) का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} \cdot \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}}{\left(1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}}{\text{वि}}$$ (१६७ वें प्रक्रम के (६) वें

समीकरण से)

$$\text{इस लिये वि} = \frac{\text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}}{\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}} = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}$$

१६९। यदि य और र दोनों "का" चलराशि के फल हों तो

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}}{\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}},\ \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{तायताका}} = \frac{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताका}^2} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} - \frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताका}^2} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताका}}}{\frac{\text{ताय}^2}{\text{ताका}^2}}$$

और, $$\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{तायताका}} \cdot \frac{\text{ताका}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{तायताका}} \cdot \frac{1}{\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताका}^2} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} - \frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताका}^2} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताका}}}{\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right)^3}$$

इस $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ और $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ का उत्थापन १६७ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में देने से

$$\text{वि} = \frac{\left(\frac{\text{ताय}^2}{\text{ताका}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताका}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताका}^2} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} - \frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताका}^2} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताका}}}$$

इसी समीकरण में यदि का = चा = वक्र के चाप का मान जिस की गणना किसी नियतविन्दु से है तो

$$\text{वि} = \frac{1}{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} - \frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

क्यों कि १५३ प्रक्रम से $\frac{\text{ताय}^2}{\text{ताचा}^2}+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताचा}^2}=1$ .... (२)

(१) के अंश हर को उलट देने से

$$\frac{1}{\text{वि}} = \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} - \frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(२) का तात्कालिकसम्बन्ध लेने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(३) और (४) का वर्ग कर जोड़ देने से

$$\frac{1}{\text{वि}^2} = \left(\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(४) से $\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}$ इस का वा $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}$ इस का मान लाकर (३) में उत्थापन देने से

$$\frac{1}{\text{वि}} = \frac{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}}{\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}} = -\frac{\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}}{\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}}\text{ ।}$$

१७० । यदि य = त्रु · कोज्याप, और र = त्रु · ज्याप हो तो इन पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ और $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ का मान लाकर १६७ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में उत्थापन देने से

$$वि = \frac{\left(श्रु^2 + \frac{ताश्रु^2}{ताष^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{श्रु^2 + 2\frac{ताश्रु^2}{ताष^2} - श्रु \cdot \frac{ता^2श्रु}{ताष^2}}$$

यदि $श्रु = \frac{1}{ह}$, तो $\frac{ताश्रु}{ताष} = -\frac{1}{ह^2} \cdot \frac{ताह}{ताष}$, और

$$\frac{ता^2श्रु}{ताष^2} = \frac{2}{ह^3} \cdot \frac{ताह^2}{ताष^2} - \frac{1}{ह^2} \cdot \frac{ता^2ह}{ताष^2}$$

इन का उत्थापन ऊपर के वि मान में देने से

$$वि = \frac{\left(ह^2 + \frac{ताह^2}{ताष^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{ह^3\left(ह + \frac{ता^2ह}{ताष^2}\right)}$$

यदि वक्रजातीयपूर्णज्या मूलविन्दु में हो के जाय तो उस का मान $= २वि \cdot \frac{लं}{श्रु}$ १६७ वें प्रक्रम के अन्तिम युक्ति से क्यों कि १६७ वें प्रक्रम के (४) के प्रथम समीकरण से सिद्ध हो चुका है कि मुख्यलम्ब ही में वक्रजातीयकेन्द्र रहता है इस लिये वहां मुख्यलम्ब और वक्रजातीयपूर्णज्या वा श्रुति से जो कोण हो गा उस की वही कोटि हो गी जो कोण कि श्रुति और वक्र के उस विन्दु पर जो स्पर्शरेखा है उस से उत्पन्न होता है

परन्तु १६८ वें प्रक्रम से $वि = श्रु \cdot \frac{ताश्रु}{ताल}$

इस लिये वक्रजातीयपूर्णज्या

$$= २वि \cdot \frac{लं}{श्रु} = २लं \cdot \frac{ताश्रु}{ताल} \quad \text{............................} \quad (१)$$

परन्तु $\frac{1}{लं^2} = ह^2 + \frac{ताह^2}{ताष^2}$ १३० वें प्रक्रम से

इस लिये $\frac{ताल}{ताष} = -ल^3 \cdot \frac{ताह}{ताष}\left(ह + \frac{ता^2ह}{ताष^2}\right)$

वा, $\frac{ताष}{ताल} = -\frac{1}{ल^3 \frac{ताह}{ताष}\left(ह + \frac{ता^2ह}{ताष^2}\right)}$ .... (२)

और $श्रु = \frac{1}{ह}$ इस लिये, $\frac{ताश्रु}{ताष} = -\frac{\frac{ताह}{ताष}}{ह^2}$ .... (३)

(२) और (३) के घात से $\frac{ताश्रु}{ताल} = \frac{1}{ल^3 \cdot ह^2\left(ह + \frac{ता^2ह}{ताष^2}\right)}$

इस पर से (१) समीकरण का रूप

$$२ल \cdot \frac{ताश्रु}{ताल} = \frac{२}{ल^2 \cdot ह^2\left(ह + \frac{ता^2ह}{ताष^2}\right)} = \frac{२\left(ह^2 + \frac{ताह^2}{ताष^2}\right)}{ह^2\left(ह + \frac{ता^2ह}{ताष^2}\right)}$$

= वक्रजातीयपूर्णज्या जो कि मूलविन्दु में हो कर गई है ।

१७१ । १३० वें प्रक्रम से सिद्ध है कि स्पब $= \frac{तार}{ताय}$

इस लिये $ब = स्प^{-1}\frac{तार}{ताय}$ इस का वक्र के चाप के वश से तात्कालिकसम्बन्ध लेने से

$$\frac{ताब}{ताचा} = \frac{\frac{ता^2र}{ताय^2}}{1 + \frac{तार^2}{ताय^2}} \cdot \frac{ताय}{ताचा} = \frac{\frac{ता^2र}{ताय^2}}{\left(1 + \frac{तार^2}{ताय^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{वि}$$

क्यों कि $\frac{ताचा}{ताय} = \left(1 + \frac{तार^2}{ताय^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ १५३ वें प्रक्रम से

इस लिये वि $= \frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}}$ ।

१७२ । यदि दो वक्रों के अन्तीयसमीकरण ज्ञात हों तो स्पष्ट है कि यदि प्रथम सम्बन्ध से दोनों वक्रों की युति हो गी तो दोनों वक्रों में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ एक ही हो गा परन्तु $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इस का मान $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}$ इस के सम्बन्ध से भी १२९ वें प्रक्रम में दिखला चुके हैं इस लिये दोनों वक्रों में उस समय $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}$ एक ही हो गा । इसी प्रकार जब दोनों वक्रों की द्वितीय सम्बन्ध से युति हो गी तब $\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{ताष}^2}$ यह भी दोनों वक्रों में एक ही हो गा । इसी युक्ति से जब दोनों वक्रों की नसंख्यकसम्बन्ध से युति हो गी तब बराबर न सम्बन्ध तक दोनों वक्रों में एक ही मान आवैं गे ।

१७३ । १७० वें प्रक्रम में दिखा आये हैं कि $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}$ इस में केवल ह, $\frac{\text{ताह}}{\text{ताष}}$, और $\frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताष}^2}$ ये हो संख्यायें हैं और इन का मान श्रु, $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}$, और $\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{ताष}^2}$ इन के आश्रित हैं इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताश्रु}}$ इस का मान भी श्रु, $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}$ और $\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{ताष}^2}$ इन के आश्रित हो गा इस लिये जब दोनों वक्रों में श्रु, $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}$ और $\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{ताष}^2}$ ये समान हों तब दोनों वक्रों में $\frac{\text{ताल}}{\text{ताश्रु}}$ यह एक ही हो गा परन्तु दोनों वक्रों में श्रु, $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}$, और $\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{ताष}^2}$ ये तभी समान हों गे जब कि दोनों वक्रों की युति द्वितीयसम्बन्ध से हो गी इस लिये जब दो वक्रों की द्वितीयसम्बन्ध से युति हो गी उस समय में अवश्य दोनों वक्रों में $\frac{\text{ताल}}{\text{ताश्रु}}$ एक ही हो गा ।

१७४। यदि वक्र के उस विन्दु का भुजकोटि जानना हो जहां वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान महत्तम वा न्यूनतम होता है तो स्पष्ट है कि

$$\text{वि} = \frac{\left(1+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}} \text{ इस पर से } \frac{\text{तावि}}{\text{ताय}} = 0 \text{ ऐसा हो गा।}$$

अर्थात् $\frac{\text{तावि}}{\text{ताय}}$

$$= \frac{3\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right)^2\sqrt{1+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} - \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}\left(1+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right)^2} = 0$$

$$\text{वा } 3\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right)^2 - \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}\left(1+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right) = 0$$

$$\text{इस लिये } 3\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right)^2 = \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}\left(1+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)$$

यदि १६७ वें प्रक्रम के (२) के दूसरे समीकरण का तात्कालिक-सम्बन्ध निकालो तो

$$2\frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}_1}{\text{ताय}_1^2} + \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}^1}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}_1}{\text{ताय}_1^2} + (\text{र}_1 - \text{क})\frac{\text{ता}^3\text{र}_1}{\text{ताय}_1^3} = 0$$

$$= 3\frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}_1}{\text{ताय}_1^2} + (\text{र}_1 - \text{क})\frac{\text{ता}^3\text{र}_1}{\text{ताय}_1^3} \text{ इस लिये}$$

$$\frac{\text{ता}^3\text{र}_1}{\text{ताय}_1^3} = -\frac{3\frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{र}_1}{\text{ताय}_1^2}}{\text{र}-\text{क}} = \frac{3\frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}_1}{\text{ताय}_1^2}\right)^2}{1+\frac{\text{तार}_1^2}{\text{ताय}_1^2}}$$

१६७ वें प्रक्रम के (३) और (५) वें समीकरण पर से।

यदि ऐसा वृत्त जानना हो जो वक्र से तृतीयसम्बन्ध से युति करे तो अवश्य $\frac{\text{ता}^3\text{र}_1}{\text{ताय}_1^3} = \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}$ ऐसा हो गा

इस लिये $\frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}\left(1+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right) = 3\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right)^2$

यही ऊपर भी सिद्ध हुआ था। इस पर से यह सिद्ध होता है कि जो वृत्त वक्र से तृतीयसम्बन्ध से युति करता है उस का व्यासार्द्ध ही वक्रजातीयव्यासार्द्ध का महत्तम वा न्यूनतम मान होता है।

१७५। वक्र के प्रत्येक विन्दुसम्बन्धि जो वक्रजातीयकेन्द्र होते हैं उन सब पर गये हुए वक्र को अवलूत कहते हैं और अवलूत के साथ यदि पहले वक्र को (जिस के वक्रजातीयकेन्द्रों से अवलूत बना है) पुकारैं तो उसे अनवलूत कहैं गे। यदि वक्र के उस विन्दुसम्बन्धि (जिस का भुजयुग्म य, र है) वक्रजातीयकेन्द्र का भुजयुग्म य', र', कल्पना करैं तो १६७ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से नीचे के समीकरण उत्पन्न हों गे।

$$\text{य} - \text{य}' + (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} + (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = 0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

वक्र के समीकरण पर से र, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$, और $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ इन का मान, य के फलों में ला सकते हो फिर (१) और (२) में उन का उत्थापन दे कर य' और र' में क्या सम्बन्ध है इसे भी जान सकते हो अर्थात् एक ऐसा समीकरण बना सकते हो जिस का रूप र' = फ (य') ऐसा हो

(जहां य' और र' दोनों य के फल हैं) और तब यही अवलूत का समीकरण हो गा।

यदि (१) समीकरण का य के वश से तात्कालिकसम्बन्ध निकालो तो

$$1 - \frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{तार}'}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = 0$$

$$= 1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} + (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}} - \frac{\text{तार}'}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

परन्तु (२) से $1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} + (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = 0$

इस लिये $\frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}'}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ .... (३)

वा, $1 + \frac{\text{तार}'}{\text{ताय}'} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$, ... (४)

(४) पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान जान कर पहले में उत्थापन देने से

$$\text{र} - \text{र}' = \frac{\text{तार}'}{\text{ताय}'}(\text{य} - \text{य}')$$

इस समीकरण पर से स्पष्ट देख पड़ता है कि वक्र का वह विन्दु (जिस का भुजयुग्म य, र है) अवलूत के उस विन्दु के (जिस का भुज-युग्म य', र', है) स्पर्शरेखा ही में है और १६७ वें प्रक्रम में उसी प्रक्रम के (४) समीकरण (जो इसी प्रक्रम का (१) समीकरण है) से सिद्ध कर चुके हैं कि वक्र के मुख्यलम्ब ही में वक्रजातीयकेन्द्र रहता है इस लिये यह सिद्ध होता है कि वक्र के अर्थात् अनवलूत के किसी विन्दु का मुख्यलम्ब अवलूत के उस विन्दु पर स्पर्शरेखा हो गा जो विन्दु कि अन-वलूत के उस विन्दुसम्बन्धि वक्रजातीयकेन्द्र है।

१७६। वक्र के उस विन्दु का (जिस का भुजयुग्म य, र है) वक्रजातीयव्यासार्द्ध वि और वक्रजातीयकेन्द्र का भुजयुग्म य', र' कल्पना करो तो $\text{वि}^2 = (\text{य} - \text{य}')^2 + (\text{र} - \text{र}')^2$ .... (१)

१७५ वें प्रक्रम में सिद्ध हो चुका है कि य', और र' दोनों य के फल हैं इस लिये तब वि^2 भी य का फल हुआ। इस लिये (१) का तात्कालिकसम्बन्ध य के वश से लेने से,

$$(\text{य} - \text{य}')\left(1 - \frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}}\right) + (\text{र} - \text{र}')\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{तार}'}{\text{ताय}}\right) = \text{वि} \cdot \frac{\text{तावि}}{\text{ताय}}$$

$$= (\text{य} - \text{य}') + (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - (\text{य} - \text{य}')\frac{\text{ताय}'}{\text{ताय}} - (\text{र} - \text{र}')\frac{\text{तार}'}{\text{ताय}}$$

परन्तु $(य - य') + (र - र') \frac{तार}{ताय} = 0$, १७५ वें प्रक्रम के (१) से

इस लिये $(य - य') \frac{ताय'}{ताय} + (र - र') \frac{तार'}{ताय} = - वि \cdot \frac{तावि}{ताय} \cdots (२)$

१७५ वें प्रक्रम के (१) और (३) से नीचे के समीकरण सहज में सिद्ध होते हैं

$$\frac{\frac{ताय'}{ताय}}{य - य'} = \frac{\frac{तार'}{ताय}}{र - र'},$$ इन पर से

$$\pm \left\{ \frac{\frac{ताय'^2}{ताय^2} + \frac{तार'^2}{ताय^2}}{(य - य')^2 + (र - र')^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{ताय'}{ताय}}{य - य'},$$ बीजगणित की युक्ति से

परन्तु $\sqrt{\frac{ताय'^2}{ताय^2} + \frac{तार'^2}{ताय^2}} = \frac{ताचा'}{ताय}$ १५३ वें प्रक्रम से

(चा' अवलूत का किसी नियतस्थान से चाप का मान है)

$$इस\ लिये\ \pm \frac{1}{वि} \cdot \frac{ताचा'}{ताय} = \frac{\frac{ताय'}{ताय}}{य - य'} = \frac{\frac{तार'}{ताय}}{र - र'}$$

इन तीनों से (१) समीकरण के तीनों पदों को क्रम से गुण देने से

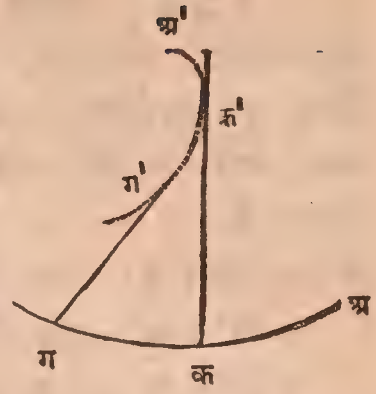
$$\pm वि \cdot \frac{ताचा'}{ताय} = (य - य') \frac{ताय'}{ताय} + (र - र') \cdot \frac{तार'}{ताय} = - वि \cdot \frac{तावि}{ताय}$$

(२) समीकरण से

$$वा,\ वि \cdot \frac{ताचा'}{ताय} = \pm वि \cdot \frac{तावि}{ताय}$$

$$इस\ लिये\ \frac{ताचा'}{ताय} = \pm \frac{तावि}{ताय} \cdots\cdots (३)$$

$$वा,\ \frac{ताचा' \mp तावि}{ताय} = 0 = \frac{ता(चा' \mp वि)}{ताय}$$



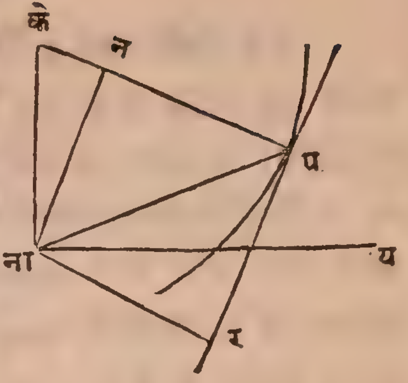
इस लिये चा' ∓ वि = स्थिराङ्क = ट । अकग एक दिया हुआ वक्र है उस के वक्रजातीयकेन्द्रों से बना अ'क'ग' अवलूत है और क, ग विन्दुओं का वक्रजातीयव्यासार्द्ध क्रम से क'क और ग'ग हैं । अवलूत के चाप का आरम्भ अ' से जानो तो अभी ऊपर जैसा सिद्ध किया है उस से अ'क' + क'क = ट

और अ'क'ग' + ग'ग = ट इस लिये क'ग' = क'क − ग'ग इस पर से यह सिद्ध होता है कि ट तुल्य लम्बाई की एक रस्सी लेकर उस के एक अग्र को अ' विन्दु में बांध रस्सी को अ'क'ग' अवलूत के चाप पर मिला कर रक्खो फिर रस्सी के दूसरे अग्र को उठाते जावो तो दूसरे अग्र से जो वक्र हो गा वही दिया हुआ अकग वक्र वा अकग अनवलूत हो गा ।

कल्पना करो कि रस्सी का दूसरा अग्र ग विन्दु में आया तो स्पष्ट है कि वहां रस्सी का ग'ग खण्ड अ'क'ग' अवलूत से अलग और अ'क'ग' खण्ड अ'क'ग' अवलूत से मिला रहे गा और १७५ वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से ग'ग अवलूत की स्पर्शरेखा और अकग अनवलूत का मुख्यलम्ब भी हो गा । देखो रस्सी का खण्डस्थान सर्वदा अ'क'ग' वक्र में रहता है इसी लिये हम ने इस वक्र का अवलूत नाम रक्खा है क्यों कि लुञ् छेदने इस धातु से अव उपसर्ग लगा देने से अवलूत यह पद सिद्ध होता है और उपसर्ग से धातु का अर्थ बदल भी जाता है इस लिये अवलूत से वही अर्थ समझना चाहिये जो अ'क'ग' वक्र के लक्षण के अनुकूल हो ।

यदि इसी क्षेत्र में ग' विन्दु से अ' की ओर चाप की गणना करो तो ज्यों ज्यों चाप बढ़े गा त्यों त्यों वक्रजातीयव्यासार्द्ध भी बढ़े गा इस लिये तब चाप और वक्रजातीयव्यासार्द्ध का अन्तर कोई स्थिराङ्क होगा ।

अ'क'ग' अवलूत में भिन्न भिन्न लम्बाई की रस्सी लगा कर (जिस का एक अग्र अ' विन्दु में बंधा है) उस के दूसरे अग्र से अनेक अनवलूत बना सकते हो जिन सबों में अ'क'ग' एक ही अवलूत हो गा ।



१७७। कल्पना करो कि के वक्रजातीयकेन्द्र, पके = वि, नार = ल, पर, प विन्दु पर स्पर्शरेखा, नान = ल' = केप पर लम्ब, नाप = श्रु, और नाके = श्रु' तो नापके त्रिभुज में

श्रु'^{2} = वि^{2} + श्रु^{2} − २ श्रु · वि · कोज्यानापके

= वि^{2} + श्रु^{2} − २ श्रु · वि · ज्यानापर

= वि^{2} + श्रु^{2} − २ ल · वि .... (१)

और ल'^{2} = पर^2 = श्रु^{2} − ल^2, ... (२)

१६८ वें प्रक्रम से, वि = श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}$ .... (३)

वक्र के समीकरण से ल का मान श्रुति पर से विदित हो जाय गा फिर (१) और (२) में ल का मान जो श्रुति पर से सिद्ध हो गा उस का उत्थापन दे कर श्रु' और ल' पर से एक ऐसा समीकरण बना सकते हो जो कि के विन्दु की स्थिति को प्रकाश करै गा।

१७८। इस प्रक्रम में सब को एकट्ठा स्मरणार्थ लिख कर उपयोगी के श्लोक और दोहे बना कर कुछ उदाहरण कर के दिखलाते हैं।

वक्रजातीयकेन्द्र के जानने के लिये समीकरण।

(१) $\text{र} - \text{र}' = -\dfrac{1 + \dfrac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}{\dfrac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}}$ यहां र' = वक्रजातीयकेन्द्र की कोटि।

(२) $\text{य} - \text{य}' = \dfrac{\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}\left(1 + \dfrac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)}{\dfrac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}}$ यहां य' = वक्रजातीयकेन्द्र का भुज

(३) $वि = \frac{\left(१ + \frac{तार^२}{ताय^२}\right)^{\frac{३}{२}}}{\frac{ता^२र}{ताय^२}}$ ।

(४) $वि = श्रु \cdot \frac{ताश्रु}{ताल}$ ।

(५) $\frac{१}{वि^२} = \left(\frac{ता^२य}{ताचा^२}\right)^२ + \left(\frac{ता^२र}{ताचा^२}\right)^२$ ।

(६) $वि = \frac{\left(ह^२ + \frac{ताह^२}{ताप^२}\right)^{\frac{३}{२}}}{ह^३\left(ह + \frac{ता^२ह}{ताप^२}\right)}$ ।

(७) $\frac{२\left(ह^२ + \frac{ताह^२}{ताप^२}\right)}{ह^२\left(ह + \frac{ता^२ह}{ताप^२}\right)} = २ वि \cdot \frac{ल}{श्रु} = २ ल \cdot \frac{ताश्रु}{ताल}$

= मूलविन्दुगत वक्रजातीयपूर्णज्या ।

(८) $\frac{ताचा}{ताब} = वि =$ वक्रजातीयव्यासार्द्ध

वक्रजातीयव्यासार्द्ध के महत्तम वा न्यूनतममान में

$\frac{ता^३र}{ताय^३}\left(१ + \frac{तार^२}{ताय^२}\right) = ३ \frac{तार}{ताय}\left(\frac{ता^२र}{ताय^२}\right)^२$ ।

(९) $चा' \mp वि =$ स्थिर $= ट$ यहां $चा' =$ अवलूत का चाप ।

(१०) $श्रु'^२ = वि^२ + श्रु^२ - २ल \cdot श्रु \frac{ताश्रु}{ताल}$ और $ल'^२ = श्रु^२ - ल^२$

यहां $श्रु' =$ वक्रजातीयकेन्द्र की श्रुति और $ल' =$ मूलविन्दु से वक्रजातीयव्यासार्द्ध पर पड़ा लम्ब ।

श्लोक ।

चापसम्बन्धवर्गस्य गुणसंज्ञा बुधैः कृता ।
कोटिवेगगतिर्बाहुगतिवर्गहृता हरः ॥
गुणो हरहृतः कोटियुक्तः कोटिर्भवेद् ध्रुवम् ।
वक्रजातीयकेन्द्रस्य चलवेगकलापटो ॥
गुणो हरहृतो बाहुगतिभक्तो हतस्तया ।
कोटिगत्या तदूनो हि बाहुस्तद्बाहुसम्मितिः ॥
घनं यद्गुणमूलस्य तद्भक्तं हरसंज्ञया ।
व्यासार्द्धं वक्रजातीयं सदा वेद्यं धनात्मकम् ॥
श्रुतिः श्रुतिगतिघ्नगुणा लम्बवेगहृता फलम् ।
व्यासार्द्धं वक्रजातीयं भवेद्वा तदृनात्मकम् ॥
प्रथमाद्यस्पर्शरेखाभवाग्रगतिहृद्गतिः ।
चापजा वक्रजातीयं व्यासार्द्धं वा भवेदिह ॥
व्यासार्द्धं वक्रजातीयमवलूतधनुस्तया ।
तद्योगान्तरयोरेकः सर्वदा भवति स्थिरः ॥

दोहा ।

वर्गचापसम्बन्ध को गुण गुनि रखहु सुजान ।
भुजगतिकृतिहृतकोटिगति की गति को हर मान ॥
गुण में हर को भाग दे फल में कोटि मिलाय ।
वक्रजाति के केन्द्र को कोटि कहो हरखाय ॥
हरहृतगुण से कोटिगति गुणि भाजहु भुज चाल ।
भुज में फल को हीन करि ताको भुज कहु हाल ॥
गुण के घन के मूल में हर के भागे जौन ।
वक्रजातिव्यासार्द्ध को मान होत धन तौन ॥
लम्बवेग से भक्तश्रुति श्रुतिगति से गुणि देहु ।
वक्रजातिव्यासार्द्धमिति अथवा धनहि कहेहु ॥
स्पर्शरेखप्रथमाद्यभवकोणवेगहृत जौन ।
चापवेग व्यासार्द्ध वा वक्रजाति को तौन ॥
वक्रजातिव्यासार्द्ध अरु जो अवलूत को चाप ।
दोउ के योग वियोग बिच एक होत थिर आप ॥

उदाहरण (१) जिस परवलय का $र^2 = ४ अय$ यह समीकरण है उस में वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान बतावो और अवलूत का समीकरण बताओ?।

$$यहां\ \frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र},\ \frac{ता^2र}{ताय^2} = -\frac{४अ^2}{र^3}$$

$$इस\ लिये\ वि = \frac{\left(१ + \frac{तार^2}{ताय^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ता^2र}{ताय^2}} = \frac{\left(१ + \frac{४अ^2}{र^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{४अ^2}{र^3}}$$

$$= -\frac{(र^2 + ४अ^2)^{\frac{3}{2}}}{४अ^2} = -\frac{(४अय + ४अ^2)^{\frac{3}{2}}}{४अ^2}$$

$$= -\frac{८अ^{\frac{3}{2}}(य + अ)^{\frac{3}{2}}}{४अ^2} = -\frac{२(य + अ)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{अ}}$$

यहां वक्र नतोदर है और $य + अ = नाप$

$$इस\ लिये\ वि = \frac{नाप^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{अ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$और,\ र - र' = -\frac{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}{\frac{ता^2र}{ताय^2}} = \frac{१ + \frac{४अ^2}{र^2}}{\frac{४अ^2}{र^3}} = \frac{र(र^2 + ४अ^2)}{४अ^2}$$

$$= \frac{र(४अय + ४अ^2)}{४अ^2} = \frac{र(य + अ)}{अ}$$

$$इस\ लिये\ र' = र - \frac{र(य + अ)}{अ} = -\frac{रय}{अ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

इसी प्रकार $य - य' = \dfrac{\dfrac{तार}{ताय}\left(१ + \dfrac{तार^२}{ताय^२}\right)}{\dfrac{ता^२र}{ताय^२}} = \dfrac{तार}{ताय}(र - र')$

$= -२(य + अ)$

इस लिये $य' = य + २(य + अ) = (३य + २अ)$ ...... (३)

यदि (२) और (३) का आपस में सम्बन्ध जानना हो तो

(३) से $य = \dfrac{(य' - २अ)}{३}$ .... (४)

और (२) से $र'^२ = \dfrac{र^२ \cdot य^२}{अ^२} = \dfrac{४अ \cdot य^३}{अ^२} = \dfrac{४य^३}{अ}$ .... (५)

(५) वें में (४) का उत्थापन देने से

$र'^२ = \dfrac{४}{२७अ}(य' - २अ)^३$ यही अवलूत का समीकरण हुआ ।

(२) किसी शङ्कुच्छिन्नवक्र में वक्रजातीयव्यासार्द्धों में वही सम्बन्ध होता है जो कि मुख्यलम्बों के घनों में सम्बन्ध हो गा? ।

१२९ वें प्रक्रम में जो पग है उसी को मुख्यलम्ब समझो तो उसी प्रक्रम की युक्ति से

$मुलं = र\sqrt{१ + \dfrac{तार^२}{ताय^२}} \quad \therefore \quad \dfrac{मुल}{र} = \sqrt{१ + \dfrac{तार^२}{ताय^२}}$

इस लिये $वि = -\dfrac{मुल^३}{र^३ \cdot \dfrac{ता^२र}{ताय^२}}$ क्यों कि शङ्कुच्छिन्न नतोदर हीं

हो गा । परन्तु य अक्ष से शङ्कुच्छिन्न जहां योग क्रिया है उसे मूलविन्दु कल्पना करो तो वक्र का $र^२ = २मय + नय^२$ ऐसा समीकरण हो गा जहां भिन्न भिन्न शङ्कुच्छिन्न में म, और न भिन्न भिन्न हैं

$र^२$ का तात्कालिकसम्बन्ध परम्परा लेने से

$र \cdot \dfrac{तार}{ताय} = म + नय$

$र \cdot \frac{ता''र}{ताय^2} + \frac{तार^2}{ताय^2} = न$, इसे $र^2$ से गुण कर $र\frac{तार}{ताय}$ इस का वर्ग घटा देने से

$$र^3 \cdot \frac{ता''र}{ताय^2} = न \cdot र^2 - (म + नय)^2$$

$$= न(२मय + नय^2) - (म + नय)^2 = - म^2$$ इस का उत्थापन वि के मान में देने से

$$\left.\begin{array}{l} वि = \frac{मुल^3}{म^2} \\ और\ वि' = \frac{मुल'^3}{म^2} \end{array}\right\}$$ इस लिये $\frac{वि}{वि'} = \frac{मुल^3}{मुल'^3}$ यह सिद्ध हुआ।

(३) दीर्घवृत्त के वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान ज्ञान कर उस के अवलूत के परिधि का मान बताओ?।

यहां $र = \frac{क}{अ}\sqrt{अ^2 - य^2}$, $\frac{तार}{ताय} = -\frac{क}{अ}\frac{य}{\sqrt{अ^2 - य^2}}$

और $-\frac{ता''र}{ताय^2} = \frac{अक}{(अ^2 - य^2)^{\frac{3}{2}}}$ इन का उत्थापन वि में देने से

और लघुतमरूप करने से $वि = \frac{(अ^2 - इ^2य^2)^{\frac{3}{2}}}{अक}$

कल्पना करो कि $वि_1$ = बृहद्व्यासाग्रबिन्दुसम्बन्धि वक्रजातीयव्यासार्द्ध और $वि_2$ = लघुव्यासाग्रबिन्दुसम्बन्धि वक्रजातीयव्यासार्द्ध, पहले में $य = - अ$, दूसरे में $य = 0$ इस लिये

$$वि_1 = \frac{(अ^2 - इ^2 \cdot अ^2)^{\frac{3}{2}}}{अक} = \frac{क^2}{अ}$$

$$वि_2 = \frac{(अ^2)^{\frac{3}{2}}}{अ \cdot क} = \frac{अ^2}{क}$$

$$\therefore\ वि_2 - वि_1 = \frac{अ^2}{क} - \frac{क^2}{अ} = \frac{अ^3 - क^3}{अक}$$

परन्तु १७६ वें प्रक्रम से अवलूत के चतुर्थांशपरिधि का मान वि₂ − वि₁ यही हो गा इस लिये अवलूत का परिधि

$= \frac{४}{\text{अक}} (\text{अ}^३ - \text{क}^३)$ यही उत्तर हुआ ।

(४) दीर्घवृत्त में वक्रजातीयव्यासार्द्ध का महत्तममान कहां हो गा? ।

(३) उदाहरण में जो वि सिद्ध हुआ है यहां उस का तात्कालिक-सम्बन्ध अवश्य शून्य हो गा।

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तावि}}{\text{ताय}} = -\frac{३\,\text{इ}^२ \cdot \text{य}\sqrt{\text{अ}^२ - \text{इ}^२\text{य}^२}}{\text{अक}} = 0$$

$$\therefore\ \text{य} = 0 \text{ वा } \text{य} = \pm\frac{\text{अ}}{\text{इ}}$$

परन्तु $\frac{\text{अ}}{\text{इ}} > \text{अ}$ इस लिये दूसरा मान अनुपपन्न है

महत्तम वा न्यूनतममान हो गा इस बात को जानने के लिये $\frac{\text{तावि}}{\text{ताय}}$ इस का फिर सम्बन्ध निकालने से

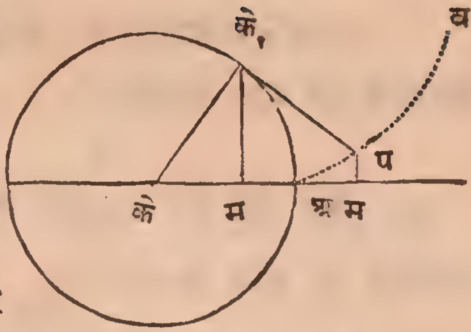
$$\frac{\text{ता}^२\text{वि}}{\text{ताय}^२} = -\frac{३\,\text{इ}^२}{\text{अक}}\sqrt{\text{अ}^२ - \text{इ}^२\text{य}^२} + \frac{३\,\text{इ}^२\text{य}}{\text{अक}} \cdot \frac{\text{ता}\sqrt{\text{अ}^२ - \text{इ}^२\text{य}^२}}{\text{ताय}}$$

इस में य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{ता}^२\text{वि}}{\text{ताय}^२} = -\frac{३\,\text{इ}^२}{\text{क}},\ \text{अर्थात्}\ \frac{\text{ता}^२\text{वि}}{\text{ताय}^२} \text{ ऋण हुआ इस लिये}$$

जब य = 0 तब वि = महत्तम, परन्तु य शून्य तभी हो गा जब लघु-व्यासाग्रविन्दु हो इस लिये लघुव्यासाग्रविन्दुसम्बन्धि वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान महत्तम हो गा। महत्तम वा न्यूनतममान में वृत्त वक्र से तृतीयसम्बन्ध से युति करता है (१७४ वें प्रक्रम से) इस लिये यह वृत्त १६४ वें प्रक्रम से सर्वदा वक्र के साथ स्पर्शमात्र करे गा।

(५) एक वृत्त के अनवलूत को जानना है



कल्पना करो कि वृत्त का केन्द्र के, और अनवलूत का एक खण्ड अपव, $के_1प = के_1अ$ = रस्सी का वक्र से अलग खण्ड, मानो कि $कके_1 = अ$, $< अकेके_1$ = फ और कल्पना करो कि के मूल-विन्दु से प का भुज = य, और कोटि = र तो $के_1प = अ \cdot फ$

य = केम' + म'म = अ · कोज्याफ + अफज्याफ क्यों कि अवलूत के लक्षण से < केके₁प = < समकोण और र = अ · ज्याफ − अ · फ कोज्याफ मानो कि अप = चा तो १५३ वें प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$\frac{ताचा}{ताफ} = \sqrt{\frac{ताय^2}{ताफ^2} + \frac{तार^2}{ताफ^2}}$$

परन्तु $\frac{ताय}{ताफ}$ = अ · ज्याफ + अफ · कोज्याफ − अ · ज्याफ = अफकोज्याफ

और $\frac{तार}{ताफ}$ = अ · कोज्याफ − अ · कोज्याफ + अफज्याफ = अफ · ज्याफ

इन पर से

$$\sqrt{\frac{ताय^2}{ताफ^2} + \frac{तार^2}{ताफ^2}} = \sqrt{अ^2 \cdot फ^2 \cdot कोज्या^2फ + अ^2 \cdot फ^2 \cdot ज्या^2फ} = अफ$$

इस लिये $\frac{ताचा}{ताफ}$ = अ · फ इस पर से इस ग्रन्थ के दूसरे खण्ड से

$चा = \frac{अ \cdot फ^2}{२}$ यही सिद्ध हो गा ।

इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि सब सिद्धान्तों का अच्छी तरह अभ्यास कर जहां जैसा देखें वहां उस प्रकार से उत्तर निकालें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $र = \frac{ग}{२अ}\left(इ^{\frac{अय}{ग}} + इ^{-\frac{अय}{ग}}\right)$ इस वक्र में सिद्ध करो कि कोटिवर्ग और वक्रजातीयव्यासार्द्ध में सर्वदा एक ही सम्बन्ध रहे गा? ।

(२) $र = य^५ + य^३ + १६ य^२$ इस में मूलविन्दु पर वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान बतावो? । उत्तर, $वि = \frac{१}{३२}$ ।

(३) $र = य^३ + \frac{५}{१२८} य^२ + \frac{३}{४} य$ इस में मूलविन्दु पर वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान बतावो? । उत्तर, वि = २५ ।

(४) $र = अ \cdot य^२ + अ_१ य^३ + अ_२ य^४ + \cdots\cdots$ इस में सिद्ध करो कि मूलविन्दु पर वक्रजातीयव्यासार्द्ध $\frac{१}{२ अ}$ यही हो गा ।

(५) $र = अय + अ_१ य^२ + अ_२ य^३ + \cdots$ इस में सिद्ध करो कि मूलविन्दु पर वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान $\frac{(१ + अ^२)^{\frac{३}{२}}}{२ अ_१}$ यही हो गा ।

(६) यदि किसी वक्र का फ(य, र) = 0 ऐसा समीकरण हो तो सिद्ध करो कि

$$वि = \frac{\left\{\left(\frac{ताफ}{ताय}\right)^२ + \left(\frac{ताफ}{तार}\right)^२\right\}^{\frac{३}{२}}}{\left(\frac{ताफ}{तार}\right)^२ \frac{ता^२फ}{ताय^२} - २ \frac{ताफ}{ताय} \cdot \frac{ताफ}{तार} \cdot \frac{ता^२फ}{तायतार} + \left(\frac{ताफ}{ताय}\right)^२ \frac{ता^२फ}{तार^२}}$$

१४६ वां प्रक्रम अच्छी तरह से देखो ।

(७) एक वक्र का फ (य, र) = 0 यह और दूसरे का फा (य, र) = 0 यह समीकरण है दोनों प्रथमसम्बन्ध से युति करते हैं तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ताफ}{ताय} \cdot \frac{ताफा}{तार} - \frac{ताफ}{तार} \cdot \frac{ताफा}{ताय} = 0 ।$$

(८) सिद्ध करो कि यदि $श्रु^२ = वि \cdot ल$ तो श्रुति और ल, से उत्पन्न कोण का मान महत्तम वा न्यूनतम हो गा? ।

(९) यह सिद्ध करो कि वक्रजातीयव्यासार्द्ध के महत्तम वा न्यूनतम मान में $\frac{ता^३य}{ताचा^३} \cdot \frac{ता^२य}{ताचा^२} + \frac{ता^३र}{ताचा^३} \cdot \frac{ता^२र}{ताचा^२} = 0$ ।

(१०) यदि $श्रु = २ अ \cdot ज्या^{२} \frac{१}{२} प$ तो सिद्ध करो कि

$$वि = \frac{४ अ}{३} \cdot ज्या \frac{१}{२} प ।$$

(११) यदि $श्रु = अ (४ कोज्या^{२} \frac{१}{२} प - ३)$ तो सिद्ध करो कि

$$वि = \frac{अ (५ - ४ कोज्याप)^{\frac{३}{२}}}{९ - ६ कोज्याप} ।$$

(१२) यदि $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{र^{२} + अ^{२}}{२ अर}$ तो सिद्ध करो कि

$$वि = \frac{(र^{२} + अ^{२})^{२}}{२ अ (र^{२} - अ^{२})} ।$$

(१३) यदि $चा = \sqrt{य^{२} - अ^{२}}$ तो सिद्ध करो कि

$$वि = \frac{य^{२}}{अ} ।$$

(१४) (१३) प्रश्न में यदि "न" वक्र के स्पर्शरेखा और य अक्ष से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा मानो तो सिद्ध करो कि

$$चा = \left(अ \cdot वि + \frac{न^{२} \cdot अ^{२}}{४} \right)^{\frac{१}{२}} - \frac{नअ}{२} ।$$

(१५) यदि वक्रजातीयकेन्द्र का भुज = $य'$ और कोटि = $र'$ और $श्रु^{२} = य^{२} + र^{२}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\frac{ता^{२} (श्रु^{२})}{तार^{२}}}{२ \frac{ता^{२}य}{तार^{२}}} = य', \quad \frac{\frac{ता^{२} (श्रु^{२})}{ताय^{२}}}{२ \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}} = र' ।$$

(१६) यदि $र^{२} = - \frac{अय^{२} + ग}{क}$ तो सिद्ध करो कि

$$य' = \frac{अ (अ - क)}{क \cdot ग} य^{३}, \text{ और } र' = \frac{क (क - अ)}{अग} र^{३} ।$$

(१७) यदि $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{\sqrt{\text{अ}^2 + \text{चा}^2}}{\text{चा}}$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{वि} = \frac{\text{अ}^2 + \text{चा}^2}{\text{अ}} \text{।}$$

(१८) यदि $\text{य} = \frac{\text{र}^2(\text{य} - ४\,\text{अ})}{\text{अ}(\text{य} - ३\,\text{अ})}$ तो जब $\text{य} = 0$ वा $\text{य} = ३\,\text{अ}$ तब वक्रजातीयव्यासार्द्ध के मान क्या हों गे? ।

उत्तर, क्रम से $\frac{३\,\text{अ}}{८}$, और $\frac{३\,\text{अ}}{२}$ ।

(१९) $\text{चा} = \text{अ} \cdot \text{ज्या}^{\text{न}}\, \frac{१}{२}\,\text{ब}$ इस में वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान बताओ? । यहां ब = वक्र के स्पर्शरेखा और य अक्ष से उत्पन्न कोण का मान,

उत्तर, $\text{वि} = \frac{\text{अन}}{२} \cdot \text{ज्या}^{\text{न}-१}\, \frac{१}{२}\,\text{ब} \cdot \text{कोज्या}\, \frac{१}{२}\,\text{ब}$ ।

(२०) $\text{भु} \cdot \text{कोज्या}^2\, \frac{१}{२}\,\text{ष} = \text{अ}$ इस में वि का मान निकालो? ।

उत्तर, $\text{वि} = २\,\text{अ} \cdot \text{छे}^3\, \frac{१}{२}\,\text{ष}$ ।

(२१) किसी वक्र में अत्यन्त पास के दो मुख्यलम्बों के योग-बिन्दु का भुज और कोटि वही हैं जो कि वक्रजातीयकेन्द्र के भुज-कोटि हैं? ।

(२२) वक्र का चाप, वक्रजातीयव्यासार्द्ध और अवलूत का चाप इन से जो क्षेत्र होता है उस के फल (ग) का तात्कालिकसम्बन्ध सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ताग}}{\text{ताय}} = \frac{\left(१ + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)^2}{२\,\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}} \text{ यही है? ।}$$

(२३) यदि $\text{र} = \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right)$ तो सिद्ध करो कि इस के अवलूत का समीकरण

$$\text{य} = \text{ग}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{र}}{२\,\text{ग}} \pm \sqrt{\frac{\text{र}^2}{४\,\text{ग}^2} - १}\right) - \frac{\text{र}\sqrt{\text{र}^2 - ४\,\text{ग}^2}}{४\,\text{ग}^2}\right\} \text{ ऐसा होगा? ।}$$

(२४) सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त के अवलूत का समीकरण

$$(\text{अ} \cdot \text{य})^{\frac{2}{3}} + (\text{कर})^{\frac{2}{3}} = (\text{अ}^2 - \text{क}^2)^{\frac{2}{3}}$$ ऐसा हो गा? ।

यहां अ = दीर्घवृत्त का बृहद्व्यासार्द्ध और क = लघुव्यासार्द्ध ।

(२५) $\text{य}^2 + \text{र}^2 = १२५$ यह एक वृत्त का समीकरण है, इस के र अक्ष के समानान्तर एक परवलय का र अक्ष है और यह परवलय वृत्त के साथ द्वितीयसम्बन्ध से युति करता है जब कि य = ५ और र = १० तो परवलय का समीकरण बतावो? ।

उत्तर, $(\text{र} - ८)^2 = २(७ - \text{य})$ ।

(२६) अतिपरवलय का $\text{र}^2 = \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}(\text{य}^2 - \text{अ}^2)$ यह समीकरण है इस के अवलूत का समीकरण बनावो? ।

उत्तर, अवलूत का समीकरण $(\text{अय})^{\frac{2}{3}} - (\text{कर})^{\frac{2}{3}} = (\text{अ}^2 + \text{क}^2)^{\frac{2}{3}}$ ।

(२७) परवलय के नाभि में हो कर जो वक्रजातीयपूर्णज्या है उस का मान बतावो? ।

उत्तर, नाभि और इष्टविन्दु के अन्तर का चौगुना ।

(२८) यदि $\text{रय} = \text{अ}^2$ तो अवलूत का समीकरण बनावो? ।

उत्तर, $(\text{य} + \text{र})^{\frac{2}{3}} - (\text{य} - \text{र})^{\frac{2}{3}} = (४\,\text{अ})^{\frac{2}{3}}$ ।

(२९) यदि सर्वदा $\text{र}\sqrt{१ + \frac{\text{ताय}^2}{\text{तार}^2}} = \text{स्थि} = \text{क}$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\text{तार}'}{\text{ताय}'} = \frac{\sqrt{\text{र}'^2 - \text{क}^2}}{\text{क}}$ यहां य', र', वक्रजातीयकेन्द्र के भुजकोटि हैं।

(३०) $\text{श्रु} = \text{अ}(१ + \text{कोज्याप})$ तो सिद्ध करो कि ध्रुवविन्दुगत वक्रजातीयपूर्णज्या $= \frac{४\,\text{श्रु}}{३}$ ।

(३१) सिद्ध करो कि अतिपरवलय के ध्रुवगत वक्रजातीयपूर्णज्या $= \frac{२(\text{नप}^2 - \text{अ}^2 + \text{क}^2)}{\text{नप}}$ यहां न और प क्रम से केन्द्र और वक्र में इष्ट विन्दु है।

(३२) यदि $अ \cdot प = \sqrt{श्रु^2 - अ^2} - अछे^{-1}\left(\frac{श्रु}{अ}\right)$ तो सिद्ध करो कि $ल = \sqrt{श्रु^2 - अ^2}$ यहां ल = ध्रुवविन्दु से स्पर्शरेखा पर लम्ब ।

(३३) यदि $ल^2 = इ^2 \cdot \frac{श्रु^2 - अ^2}{इ^2 - अ^2}$ तो सिद्ध करो कि इस के अवलूत में भी $ल_1^2 = इ^2 \cdot \frac{श्रु_1^2 - अ_1^2}{इ^2 - अ^2}$ यहां $अ_1 = \frac{अ^2}{इ}$ ।

(३४) यदि, $य^{\frac{2}{3}} + र^{\frac{2}{3}} = अ^{\frac{2}{3}}$ तो इस के अवलूत का समीकरण $(य + र)^{\frac{2}{3}} + (य - र)^{\frac{2}{3}} = २ अ^{\frac{2}{3}}$ ऐसा हो गा? ।

(३५) यदि, $\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{२ अ - र}{र}}$ तो इस के अवलूत का समीकरण बतावो? । उत्तर, यदि अवलूत के भुजकोटि को य', र' कहो

तो $\frac{ताय'}{तार'} = -\sqrt{-\frac{२ अ + र'}{र'}}$ ऐसा समीकरण हो गा ।

(३६) यदि $र^3 = अय$ तो सिद्ध करो कि $\frac{तार'}{ताय'} = -३\frac{र^2}{अ}$ यहां य', र' वक्रजातीयकेन्द्र के भुजकोटि हैं ।

(३७) यदि दीर्घवृत्त में मुख्यलम्ब और बृहद्व्यास से उत्पन्न कोण का मान फ मानो तो, सिद्ध करो कि

$$वि = \frac{(नाव \cdot ना'व)^{\frac{3}{2}}}{अ \cdot क} = \frac{क^2}{अ(१ - इ^2ज्या^2फ)^{\frac{3}{2}}}$$ यहां वि = वक्रजातीयव्यासार्द्ध, ना, ना' दोनों नाभी और व दीर्घवृत्त के परिधि में कोई विन्दु है ।

(३८) $र = \sqrt{\frac{य^5}{अ}}$ इस समीकरणसम्बन्धि वक्र के मूलविन्दु के पास में सिद्ध करो कि अवलूत का स्वल्पान्तर से $य \cdot र^2 = \frac{१६}{३} अ$ यह समीकरण हो गा ।

(३९) अनेक दीर्घवृत्त ज्ञात वक्र के एक ही विन्दु से द्वितीय-सम्बन्ध से युति करते हैं तो सिद्ध करो कि उन के केन्द्रों में हो कर जो वक्र बनै गा उस का समीकरण $य \cdot र = स्थि$ यही हो गा ।

(४०) यदि $र = अछे^{-१}(इ^{\frac{य}{अ}})$ तो इस में सिद्ध करो कि जो वक्रजातीयपूर्णज्या य अक्ष के समानान्तर हैं वे सब आपस में तुल्य हों गी? ।

(४१) $र = ज्याय$ इस के अवलूत के असीमपथ की स्थिति बतावो? ।

(४२) $र = अ \cdot स्पय$ इस के अवलूत के असीमपथ की स्थिति बतावो? ।

(४३) $र = अय + कय^{२}$ यह एक परवलय का समीकरण है और यह परवलय $र' = फ(य')$ इस वक्र के मूलविन्दु में द्वितीयसम्बन्ध से युति करता है तो अ, और क का मान बतावो? ।

उत्तर, $अ = \frac{तार'}{ताय'}$, और $क = \frac{१ \, ता^{२}र'}{२ \, ताय'^{२}}$ ।

(४४) दीर्घवृत्त में अनेक समानान्तर पूर्णज्याओं को आधा करने वाली एक ही सरलरेखा केन्द्रगामिनी होती है? इसे ग्यारहवें अध्याय से सिद्ध करो फिर इस रेखा के समानान्तर पूर्णज्याओं का आधा करने वाली दूसरी रेखा भी केन्द्रगामिनी हो गी । ये दोनों रेखावों का दीर्घ-वृत्त के परिधि तक जो खण्ड हैं उन्हें सम्बन्धपूर्णज्या कहते हैं । प्रथम पूर्णज्या के अग्र का वक्रजातीयव्यासार्द्ध वि और दूसरी पूर्णज्या के अग्र का वक्रजातीयव्यासार्द्ध $वि_{१}$ मानो तो सिद्ध करो कि

$$(वि^{\frac{२}{३}} + वि_{१}^{\frac{२}{३}}) अ^{\frac{२}{३}} क^{\frac{२}{३}} = अ^{२} + क^{२} ।$$

(४५) यदि $अ^{\frac{३}{२}} र = अ^{\frac{१}{२}} य^{२} + य^{\frac{५}{२}}$ इस के मूलविन्दु के पास में सिद्ध करो कि स्वल्पान्तर से अवलूत का समीकरण $(र - य')^{३} + र'^{२} य = 0$ यहां य', र' अवलूत के भुजकोटि हैं ।

(४६) वक्रजातीयवृत्त और वक्र का जहां सम्पात हैं वहां से एक ही ओर बहुत अल्प, वृत्त और वक्र में तुल्य चाप ($\triangle$ चा) लेने से जो स्वल्पान्तर से समद्विबाहुत्रिभुज हो गा उस के शिरःकोण का मान सिद्ध करो कि स्वल्पान्तर से $२ ज्या^{-१} \left\{ \frac{१}{३} \cdot \frac{ताबि}{ताचा} \left(\frac{\triangle चा}{२ त्रि} \right)^{२} \right\}$ यही हो गा? ।

(४७) $र^{२} + अय^{२} + २ कयर + २ खय + २ गर + घ = 0$ यह वक्र, $र' = फ(य')$ इस वक्र से चतुर्थसम्बन्ध से युति करता है, इस में क का मान बतावो? ।

$$उत्तर, \ क = \frac{३ \frac{ता^{३}र'}{ताय'^{३}} \left(\frac{ता^{२}र'}{ताय'^{२}} \right)^{२}}{३ \frac{ता^{४}र'}{ताय'^{४}} \cdot \frac{ता^{२}र'}{ताय'^{२}} - ४ \left(\frac{ता^{३}र'}{ताय'^{३}} \right)} - \frac{तार'}{ताय'} \ ।$$

(४८) $अ^{२} = \frac{य^{३}}{र}$ इस वक्र में उस विन्दु का भुज बतावो जहां वक्रजातीयव्यासार्द्ध का न्यूनतममान हो? । उत्तर, $य = \frac{अ}{\sqrt[४]{४५}}$ ।

(४९) ध्रुवविन्दुगत वक्रजातीयपूर्णज्या किसी वक्र में

$$२ \cdot \frac{श्रु \left(\frac{ताश्रु^{२}}{ताध^{२}} + श्रु^{२} \right)}{श्रु^{२} + २ \frac{ताश्रु^{२}}{ताध^{२}} - श्रु \cdot \frac{ता^{२}श्रु}{ताध^{२}}}$$

इस के तुल्य होती है यह पहले सिद्ध करो फिर श्रु = अध इस वक्र में बतावो कि कहां पर ध्रुवगतपूर्णज्या और वक्रजातीयव्यासार्द्ध दोनों परस्पर तुल्य होते हैं? ।

उत्तर, यदि $श्रु = \frac{अ}{\sqrt{३}}$ ।

(५०) किसी वक्र में बतावो किस विन्दु पर वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान अनन्त होता है? । उत्तर, सन्धिस्थान में ।

(५१) एक हाथी अपने सूंड को मुरेर कर इस तरह से खड़ा किया कि उस का तीन खण्ड हो गया उन में पहला और तीसरा खण्ड मिल कर एक ही वक्र हो गया जिस का समीकरण $र = य^{४} + य^{३} + १६\,य^{२}$ यह जान पड़ा और तीसरा खण्ड अधोभाग में वृत्ताकार हो गया और यह पूर्वोक्त वक्र के जिस विन्दु पर योग किया है उसे पूर्वोक्त वक्र के समीकरण मे मूलविन्दु समझना चाहिये । एक ज्योतिषी ने उस वृत्ताकार खण्ड के समीकरण का ज्ञान कर निश्चय किया कि युति विन्दु पर स्पर्शरेखा एक ही है और इस स्पर्शरेखा और य अक्ष से जो कोण उत्पन्न होता है उस की गति भी दोनों में एक ही है तो बतावो उस वृत्त का व्यासार्द्ध कितना था ? । उत्तर, $\frac{१}{३२}$ हाथ ।

इति सप्तदशाध्याय ।

अष्टादशाध्याय १८ ।

अन्वालोप के विषय में ।

१७९ । कल्पना करो कि $फ(य, र, अ) = 0$ .... (१)

यह किसी वक्र का समीकरण है जिस में अ स्थिरसंख्या है । यदि यहां अ के स्थान में अ + च कल्पना करें तो उसी चाल के दूसरे वक्र का $फ(य, र, अ + च) = 0,$ .... (२)

यह समीकरण हो गा । इसे २३ प्रक्रम से

$फ(य, र, अ) + च \cdot फ'(य, र, अ + पच) = 0,$ .... (३)

ऐसा लिख सकते हो । यहां फ' यह दिखलाता है कि

$फ(य, र, अ)$ इस का अ के वश से प्रथम तात्कालिकसम्बन्ध जो हो उस में अ के स्थान में अ + पच का उत्थापन दिया गया है ।

अब यदि जानना हो कि किस विन्दु पर दोनों वक्र आपस में कटते हैं तो स्पष्ट है कि उस विन्दु के भुजकोटि दोनों वक्र में एक ही हों गे इस लिये (१) और (३) समीकरण से

$फ(य, र, अ) = 0,$ और $फ'(य, र, अ + पच) = 0,$ .... (४)

ऐसा समीकरण हो गा ।

यदि च का मान शून्य कल्पना करें तो (४) समीकरण का रूप

फ (य, र, अ) = ०, और फ' (य, र, अ) = ०, ... (५)

ऐसा हो गा ।

इस (५) समीकरण से जो विन्दु उत्पन्न हो गा उस विन्दु को (१) और (२) समीकरण के वक्रों के योग विन्दु का लुप्तमान कहते हैं।

यदि (५) समीकरण पर से अ का मान य और र के मान पर से लावें तो एक नये वक्र का समीकरण उत्पन्न हो गा जो कि "अ" को उत्तरोत्तर बदलने से जितने वक्र हों गे क्रम से उन के परस्पर सम्पातविन्दु को प्रकाश करे गा ।

१८० । कल्पना करो कि फ (य, र, अ) = ० यह एक किसी वक्र का समीकरण है जिस में अ को क्रम से बदलने से एक वक्रों की श्रेढ़ी उत्पन्न होती है तो उन के सम्पातविन्दु के लुप्तमान को प्रकाश करने वाला वक्र का समीकरण १७९ प्रक्रम के (५) वें समीकरण से

फ $\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}$ = ० .... (१)

ऐसा हो गा यहां (५) समीकरण से अर्थात् फ (य, र, अ) = ० और फ' (य, र, अ) = ०, इन पर से मानो कि अ = फा (य, र) ।

अब १७९ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{\text{ताफ (य, र, अ)}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताफ (य, र, अ)}}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ०, \text{ .... } (२)$$

(११९ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण की युक्ति देखो) और इस प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{\text{ताफ }\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताफ }\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$+ \frac{\text{ताफ }\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}}{\text{ताअ}} \left\{\frac{\text{ताफा (य, र)}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताफा (य, र)}}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right\} = ०$$

.... (३)

$$\text{क्यों कि } \frac{\text{ताअ}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताफा (य, र)}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताफा (य, र)}}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

परन्तु सम्पातविन्दु में

$$\frac{\text{ताफ}\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}}{\text{ताअ}} \text{ वा } \frac{\text{ताफ (य, र, अ)}}{\text{ताअ}} = \text{फ}'\text{(य, र, अ)} = 0$$

इस लिये (३) का

$$\frac{\text{ताफ}\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताफ}\left\{\text{य, र, फा (य, र)}\right\}}{\text{तार}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \cdots (४)$$

ऐसा रूप हो गा। इस में फा (य, र) के स्थान में अ का वा (२) समीकरण में अ के स्थान में फा (य, र) का उत्थापन देने से (२) और (४) समीकरण का एक ही रूप हो जाय गा इस लिये ऐसी स्थिति में दोनों पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का एक ही मान आवे गा।

इस लिये १७९ प्रक्रम के (१) समीकरण का वक्र और इस प्रक्रम के (१) समीकरण का वक्र ये दोनों परस्पर स्पर्श करें गे।

यह नया वक्र प्रथम वक्र को स्पर्श करता है इस लिये इस नये वक्र को परस्पर छिन्न वक्रों के श्रेढ़ी का अन्वालोप कहते हैं। अन्वालोप से दोनों अर्थ समझना चाहिये, एक वक्रों को छिपाने वाला, दूसरा वक्रों में स्वयं छिपने वाला।

१८१। यदि किसी वक्र का फ (य, र, अ, क, ग) = 0 ऐसा समीकरण हो जहां अ, क, ग, स्थिराङ्क हैं और इन्हीं स्थिराङ्कों को बदलने से जो परस्पर छिन्न वक्रों की श्रेढ़ी उत्पन्न हो गी उस के अन्वालोप को जानना हो तो यदि

$$\left.\begin{array}{l}\text{फ}_1\text{ (अ, क, ग)} = 0\\ \text{फ}_2\text{ (अ, क, ग)} = 0\end{array}\right\} \cdots (१)$$ ऐसा समीकरण हो तो स्पष्ट है

कि इस पर से क, और ग का मान अ पर से विदित हो जाय गा फिर क, ग के स्थान में उस मान का उत्थापन देने से ठीक वक्र का उसी प्रकार का समीकरण हो जाय गा जैसा कि १७९ वें प्रक्रम के (१) समीकरण है फिर उस पर से पिछले प्रक्रम की युक्ति से अन्वालोप का समीकरण भी विदित हो जाय गा। परन्तु यदि इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से क, ग के मान निकालने में घनसमीकरण इत्यादि हो जाने से काठिन्य पड़े तो ७४ वें प्रक्रम की युक्ति से अन्वालोप का समीकरण

विदित हो जाय गा । जैसे यहां भी कल्पना करो कि अ, क, ग, प्रत्येक (का) चलराशि के फल हैं ।

और $फ = फ(य, र, अ, क, ग) = 0$ .... (२)

$$\therefore \frac{ताफ}{ताअ} + \frac{ताफ}{ताक} \cdot \frac{ताक}{ताअ} + \frac{ताफ}{ताग} \cdot \frac{ताग}{ताअ} = 0, \quad \text{.............. (३)}$$

और, $फ_1 = फ_1 (अ, क, ग) = 0$

$फ_2 = फ_2 (अ, क, ग) = 0$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \frac{ताफ_1}{ताअ} + \frac{ताफ_1}{ताक} \cdot \frac{ताक}{ताअ} + \frac{ताफ_1}{ताग} \cdot \frac{ताग}{ताअ} = 0 \\ \frac{ताफ_2}{ताअ} + \frac{ताफ_2}{ताक} \cdot \frac{ताक}{ताअ} + \frac{ताफ_2}{ताग} \cdot \frac{ताग}{ताअ} = 0 \end{array}\right\} \text{......... (४)}$$

अब फिर यहां कल्पना करो कि

$$\frac{ताअ}{ताका} = डाअ, \frac{ताक}{ताका} = डाक, \frac{ताग}{ताका} = डाग$$

$$\frac{ताक}{ताअ} = \frac{डाक}{डाअ}, \frac{ताग}{ताअ} = \frac{डाग}{डाअ}$$

इन का उत्थापन (३) और (४) समीकरण में देने से

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ताफ}{ताअ} \cdot डाअ + \frac{ताफ}{ताक} \cdot डाक + \frac{ताफ}{ताग} \cdot डाग = 0 \\ \frac{ताफ_1}{ताअ} \cdot डाअ + \frac{ताफ_1}{ताक} \cdot डाक + \frac{ताफ_1}{ताग} \cdot डाग = 0 \\ \frac{ताफ_2}{ताअ} \cdot डाअ + \frac{ताफ_2}{ताक} \cdot डाक + \frac{ताफ_2}{ताग} \cdot डाग = 0 \end{array}\right\} \text{... (५)}$$

(५) में दूसरे समीकरण को, $इ_1$ और तीसरे को $इ_2$ से गुण कर सब को जोड़ देने से

$$डाअ \left(\frac{ताफ}{ताअ} + इ_1 \frac{ताफ_1}{ताअ} + इ_2 \frac{ताफ_2}{ताअ}\right)$$

$$+ डाक \left(\frac{ताफ}{ताक} + इ_1 \frac{ताफ_1}{ताक} + इ_2 \frac{ताफ_2}{ताक}\right)$$

$$+ \text{डाग}\left(\frac{\text{ताफ}}{\text{ताग}} + \text{इ}_1 \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताग}} + \text{इ}_2 \cdot \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताग}}\right) = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (६)$$

कल्पना करो कि इ₁ और इ₂ ऐसे अव्यक्त हैं कि (६) वें में उन के वश से डाअ, डाक और डाग के जो गुणक हैं वे शून्य के समान होते हैं इस लिये तब

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{ताफ}}{\text{ताअ}} + \text{इ}_1 \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताअ}} + \text{इ}_2 \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताअ}} &= 0 \\ \frac{\text{ताफ}}{\text{ताक}} + \text{इ}_1 \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताक}} + \text{इ}_2 \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताक}} &= 0 \\ \frac{\text{ताफ}}{\text{ताग}} + \text{इ}_1 \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताग}} + \text{इ}_2 \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताग}} &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (७)$$

अब, (१), (२) और (७) वें समीकरणों से अ, क, ग, इ₁ और इ₂ के मान ज्ञात हो जायं गे फिर उन पर से अन्वालोप का समीकरण भी विदित हो जाय गा । इसी प्रकार जहां न संख्या के समान स्थिराङ्कों की संख्या हों और उन के सम्बन्ध से न – १ समीकरण बने हों तो भी ऊपर की युक्ति से बड़े लाघव से अ, क, ग इत्यादि के मान आ जायं गे फिर उन पर से अन्वालोप का भी समीकरण विदित हो जाय गा ।

अन्वालोप का समीकरण जानने के लिये

श्लोक ।

फलं चेच्चलराशिभ्यां स्थिरैकेन च खं भवेत् ।
स्थिरं चलं तदा ज्ञात्वा फलसम्बन्धमानयेत् ॥
फलात्फलस्य सम्बन्धात्तथा मानं प्रसाधयेत् ।
स्थिरस्य चलराश्युत्थं तेन वक्रसमीकृतिः ॥

दोहा ।

दुइ चलराशी एक थिर तासों जों फल होय ।
तुल्य शून्य के मानि तहं थिर को चल जिय जोय ॥
फलसम्बन्ध निकारि करि थिर को मान बनाय ।
दोउ चलराशि तें वक्र को कहउ समीकृति धाय ॥

उदाहरण ।

(१) $र = अय + ल\sqrt{अ^2+1}$ यह एक सरलरेखा का समीकरण है इस में मूलविन्दु से सरलरेखा पर लम्ब का मान ल स्थिर है तो बतावो कि अ को बदलने से जितनी सरलरेखायें हों गी उन सब को स्पर्श करने वाले वक्र का कैसा समीकरण हो गा? ।

यहां $फ(य, र, अ) = अय + ल\sqrt{अ^2+1} - र = 0$

इस लिये $फ'(य, र, अ) = य + \frac{ल \cdot अ}{\sqrt{अ^2+1}} = 0$

और $\frac{ल}{य} = -\frac{\sqrt{अ^2+1}}{अ}$

$\therefore \frac{ल^2 - य^2}{य^2} = \frac{1}{अ^2}$ और $अ = \frac{य}{\sqrt{ल^2 - य^2}}$

इस पर से $\sqrt{अ^2+1} = -अ \cdot \frac{ल}{य} = -\frac{ल}{\sqrt{ल^2-य^2}}$

और $र = अय + ल\sqrt{अ^2+1} = \frac{य^2}{\sqrt{ल^2-य^2}} - \frac{ल^2}{\sqrt{ल^2-य^2}}$

$= -\sqrt{ल^2 - य^2} \quad \therefore \; र^2 = ल^2 - य^2$

और $र^2 + य^2 = ल^2$, ल सर्वदा स्थिर है

इस लिये $य^2 + र^2 = ल^2$ यह समीकरण वृत्त का हुआ ।

(२) $\frac{य}{अ} + \frac{र}{क} = 1$ यह एक सरलरेखा का समीकरण है इस में $अ^न + क^न = ग^न$ जहां ग और न सर्वदा स्थिर हैं तो अ को बदलने से जितनी रेखायें हों गी उन सब को स्पर्श करने वाले वक्र अर्थात् अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा? ।

यहां $अ^न + क^न = ग^न \;\; \therefore \; क = (ग^न - अ^न)^{\frac{1}{न}}$

और $फ(य, र, अ) = \frac{य}{अ} + \frac{र}{(ग^न - अ^न)^{\frac{1}{न}}} - 1 = 0$

$$\therefore \text{फ}'(\text{य}, \text{र}, \text{अ}) = -\frac{\text{य}}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र} \cdot \text{अ}^{\text{न}-1}}{(\text{ग}^{\text{न}} - \text{अ}^{\text{न}})^{\frac{\text{न}+1}{\text{न}}}} = 0$$

इस पर से, $\frac{\text{य}}{\text{र}} = \frac{\text{अ}^{\text{न}+1}}{(\text{ग}^{\text{न}} - \text{अ}^{\text{न}})^{\frac{\text{न}+1}{\text{न}}}} \therefore \frac{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}}{\text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}} = \frac{\text{अ}^{\text{न}}}{\text{ग}^{\text{न}} - \text{अ}^{\text{न}}}$

और $\frac{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}}{\text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}} = \frac{\text{ग}^{\text{न}}}{\text{ग}^{\text{न}} - \text{अ}^{\text{न}}}$ इस पर से छेदगम, समशो-

धनादि से $\text{अ} = \frac{\text{स्थि} \cdot \text{य}^{\frac{1}{\text{न}+1}}}{\left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)^{\frac{1}{\text{न}}}}$ इस का उत्थापन क में देने से

$\text{क} = \frac{\text{स्थि} \cdot \text{र}^{\frac{1}{\text{न}+1}}}{\left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)^{\frac{1}{\text{न}}}}$ अ और क का उत्थापन सरलरेखा

के समीकरण में देने से

$$\frac{\text{य}}{\text{अ}} + \frac{\text{र}}{\text{क}} = \frac{\text{य}\left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)^{\frac{1}{\text{न}}}}{\text{स्थि} \cdot \text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}} + \frac{\text{र}\left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)^{\frac{1}{\text{न}}}}{\text{स्थि} \cdot \text{र}^{\frac{1}{\text{न}+1}}}$$

$$= \frac{\left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)^{\frac{1}{\text{न}}}}{\text{स्थि}} \left(\text{य} \cdot \text{य}^{-\frac{1}{\text{न}+1}} + \text{र} \cdot \text{र}^{-\frac{1}{\text{न}+1}}\right)$$

$$= \frac{\text{र}^{\frac{1}{\text{न}+1}}}{\frac{\text{स्थि} \cdot \text{र}^{\frac{1}{\text{न}+1}}}{\left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)^{\frac{1}{\text{न}}}}} \left(\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+1}}\right)$$

$$=\frac{र^{\frac{१}{न+१}}}{क}\left(य^{\frac{न}{न+१}}+र^{\frac{न}{न+१}}\right)=१, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

$$\therefore \; य^{\frac{न}{न+१}}+र^{\frac{न}{न+१}}=\frac{क}{र^{\frac{१}{न+१}}}=स्थि^{\frac{न}{न+१}}$$

क्यों कि क के मान पर से $क^{न}=\dfrac{स्थि^{न}\cdot र^{\frac{न}{न+१}}}{य^{\frac{न}{न+१}}+र^{\frac{न}{न+१}}}$

$$\therefore \; य^{\frac{न}{न+१}}+र^{\frac{न}{न+१}}=\frac{स्थि^{न}\cdot र^{\frac{न}{न+१}}}{क^{न}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

(२) का उत्थापन (१) में देने से

$$\frac{र^{\frac{१}{न+१}}}{क}\cdot\frac{स्थि^{न}\cdot र^{\frac{न}{न+१}}}{क^{न}}=\frac{स्थि^{न}\cdot र}{क^{न+१}}=१$$

$$\therefore \; \frac{स्थि^{\frac{न}{न+१}}\cdot र^{\frac{१}{न+१}}}{क}=१ \quad \therefore \; स्थि^{\frac{न}{न+१}}=\frac{क}{र^{\frac{१}{न+१}}}$$

इस लिये अन्वालोप का समीकरण

$य^{\frac{न}{न+१}}+र^{\frac{न}{न+१}}=स्थि^{\frac{न}{न+१}}$ यही हुआ ।

इस उदाहरण को १८१ प्रक्रम की युक्ति से करो

तो $फ(य, र, अ, क)=\dfrac{य}{अ}+\dfrac{र}{क}-१=0$

$$फ_{१}\,(अ, क)=अ^{न}+क^{न}-ग^{न}=0$$

$$\frac{ताफ}{ताअ}=-\frac{य}{अ^{२}}\,। \quad इ_{१}\,\frac{ताफ_{१}}{ताअ}=इ_{१}न\cdot अ^{न-१}$$

इस लिये १८१ प्रक्रम के (७) समीकरण से

$$\frac{\text{ताफ}}{\text{ताअ}} + \text{इ}_{१} \frac{\text{ताफ}_{१}}{\text{ताअ}} = -\frac{\text{य}}{\text{अ}^{२}} + \text{इ}_{१}\text{न} \cdot \text{अ}^{\text{न}-१} = 0, \quad \cdots\cdots (१)$$

और इसी युक्ति से

$$\frac{\text{ताफ}}{\text{ताक}} + \text{इ}_{१} \frac{\text{ताफ}_{१}}{\text{ताक}} = -\frac{\text{र}}{\text{क}^{२}} + \text{इ}_{१}\text{न} \cdot \text{क}^{\text{न}-१} = 0, \quad \cdots\cdots (२)$$

(१) को अ से और (२) को क से गुण कर जोड़ देने से

$$\text{इ}_{१}\text{न}(\text{अ}^{\text{न}} + \text{क}^{\text{न}}) - \left(\frac{\text{य}}{\text{अ}} + \frac{\text{र}}{\text{क}}\right) = \text{इ}_{१}\text{न} \cdot \text{ग}^{\text{न}} - १ = 0$$

$\therefore\ \text{इ}_{१} = \dfrac{१}{\text{न} \cdot \text{ग}^{\text{न}}}$ इस का उत्थापन (१) और (२) में देने से

$$\frac{\text{अ}^{\text{न}-१}}{\text{ग}^{\text{न}}} - \frac{\text{य}}{\text{अ}^{२}} = 0 \ \therefore\ \text{अ}^{\text{न}+१} = \text{ग}^{\text{न}} \cdot \text{य}, \text{ और } \text{अ} = \text{ग}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}\text{य}^{\frac{१}{\text{न}+१}} ।$$

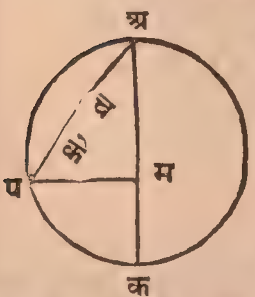
$$\frac{\text{क}^{\text{न}+१}}{\text{ग}^{\text{न}}} - \frac{\text{र}}{\text{क}^{२}} = 0 \ \therefore\ \text{क}^{\text{न}+१} = \text{ग}^{\text{न}} \cdot \text{र}, \text{ और } \text{क} = \text{ग}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}\text{र}^{\frac{१}{\text{न}+१}}$$

अ और क का उत्थापन सरलरेखा के समीकरण में देने से

$$\frac{\text{य}}{\text{अ}} + \frac{\text{र}}{\text{क}} = \frac{\text{य}}{\text{ग}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}\text{य}^{\frac{१}{\text{न}+१}}} + \frac{\text{र}}{\text{ग}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}\text{र}^{\frac{१}{\text{न}+१}}} = \frac{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}}{\text{ग}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}} = १$$

$\therefore\ \text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}} + \text{र}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}} = \text{ग}^{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}$ यही अन्वालोप का समीकरण हुआ ऐसा ही पहले भी आया था परन्तु इस क्रिया में बड़े ही लाघव से आया है इस लिये बहुधा इसी क्रिया से उदाहरणों को करना चाहिये ।

(३) अकप एक वृत्त है जिस का व्यास अक = २अ । अ से एक अप पूर्णज्या बनाई गई है और च विन्दु पर उस का समान दो भाग किया गया है । पच को व्यास मान एक वृत्त पच रेखा के ऊपर ही बनावो तो अप पूर्णज्या को बदलने से वैसे अनेक वृत्त उत्पन्न हों गे अब उन वृत्तों के श्रेढ़ी का अन्वालोप जाना चाहते हैं ।



क्ष को किसी समय में किसी एक वृत्त का केन्द्र समझो ।

कल्पना करो कि अमूलविन्दु और अक रेखा य अक्ष है तो पबिन्दु का $य^2+र^2=२अय$ यही समीकरण हो गा (जहां अम = य, और पम = र) और क बिन्दु का भुज $=\frac{३य}{४}$, और क बिन्दु की कोटि $=\frac{३}{४}र$। अब पच के ऊपर जो वृत्त है उस के परिधिस्थ किसी विन्दु का भुजयुग्म $य', र'$, मानो तो ग्यारहवें अध्याय से वृत्त का समीकरण

$$(य'-\frac{३}{४}य)^2+(र'-\frac{३}{४}र)^2=कच^2=\frac{अय}{८}$$

इस लिये $फ(य',र',र)=(य'-\frac{३}{४}य)^2+(र'-\frac{३}{४}र)^2-\frac{अय}{८}$

$$=य'^2-\frac{३}{२}य'य+\frac{९}{१६}य^2+र'^2-\frac{३}{२}र'र+\frac{९}{१६}र^2-\frac{अय}{८}$$

$$=य'^2+र'^2+\frac{९}{१६}(य^2+र^2)-\frac{अय}{८}-\frac{३}{२}(य'य+र'र)$$

$$=य'^2+र'^2+अय-\frac{३}{२}(य'य+र'र)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

और $फ_1(य,र)=य^2+र^2-२अय=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$

क्यों कि यहां य और र को बदलने से पूर्णज्या भी बदलती है,

अब $\frac{ताफ}{ताय}=अ-\frac{३}{२}य'$। $इ_1\frac{ताफ_1}{ताय}=२इ_1(य-अ)$

१८१ वें प्रक्रम के (७) समीकरण से

$$\frac{ताफ}{ताय}+इ_1\frac{ताफ_1}{ताय}=२इ_1(य-अ)+अ-\frac{३}{२}य'=0, \cdots (३)$$

इसी प्रकार, $\frac{ताफ}{ताय}+इ_1\frac{ताफ_1}{तार}=२इ_1र-\frac{३}{२}र'=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (४)$

(३) को २य से और (४) को २र से गुण कर जोड़ देने से

$$४इ_1(य^2+र^2-अय)+२अय-३य'य-३र'र=$$

$$=४इ_1अय-२(य'^2+र'^2)=0 \quad (१) \text{ और } (२) \text{ से}$$

$$\therefore ४इ_1=\frac{२(य'^2+र'^2)}{अय} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (५)$$

और (३) से $य=\frac{३य'-२अ}{४इ_1}+अ$, इसमें (५) का उत्थापन

देने से $य = \frac{य(३अय' - २अ^२)}{२(य'^२ + र')} + अ$ छेदगम और पक्षान्तरनयन से

$$य = \frac{अ(२य'^२ + २र'^२)}{२(य'^२ + र'^२) - ३अय' + २अ^२}$$ इस का उत्थापन (५) में

देने से $४इ_१ = \frac{२(य'^२ + र'^२) + २अ^२ - ३अय'}{अ^२}$ इस का उत्थापन (४) में

दे कर र का मान निकालने से

$$र = \frac{३र'}{४इ_१} = \frac{३अ^२ \cdot र'}{२(य^२ + र'^२) + २अ^२ - ३अय'}$$ य और र का उत्था-

पन वृत्त के समीकरण अर्थात् $फ_१(य, र)$ में देने से

$$य^२ + र^२ = \frac{अ^२(२य'^२ + २र'^२)^२}{(२य'^२ + २र'^२ + २अ^२ - ३अय')^२}$$

$$+ \frac{९अ^४ \cdot र'^२}{(२य'^२ + २र'^२ + २अ^२ - ३अय')^२}$$

$$= \frac{अ^२\{(२य'^२ + २र'^२)^२ + ९अ^२र'^२\}}{(२य'^२ + २र'^२ + २अ^२ - ३अय')^२}$$

$$= २अय = \frac{२अ^२(२य^२ + २र'^२)}{२य'^२ + २र'^२ + २अ^२ - ३अय'}$$

वा, $(२य'^२ + २र'^२)^२ + ९अ^२र'^२$

$$= २(२य'^२ + २र'^२)(२य'^२ + २र'^२ + २अ^२ - ३अय')$$

$$= २(२य'^२ + २र'^२)^२ + ४अ^२(२य'^२ + २र'^२) - ६अय'(२य'^२ + २र'^२)$$

समशोधन से

$$अ^२ \cdot र'^२ = (२य'^२ + २र'^२)^२ - ६अय'(२य'^२ + २र'^२) + ८अ^२य'^२$$

वा, $अ^२(र'^२ + य'^२) = (२य'^२ + २र'^२)^२$

$$- ६अय'(२य'^२ + २र'^२) + ९अ^२य'^२$$

$$= (२य'^२ + २र'^२ - ३अय')^२$$

इस लिये $अ^२(र'^२ + य'^२) = (२य'^२ + २र'^२ - ३अय')^२$ यह अन्त्यालाप का समीकरण हुआ ।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

(१) $र = अय - \frac{१ + अ^२}{२ क} य^२$ यह एक परवलय का समीकरण है इस में अ के बदलने से जो परवलयों की श्रेढ़ी उत्पन्न हो गी उस के अन्वालोप का समीकरण बतावो?।

उत्तर, $य^२ + २कर - क^२ = 0$ यही अन्वालोप का समीकरण हो गा।

(२) $य' - य + (र' - र) \frac{तार}{ताय} = 0$, यह मुख्यलम्ब का समीकरण है इस में य, र, और $\frac{तार}{ताय}$ इन को बदलने से जो मुख्यलम्बों की श्रेढ़ी हो गी उस का अन्वालोप सिद्ध करो कि वक्र का अवलूत ही हो गा?।

(३) $\frac{य}{अ} + \frac{र}{क} = १$ यह एक सरलरेखा का समीकरण है इस में $अ^३ + क^३ = स्थिराङ्क = ग^३$ यहां अ, और क को चलमान अन्वालोप का समीकरण बनावो?। उत्तर, $य^{\frac{३}{४}} + र^{\frac{३}{४}} = ग^{\frac{३}{४}}$।

(४) (३) प्रश्न में यदि $अ^{\frac{१}{३}} + क^{\frac{१}{३}} = स्थिर = ग^{\frac{१}{३}}$ तो अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा?। उत्तर, $य^{\frac{१}{४}} + र^{\frac{१}{४}} = ग^{\frac{१}{४}}$।

(५) (३) प्रश्न में अ और क का कौन सा घात कर उन के योग को स्थिर कल्पना करें जिस में अन्वालोप वृत्त हो?।

उत्तर, यदि $अ^{-२} + क^{-२} = स्थिर$, तो अन्वालोप अवश्य वृत्त हो गा।

(६) जिस दीर्घवृत्त का $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = १$ यह समीकरण है उस के परिधि के प्रत्येक विन्दु से दोनों व्यासों पर जो दो दो लम्ब डाले गये हैं उन के मूलविन्दु में लगा कर जो रेखायें उत्पन्न होती हैं उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा?।

उत्तर, $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{२}{३}} + \left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{२}{३}} = १$।

(७) बहुत से दीर्घवृत्त बनाये गये हैं जिन का केन्द्र और केन्द्रगत य, र अक्ष एक ही हैं और उन के दोनों व्यासार्द्धों का योग = स्थिर = ग

तो दीर्घवृत्तों के सम्पातविन्दु के लुप्तमानों को बतावो कि किस वक्र में हों गे?। उत्तर, उस वक्र में जिस का समीकरण

$$य^{\frac{2}{3}} + र^{\frac{2}{3}} = ग^{\frac{2}{3}}$$ यह है।

(८) सातवें प्रश्न में यदि $अ^{2} + क^{2} =$ स्थिर $= ग^{2}$ तो अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा?। यहां अ, क क्रम से दोनों व्यासार्द्ध हैं।

उत्तर, $य \pm र = \pm ग$।

(९) यदि (७) वें प्रश्न में $अ^{न} + क^{न} = ग^{न} =$ स्थिर तो बतावो कि अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा?। यहां मानो कि न विषम-संख्या है। उत्तर, $य^{\frac{२न}{न+२}} + र^{\frac{२न}{न+२}} = ग^{\frac{२न}{२न+१}}$।

(१०) नवें प्रश्न के उत्तर में कल्पना करो कि अन्वालोप का समीकरण वृत्त के समीकरण के ऐसा हुआ तो बतावो न का मान क्या है?। उत्तर, $न = \infty$।

(११) अनेक दीर्घवृत्त हैं जिन का केन्द्र और केन्द्रगत य, र अक्ष एक ही हैं और $अ \cdot क =$ स्थिर $= ग^{2}$ तो उन के अन्वालोप का समीकरण बतावो?। यहां अ और क दीर्घवृत्त के दोनों व्यासार्द्ध हैं।

उत्तर, अन्वालोप का समीकरण $२य \cdot र = ग^{2}$।

(१२) यदि (११) वें प्रश्न में $अ \cdot क^{3} =$ स्थिर $=$ ग तो अन्वालोप का समीकरण बतावो?।

उत्तर, अन्वालोप का समीकरण $\frac{१६ य \cdot र^{3}}{३\sqrt{३}} = ग$।

(१३) यदि (११) वें प्रश्न में $अ^{3} \cdot क =$ स्थि $=$ ग तो अन्वालोप का समीकरण बनावो?।

उत्तर, अन्वालोप का समीकरण $\frac{१६ य^{3} र}{३\sqrt{३}} = ग$।

(१४) यदि (११) वें प्रश्न में $अ^{न} क^{म} =$ स्थि $=$ ग तो अन्वालोप का समीकरण बतावो?।

उत्तर, अन्वालोप का समीकरण $\frac{(न+म)^{\frac{न+म}{२}} य^{न} \cdot र^{म}}{\sqrt{न^{न} \cdot म^{म}}} = ग$।

(१५) उस वक्र का समीकरण बतावो? जिस के किसी विन्दु की स्पर्शरेखा मूलविन्दु से जितने अन्तर पर य और र अक्ष को काटै उन अन्तरों का योग = स्थिर = ग, हो ।

उत्तर, उस वक्र का समीकरण $\sqrt{\text{य}} + \sqrt{\text{र}} = \sqrt{\text{ग}}$ ।

(१६) $\text{र} = \text{मय} + \sqrt{\text{म}^2 \cdot \text{अ}^2 + \text{क}^2}$ इस समीकरण में म को बदलने से जितनी सरलरेखायें हों गी उन को स्पर्श करने वाले वक्र का समीकरण बतावो? । उत्तर, $\text{अ}^2 \cdot \text{र}^2 + \text{क}^2\text{य}^2 = \text{अ}^2 \cdot \text{क}^2$ ।

(१७) $\text{य} = \sqrt{४\,\text{च} \cdot \text{कोज्या}^2\text{प}\,(\text{य} \cdot \text{स्पप} - \text{र})}$ इस समीकरण में प को बदलने से जितने वक्र हों गे उन को स्पर्श करने वाले वक्र का समीकरण बतावो? । उत्तर, $\text{र} = \text{च} - \dfrac{\text{य}^2}{४\,\text{च}}$ ।

(१८) (१७) वें प्रश्न में यदि च और प दोनों बदलैं और $\text{च}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{पज्या}\,२\,\text{प} = \text{स्थि} = २\,\text{ग}^2$ तो स्पर्श करने वाले वक्र का समीकरण कैसा हो गा? । उत्तर, $\text{य} \cdot \text{र} = \dfrac{६४\,\text{ग}^2}{२७}$ ।

(१९) अयछेप − करकोछेप = $\text{अ}^2 - \text{क}^2$ इस समीकरण में प को बदलने से जितने वक्र हों गे उन के अन्वालोप का समीकरण बतावो? ।

उत्तर, $(\text{अय})^{\frac{२}{३}} + (\text{कर})^{\frac{२}{३}} = (\text{अ}^2 - \text{क}^2)^{\frac{२}{३}}$ ।

(२०) $\text{र} = \text{य} \cdot \text{स्पप} + \text{ग} \cdot \text{छेप} - \text{ग} \cdot \text{स्पप} \cdot \text{ला}\left(\dfrac{\text{ग}}{४} + \dfrac{\text{प}}{२}\right)$ इस समीकरण में प को बदलने से जितनी सरलरेखायें हों गी उन के अन्वालोप का समीकरण बतावो? । उत्तर, $\text{र} = \dfrac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right)$ ।

(२१) $\text{य} = \dfrac{\text{अ}\,(\text{कोज्या}\,२\,\text{प})^{\frac{३}{२}}}{\text{कोज्या}\,३\,\text{प}} - \text{र} \cdot \text{स्प}\,३\,\text{प}$ इस समीकरण में प को बदलने से जितनी सरलरेखायें हों गी उन को स्पर्श करने वाले वक्र का समीकरण बतावो? । उत्तर, $(\text{य}^2 + \text{र}^2)^2 = \text{अ}^2(\text{य}^2 - \text{र}^2)$ ।

(२२) १८१ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण में यदि अच पर वृत्त बनाया जाय जिस का व्यास भी अच हो तो अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा ? ।

उत्तर, $\text{अ}^{२}(\text{य}'^{२}+\text{र}'^{२})=(२\text{य}'^{२}+२\text{र}'^{२}-\text{अय}')^{२}$ ।

(२३) $\text{श्रु}=\text{अ}\cdot\text{क}^{\text{ष}}$ यह एक सर्पिल का अत्तीयसमीकरण है इस का ध्रुवविन्दु परवलय की नाभि और सर्पिल के किसी विन्दु की स्पर्शरेखा परवलय की नियतरेखा है तो बतावो इस नियम से जितने परवलय हों गे उन को स्पर्श करने वाले वक्र का कैसा समीकरण हो गा ? ।

उत्तर, $\text{श्रु}=\text{अ}'\text{क}^{\text{ष}}$, जहां अ' कोई स्थिराङ्क है ।

(२४) $\text{श्रु}=\dfrac{\text{अ}}{\sqrt[\text{न}]{\text{कोज्यानष}}}$ यह एक सर्पिल का समीकरण है इस के प्रत्येक श्रुत्यग्र पर जो जो लम्बरेखायें हों गी उन सब को स्पर्श करने वाले सर्पिल का कैसा समीकरण हो गा ? ।

उत्तर, $\text{श्रु}=\dfrac{\text{अ}}{\sqrt[\text{म}]{\text{कोज्यामष}}}$, जहां $\text{म}=\dfrac{\text{न}}{\text{न}+१}$ ।

(२५) एक वृत्त जिस का व्यासार्द्ध (अ) है उस के परिधि में अ चिन्ह स्थिर है वहां से कोई पूर्णज्या अप खींच उस का समान दश विभाग कर अ से प की ओर एक विभाग नाप उस को व्यास मान उसी पर एक वृत्त बनाया इसी प्रकार अ चिन्ह से अनेक पूर्णज्या खींच ऊपर ही की युक्ति से अनेक वृत्त बनाये जायं तो उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा ? ।

उत्तर, $\text{अ}^{२}(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})=\left\{१०(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})-\text{अय}\right\}^{२}$ ।

(२६) (२५) वें प्रश्न में यदि प से अ की ओर त्रिभाग नाप कर वृत्त बनावें तो उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा) ? ।

उत्तर, $\text{अ}^{२}(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})=\left\{१०(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})-१९\,\text{अय}\right\}^{२}$ ।

(२७) यदि (२५) वें प्रश्न में पूर्णज्याओं का न समान विभाग किये जायं और अ से प की ओर एक विभाग लेकर उन पर वृत्त बनाये जायं तो अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा ? ।

उत्तर, $\text{अ}^{२}(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})=\left\{\text{न}(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})-\text{अय}\right\}^{२}$ ।

(२८) यदि (२७) वें प्रश्न में प से अ की ओर एक विभाग लेकर उन पर वृत्त बनाये जायं तो अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा? ।

उत्तर, $अ^2 (य^2 + र^2) = \{ न (य^2 + र^2) - अय (२न - १) \}^2$ ।

(२९) $श्रु = क \cdot छे^{न} \frac{प}{न}$ इस वक्र के श्रुति पर श्रुति ही व्यास के वृत्त बनाये गये हैं तो इन के अन्वालोप का समीकरण बतावो? ।

उत्तर, $श्रु = क \cdot छे^{म} \frac{प}{म}$, जहां $म = न - १$ ।

(३०) (२९) प्रश्न में यदि श्रुति का अ, समान विभाग कर ध्रुव से एक विभाग नाप उसी व्यास से उसी पर वृत्त बनाये जायं तो उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा? ।

उत्तर, $क' छे^{म} \frac{प}{म}$, जहां $क' = \frac{क}{अ}$, और $म = न - १$ ।

(३१) $श्रु = अ \cdot क^{प}$ इस सर्पिल में किसी विन्दु की जो स्पर्श-रेखा हो उस पर ध्रुवविन्दु से जो लम्ब डाला गया है उस पर वृत्त बनाये जायं जिन का व्यास लम्ब ही के तुल्य हों तो उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा? ।

उत्तर, $श्रु = अ' क^{प}$, जहां अ' कोई स्थिराङ्क है ।

(३२) एक उन दीर्घवृत्तों की श्रेढ़ी है जिन का केन्द्र और नियतरेखा एक ही है और केन्द्र और नियतरेखा का अन्तर = स्थि = ग, तो बतावो कि दीर्घवृत्तों का अन्वालोप कौन वक्र हो गा, और जब अन्वा-लोप के कोटि का मान ग के आधे के समान हो गा तब दीर्घवृत्त में निष्पत्तिमान क्या हो गा? ।

उत्तर, (१) अन्वालोप परवलय हो गा । (२) $निष्पत्तिमान = \frac{१}{\sqrt{२}}$ ।

(३३) दीर्घवृत्त के केन्द्र से परिधि तक जो रेखा हैं उन को व्यास मान उन्हीं पर वृत्त बनाये गये हैं तो उन के अन्वालोप का समी-करण बतावो? । उत्तर, $(य^2 + र^2)^2 = अ^2 य^2 + क^2 र^2$

जहां अ और क दीर्घवृत्त के बड़े छोटे व्यासार्द्ध हैं ।

(३४) परवलय के नाभिस्थान से परिधि तक जो रेखा खींची गई हैं अर्थात् श्रुति जो हैं उन को व्याससमान उन्हीं पर वृत्त बनाये गये हैं तो उन के अन्वालोप का समीकरण बतावो? ।

$$\text{उत्तर,}\quad श्रु = \frac{स्थि\,(१ - कोज्याध)}{कोज्याध - १ \pm \sqrt{२ - २\,कोज्याध}}\ ।$$

(३५) शङ्कुच्छिन्न वक्र के श्रुति को व्याससमान श्रुति ही पर जो वृत्त बनाये गये हैं उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा? ।

$$\text{उत्तर,}\quad श्रु = \frac{स्थि\,(१ - इ \cdot कोज्याध)}{इकोज्याध - इ^{२} \pm \sqrt{१ - २\,इकोज्याध + इ^{२}}}\ ।$$

(३६) जिस वृत्त का व्यासार्द्ध (अ) है उस के अन्तर्गत जितने समवर्गक्षेत्र बने हैं उन के एक पार्श्व के एक भुजा को स्पर्श करने वाले वक्र का कैसा समीकरण हो गा? । उत्तर, $य^{२} + र^{२} = \frac{अ^{२}}{२}$ ।

(३७) एक ऐसा वक्र है जिस के किसी विन्दु की स्पर्शरेखा य और र अक्ष को मूलविन्दु से जितने अन्तर पर काटो उन का मान क्रम से यदि अ, और क मानो तो $\frac{अ \cdot क}{२} = स्थिर = ग^{२}$ होता है तो उस वक्र का समीकरण बतावो? । उत्तर, $य \cdot र = \frac{ग^{२}}{२}$ ।

(३८) (३७) वें प्रश्न में यदि $अ^{२} \cdot क = स्थि = ग^{३}$ तो वक्र का कैसा समीकरण हो गा? । उत्तर, $\frac{य^{२} \cdot र}{४} = \left(\frac{ग}{३}\right)^{३}$ ।

(३९) (३७) वें प्रश्न में यदि $अ \cdot क^{२} = स्थि = ग^{३}$ तो वक्र का कैसा समीकरण हो गा? । उत्तर, $\frac{य \cdot र^{२}}{४} = \left(\frac{ग}{३}\right)^{३}$ ।

(४०) (३७) वें प्रश्न में यदि $अ^{न} \cdot क^{म} = स्थि = ग^{म + न}$ तो वक्र का कैसा समीकरण हो गा? ।

$$\text{उत्तर,}\quad \left(\frac{य}{न}\right)^{न} \cdot \left(\frac{र}{म}\right)^{म} = \left(\frac{ग}{न + म}\right)^{न + म}\ ।$$

(४१) जिस परवलय का $र^2 = ४ अय$ यह समीकरण है उस के परिधि के प्रत्येक विन्दु को केन्द्र मान नाभिस्थान से उस विन्दु का जितना अन्तर है उस में स्थिर (ग) जोड़ कर उस व्यासार्द्ध से वृत्त बनाये गये हैं तो उन वृत्तों के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा? ।

उत्तर, $0 = \{अ^2 - (ग + य)^2\}\{(र + ग)(र - ग) + (य - अ)^2\}$ ।

(४२) दश मील व्यासार्द्ध से जो वृत्त अगकघ बनाया गया है उस के परिधि पर दो राजाओं की सेनायें खड़ी हैं अक, गघ व्यास परस्पर लम्बरूप हैं । उस में अगक परिध्यर्द्ध में एक राजा की सेना और दूसरे परिध्यर्द्ध में दूसरे राजा की सेना है । अग चाप पर के लोग अघ चाप पर के लोगों को पकड़ने के लिये अपने से नवत्यंश पर जो खड़े थे उन के सामने दौड़े इसी प्रकार पूर्वोक्त नियम से कघ चाप पर के लोग उसी समय कग चाप पर के लोगों को पकड़ने के लिये दौड़े । परन्तु वृत्त के बीच में जो एक कूआ था उस के परिधि को सब केवल स्पर्श ही मात्र करते गये तो बतावो कि कूएं के परिधि का व्यासार्द्ध कितना बड़ा था? । उत्तर, $५\sqrt{२}$ ।

(४३) एक वृत्ताकार वस्त्र खण्ड जिस का व्यासार्द्ध दश हाथ है उस के परिधि में एक स्थिर अ चिन्ह है वहां से उस वृत्त में तन्तुरूप जितनी पूर्णज्या हैं उन का समान त्रिभाग कर मध्य भाग को व्यास मान उसी पर एक एक काले रङ्ग का परिधि बनाया, ये पास पास के दो दो परिधि जिस जिस विन्दु पर कटे उन विन्दुओं में लगा कर एक टेढ़ी पीली धारी बनाया तो सिद्ध करो कि इस पीली धारी के किसी विन्दु से अ चिन्ह तक अन्तर का मान $\dfrac{य^2 + र^2 - १० य}{१०}$ यही हो गा? । यहां य, र, पीली धारी के किसी विन्दु के भुजकोटि हैं ।

इति अष्टदशाध्याय ।

एकोनविंशति अध्याय

वक्रेत्रों के रचना के विषय में ।

इस अध्याय में यही दिखाया जाय गा कि वक्रों के समीकरण पर से कैसे उन की स्थिति जानी जाय गी ।

१८२। विद्यार्थियों को चाहिये कि वक्रों की यथार्थ स्थिति जानने के लिये एक पत्र के ऊपर पहले दो रेखा अपरिमित परस्पर लम्बरूप खींच उन में से एक को य नाम का अक्ष दूसरी को र नाम का अक्ष कल्पना करें। यदि अक्ष परस्पर लम्बरूप न हों तो पूछने वाला उन के बीच का जितना बड़ा कोण बतावे उतना बड़ा कोण बनाने वाली रेखाओं में से एक को य अक्ष दूसरी को र अक्ष कल्पना करें। मूलविन्दु से कोई एक दिशा में धन अक्ष दूसरी दिशा में ऋण अक्ष मान फिर वक्र के समीकरण में य के स्थान में $\pm १, \pm २, \pm ३, \pm ४$, आदि का उत्थापन दे कर प्रत्येक मान सम्बन्धि र का मान निकालें। मूलविन्दु से य अक्ष में सलाका से १, २, ३, ४, आदि मापन कर प्रत्येक विन्दुओं से र अक्ष के समानान्तररेखा खींचें। इसी प्रकार मूलविन्दु से यथादिक् र अक्ष में प्रत्येक य सम्बन्धि र मानों की गणना कर प्रत्येक विन्दु से य अक्ष के समानान्तररेखा खींचें। ये समानान्तररेखायें अपनी अपनी य मान सम्बन्धि पूर्वोक्त समानान्तररेखाओं को जहां जहां काटें उन विन्दुओं में एक वक्ररेखा कर देने से जैसी आकृति हो वही वक्र की आकृति समझ लें। यदि वक्र में किसी विन्दुसम्बन्धि स्पर्शरेखा वा वक्र का असीमपथ इत्यादि जानना हो तो पिछले अध्यायों से स्पर्शरेखासम्बन्धि वा असीमपथ इत्यादि सम्बन्धि य, और र के मानों को जान उन मानों को य, और र अक्षों में देकर पूर्ववत् समानान्तर-रेखा खींच उन की स्थिति समझें।

१८३। यदि वक्र का अक्षीय समीकरण दिया हो तो निर्दिष्ट-रेखा में ध्रुवचिन्ह कल्पना कर वहां से निर्दिष्टरेखा से अभीष्टकोण बनाने वाली रेखा खींचो। अभीष्टकोण का समीकरण में उत्थापन दे कर श्रुति का मान निकालो। इस श्रुतितुल्यरेखा को मूलविन्दु से अभीष्ट-कोण बनाने वाली रेखा में दान दे कर इस के अग्र में वक्र का एक विन्दु समझो फिर इसी प्रकार वक्र के अनेक विन्दुओं का स्थान जान उन में एक वक्ररेखा लगा देने से जैसी आकृति हो वही आकृति उस वक्र का समझो।

यहां भी स्पर्शरेखा इत्यादि सम्बन्धि ष, और श्रु जान उन की स्थिति जान सकते हो।

१८४। इस प्रक्रम में १८२ और १८३ प्रक्रमों का अच्छी भांति बोध होने के लिये कुछ उदाहरणों को कर के दिखलाते हैं।

उदाहरण।

(१) $र = य\left(\frac{य - २अ}{य - अ}\right)$ इस समीकरण के वक्र की आकृति जानना है।

यहां कल्पना करो कि

$य = 0, \therefore र = 0$

$य < अ \therefore$ र तुल्य हो गा किसी धनसंख्या के।

$य > अ < २अ, \therefore$ र तुल्य हो गा किसी ऋणसंख्या के।

$य = २अ, \therefore र = 0$

$य > २अ \therefore$ र तुल्य हो गा किसी धनसंख्या के।

$य = \infty \therefore र = \infty$

फिर कल्पना करो कि य के स्थान में −य है तो

$र = -य\left(\frac{य + २अ}{य + अ}\right)$ इस लिये ऐसी स्थिति में र सर्वदा ऋण हो गा।

(१२३) वें प्रक्रम से असीमपथ का समीकरण जानने के लिये,

$$र = य\left(\frac{य - २अ}{य - अ}\right) = य\left(\frac{१ - \frac{२अ}{य}}{१ - \frac{अ}{य}}\right)$$

$$= य\left(१ - \frac{२अ}{य}\right)\left\{१ + \frac{अ}{य} + \cdots\right\}$$

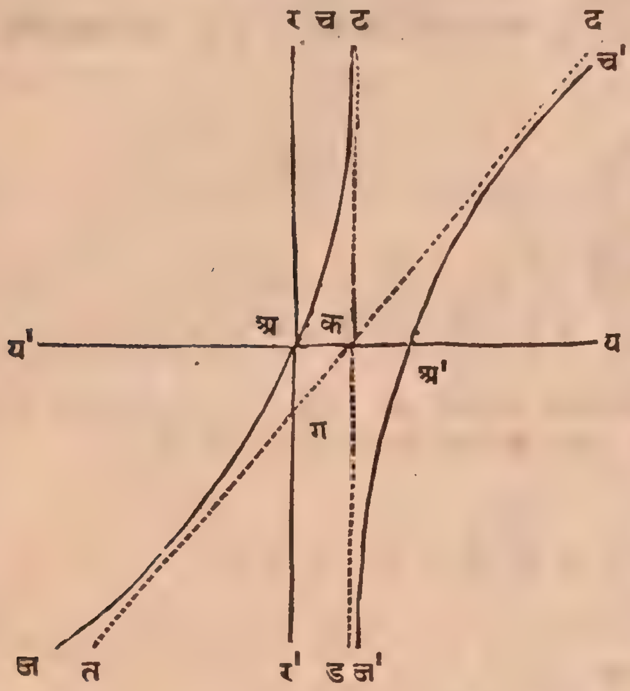
$$= य - अ - \frac{२अ}{य} - \cdots$$

$\therefore$ असीमपथ का समीकरण $र = य - अ$ यही हुआ यदि वक्र की स्पर्शरेखा जानना हो तो (११६) वें प्रक्रम से

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{य - २अ}{य - अ} + य\,\frac{(य - अ) - (य - २अ)}{(य - अ)^२}$$

$$= \frac{य^२ - ३अय + २अ^२}{(य - अ)^२} + \frac{अय}{(य - अ)^२} = \frac{(य - अ)^२ + अ^२}{(य - अ)^२}$$

यदि य = अ, तो र = ∞, और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \infty$ इस लिये जब य = अ तब भी एक असीमपथ हो गा ।



अब यदि रर', य'य रेखाओं को र, य अक्ष, अ को मूलचिन्ह, अय, अर धन दिशा अय', अर' ऋणदिशा कल्पना करो, तो जब तक य का धनमान अ संख्या से अल्प हो गा तब तक, अच खण्ड वक्र का बने गा । जब य = अ = अक तब र = ∞ इस लिये डकटरेखा अच खण्ड का असीमपथ हो गी । जब य > अ < २ अ, तब र ऋण हो गा इस लिये ऐसी स्थिति में वक्र का अ'ज' खण्ड हो गा । उस का भी असीमपथ डकटरेखा ही हो गी, जब य = २ अ, = अअ' तब र = ० फिर जब य > २ अ तब र सर्वदा धन हो गा इस लिये उस समय में अ'च' खण्ड उत्पन्न हो गा । इस का असीमपथ जानने के लिये अभी ऊपर जो र = य − अ यह असीमपथ का समीकरण लिख आये हैं उस में जब य = ०, तो र = − अ = अग ।

और जब र = ० तो य = अ = अक, इस लिये कग में रेखा कर देने से अ'च' खण्ड का तगकद रेखा असीमपथ हो गी । यदि य ऋण मानो तो अज खण्ड भी उत्पन्न हो गा जिस का असीमपथ तगकद रेखा ही हो गी । यों जअच और ज'अ'च' खण्ड मिल कर वक्र की यथार्थ आकृति को प्रकाश करते हैं । $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ इस का मान जान कर य अक्ष के अपेक्षा वक्र में नतत्व वा उन्नतत्व है इस का भी ज्ञान कर सकते हो ।

(२) $र^2 = \frac{य^2(य^2 - ४ अ^2)}{य^2 - अ^2}$ .... (१)

इस समीकरण के वक्र की आकृति जानना है ।

यहां पहले दोनों पक्षों का लघुरिक्थ ले कर उन का तात्कालिक-सम्बन्ध निकालने से

$\frac{१}{र} \cdot \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य} + \frac{य}{य^2 - ४ अ^2} - \frac{य}{य^2 - अ^2}$, इस लिये

$$\frac{तार}{ताय} = \pm \frac{य\sqrt{य^2 - ४ अ^2}}{\sqrt{य^2 - अ^2}} \left(\frac{१}{य} + \frac{य}{य^2 - ४ अ^2} - \frac{य}{य^2 - अ^2}\right) \cdots \quad (२)$$

असीमपथ का समीकरण जानने के लिये (१) समीकरण का रूपान्तर करने से

$$र^2 = \frac{य^2\left(१ - \frac{४ अ^2}{य^2}\right)}{१ - \frac{अ^2}{य^2}}$$

$$इस\ लिये\ र = \pm य\left(१ - \frac{४ अ^2}{य^2}\right)^{\frac{१}{२}} \left(१ - \frac{अ^2}{य^2}\right)^{-\frac{१}{२}}$$

$$= \pm य \left\{१ - \frac{२ अ^2}{य^2} - \frac{२ अ^४}{य^४} - \cdots\right\} \left\{१ + \frac{अ^2}{२ य^2} + \frac{३ अ^४}{८ य^४} + \cdots\right\}$$

$$= \pm य\left(१ - \frac{३ अ^2}{२ य^2} \cdots\right)\ इस\ लिये\ र = \pm य, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

यह असीमपथ का समीकरण हुआ । परन्तु जब $य = \pm अ$, तब $र = \infty$, इस लिये असीमपथ में $य = अ$, वा, $य = -अ$ अब (१) समीकरण में जब $य = 0$, $र = 0$ $\therefore \frac{तार}{ताय} = \pm २$

$+0$ से ले कर $+ अ$ तक य के मान में र का संभव ही मान आवे गा, और तब तक र के धन मान में अग खण्ड, और ऋण मान में अच खण्ड सिद्ध हो गा, -0 से ले कर $-अ$ तक य के मान में भी र का

सम्भव मान हो गा और तब तक र के धन और ऋण मान में क्रम से अग' और अच' खण्ड सिद्ध हों गे। यदि य $=\pm$ अ तो र $=\pm\infty$

और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\infty$ इस लिये चकग, और च'क'ग' दोनों सरलरेखा क्रम से चअग और च'अ'ग' खण्ड की स्पर्शरेखा हों गी।

जब तक $\pm$अ से ले कर $\pm$२अ तक य का मान हो गा तब तक र का असम्भव मान हो गा फिर जब $\pm$२अ से $\pm\infty$ तक हो गा तब तक र का सम्भव मान हो गा इस लिये ऐसी स्थिति में र के धन और ऋण मान लेने से य के धन और ऋण मान में क्रम से जअ'ज' और टछट' खण्ड उत्पन्न हों गे। अब जब य $=\pm\infty$, तब र $=\pm\infty$ इस लिये

$$\text{तब } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\pm\frac{\text{य}\sqrt{\text{य}^2-४\text{अ}^2}}{\sqrt{\text{य}^2-\text{अ}^2}}\left(\frac{१}{\text{य}}+\frac{\text{य}}{\text{य}^2-४\text{अ}^2}-\frac{\text{य}}{\text{य}^2-\text{अ}^2}\right)$$

$$=\pm\frac{\sqrt{१-\frac{४\text{अ}^2}{{}^2\text{य}}}}{\sqrt{१-\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}}}\left(१+\frac{\text{य}^2}{\text{य}२-४\text{अ}^2}-\frac{\text{य}^2}{\text{य}^2-\text{अ}^2}\right)$$

$$=\pm\sqrt{\frac{१-\frac{४\text{अ}^2}{\text{य}^2}}{१-\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}}}\left(१+\frac{१}{१-\frac{४\text{अ}^2}{\text{य}^2}}-\frac{१}{१-\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}}\right)$$

$$=\pm १ \text{ जब य}=\infty$$

और (३) समीकरण दिखलाता है कि असीमपथ मूलविन्दु में हो कर जाता है इस लिये अ'ज, और छट' खण्ड की ट'अज रेखा और अ'ज' और छट खण्ड की ज'अट रेखा असीमपथ हों गी।

(१) समीकरण से वक्र की कोटि

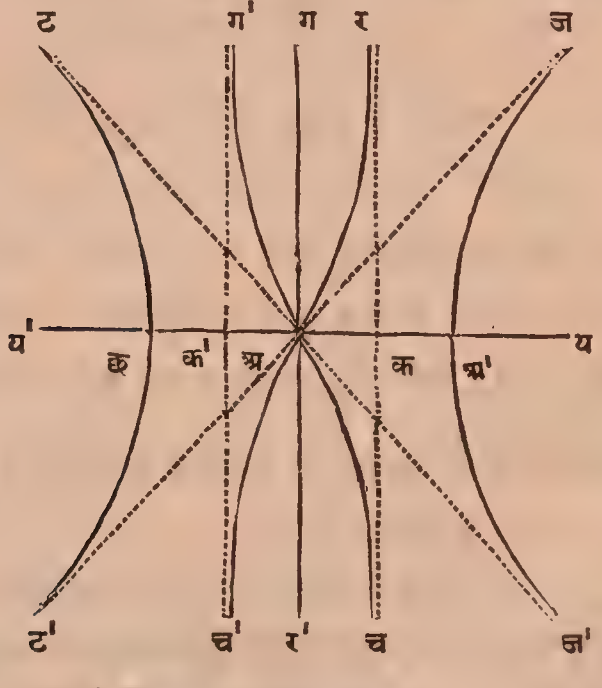
र $=$ य $-\frac{३\text{अ}^2}{२\text{य}}\cdots$, और (३) समीकरण से असमीपथ की कोटि, र $=$ य, इस लिये दोनों समीकरणों से स्पष्ट है कि एक ही महद्भुज में वक्र की कोटि से असीमपथ की कोटि बड़ी होती है इस लिये वक्र से ऊपर

ही ऊपर असीमपथ रहे गा । यहां ११९ वें प्रक्रम से भी यदि य, और र के अनन्त मान में स्पर्शरेखा और र अक्ष का सम्पात मूलविन्दु से ले आवो तो दोनों शून्य ही हों गे क्यों कि जब $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = १ \therefore \text{ र} - \text{य}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$

$= \text{र} - \text{य}$ परन्तु (१) समीकरण से $\text{र} = \text{य}\sqrt{\frac{\text{य}^2 - ४\,\text{अ}^2}{\text{य}^2 - \text{अ}^2}}$

$= \text{य}\sqrt{\frac{१ - \frac{४\,\text{अ}^2}{\text{य}^2}}{१ - \frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}}} = \text{य}$ जब $\text{य} = \infty$, इस लिये $\text{य} = \text{र}$ तब $\text{र} - \text{य} = 0$,

इसी प्रकार $\text{य} - \text{र}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}$ इसे भी शून्य के समान दिखा सकते हो।



(३) $\text{र}^2 = \frac{\text{य} + \text{अ}}{\text{य} - \text{अ}}(\text{य}^2 - \text{अय} + \text{अ}^2)$ .... (१)

इस वक्र की आकृति जानना है । यहां (१) का मूल लेने से

$$\text{र} = \pm\sqrt{\frac{\text{य} + \text{अ}}{\text{य} - \text{अ}}}\sqrt{\text{य}^2 - \text{अय} + \text{अ}^2} \text{ .... } (२)$$

यहां यदि य = ० तो र = असम्भवमान और जब तक य < अ तब तक र असम्भव हो गा। यदि य = अ, तो $र = \pm\infty$

जब तक य > अ तब तक र का धन और ऋण दोनों मान सम्भव हों गे।

जब $य = \infty$ तब $र = \pm\infty$

इस लिये जब य > अ तब र के धन और ऋण मान में क्रम से गपग' और जप'ज' खण्ड उत्पन्न हों गे जहां अक = अ। यह तो य के धन मान में स्थिति हुई अब य के ऋण मान में कैसी स्थिति हो गी उसे दिखलाते हैं।

(२) समीकरण में य के स्थान में −य का उत्थापन देने से

$$र = \pm \sqrt{\frac{य - अ}{य + अ}} \sqrt{(य^2 + अय + अ^2)}$$

इस लिये जब तक य < अ तब तक र का असम्भव मान हो गा।

जब य = अ, तो र = 0

और जब तक य > अ तब तक र का सम्भव मान आवे गा। इस लिये य के ऋण मान में जब य अ से अधिक है तब र के धन और ऋण मान में क्रम से अ'ट और अ'ट' खण्ड उत्पन्न हों गे जहां अअ' = अ

(१) समीकरण के भाज्य को सवर्णन कर लघुरिक्थ लेने से,

$$२ \text{ लार} = \text{ला}(य^3 + अ^3) - \text{ला}(य - अ)$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{र}{२}\left(\frac{३य^2}{य^3 + अ^3} - \frac{१}{य - अ}\right)$$

$$= \frac{र}{२}\left\{\frac{३य^3 - ३अय^2 - य^3 - अ^3}{(य^3 + अ^3)(य - अ)}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{य^3 + अ^3}\,(२य^3 - ३अय^2 - अ^3)}{२\sqrt{य - अ}\,(य^3 + अ^3)(य - अ)}$$

$$= \frac{२ य^३ - ३ अय^२ - अ^३}{२ (य - अ)^{\frac{३}{२}} \sqrt{य^३ + अ^३}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

यदि य = अ तब, $र = \pm \infty$ और $\frac{तार}{ताय} = \infty$

इस लिये जकग रेखा एक असीमपथ हुई । और असीमपथ जानने के लिये (२) समीकरण से

$$र = \pm \sqrt{\frac{१ + \frac{अ}{य}}{१ - \frac{अ}{य}}} \cdot य \sqrt{१ - \frac{अ}{य} + \frac{अ^२}{य^२}}$$

$$= \pm \frac{१ + \frac{अ}{२य} + \cdots}{१ - \frac{अ}{२य} + \cdots} \cdot य \left(१ - \frac{अ}{२य} + \frac{३ अ^२}{८ य^२} \cdots \right)$$

$$= \pm य \left\{ १ + \frac{अ}{य} + \cdots \right\} \left\{ १ - \frac{अ}{२य} + \frac{३ अ^२}{८ य^२} + \cdots \right\}$$

$$= \pm (य + अ + \cdots) \left(१ - \frac{अ}{२य} + \cdots \right)$$

$= \pm \left(य + \frac{अ}{२} + \cdots \right)$ इस लिये असीमपथ का समीकरण

$र = \pm \left(य + \frac{अ}{२} \right)$ यही हुआ यहां यदि $र = 0$ तो, $य = - \frac{अ}{२}$

और यदि $य = 0$ तो $र = \pm \frac{अ}{२}$

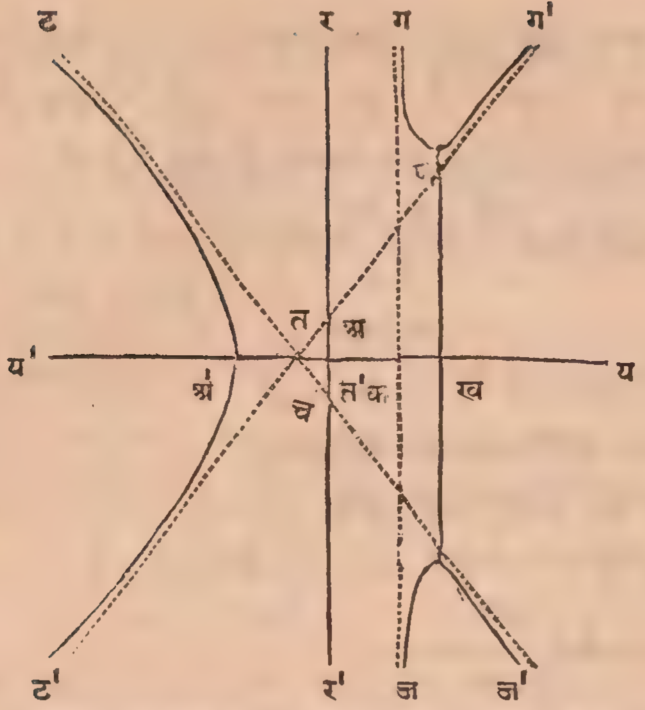
इस लिये कल्पना करो कि $अच = \frac{अ}{२}$

और $अत = अत' = \frac{अ}{२}$, तब टचज' और ट'चग' ये दोनों रेखा भी दो असीमपथ हुई ।

यदि $\frac{तार}{ताय} = 0$ तो (३) समीकरण से र के न्यूनतम मान में

$$२ य^३ - ३ अय^२ - अ^३ = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (४)$$

ऐसा समीकरण हो गा यहां यदि य = २अ तो (४) का मान $- २ अ^३$ और यदि य = २अ तो (४) का मान $३ अ^३$ इस लिये र के न्यूनतममान में य का मान अ और २अ के बीच में हो गा । मानो कि वह य = अख तब र = पख = प'ख ।



(४) $र^{२} = \frac{य(य - अ)(य - २अ)}{य + ३अ}$ .... (१)

इस समीकरण के वक्र की आकृति जानना है ।

यहां (१) समीकरण के दोनों पक्षों का लघुरिक्थ ले तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{२}{र} \cdot \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य} + \frac{१}{य - अ} + \frac{१}{य - २अ} - \frac{१}{य + ३अ}$$

$$\therefore \frac{तार}{ताय} =$$

$$\frac{१}{२}\left\{\frac{य(य - अ)(य - २अ)}{य + ३अ}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$\left\{\frac{१}{य} + \frac{१}{य - अ} + \frac{१}{य - २अ} - \frac{१}{य + ३अ}\right\} \text{......} \quad (२)$$

असीमपथ जानने के लिये (१) समीकरण से

$$र = \pm य\left(१ - \frac{अ}{य}\right)^{\frac{१}{२}}\left(१ - \frac{२य}{य}\right)^{\frac{१}{२}}\left(१ + \frac{३अ}{य}\right)^{-\frac{१}{२}}$$

$$=\pm य\left(१-\frac{अ}{२य}-\frac{अ^२}{८य^२}\right)\left(१-\frac{अ}{य}-\frac{अ^२}{२य^२}\cdots\right)\left(१-\frac{३अ}{२य}+\frac{२७अ^२}{८य^२}\cdots\right)$$

तीनों य के गुणरूप श्रेढ़ियों को आपस में गुण देने से

$$र=\pm य\left(१-\frac{३अ}{य}+\frac{११अ^२}{२य^२}\cdots\right)$$

$$=\pm\left(य-३अ+\frac{११अ^२}{२य}\cdots\right) \cdots\cdots (३)$$

इस लिये असीमपथ का समीकरण

$र=\pm(य-३अ)$ यही हुआ .... (४)

परन्तु यदि $य=-३अ$ तो (१) और (२) से

$र=\pm\infty$ और $\frac{तार}{ताय}=\infty$।

इस लिये जब $य=-३अ$ तब भी एक असीमपथ हो गा।

जब $य=0$, $र=0$, $\frac{तार}{ताय}=\infty$ शून्य से ले कर अ तक य के मान में र का सम्भव द्विविध मान आवे गा।

जब $य=0$, $र=0$, $\frac{तार}{ताय}=\infty$

इस लिये य के शून्य से ले कर अ तक मान में वक्र का अछअ'छ'अ खण्ड उत्पन्न हो गा। अ से ले कर २अ तक य के मान में र का असम्भव मान हो गा।

जब $य=२अ$, $र=0$, $\frac{तार}{ताय}=\infty$

जब $य=२अ$ तब र का सम्भव द्विविध मान आवे गा ऐसी स्थिति में वक्र का जकज' खण्ड उत्पन्न हो गा।

$य=-य$ तो (१) समीकरण का रूप

$$र^२=\frac{-य(-य-अ)(-य-२अ)}{-य+३अ}=\frac{य(य+अ)(य+२अ)}{३अ-य}$$

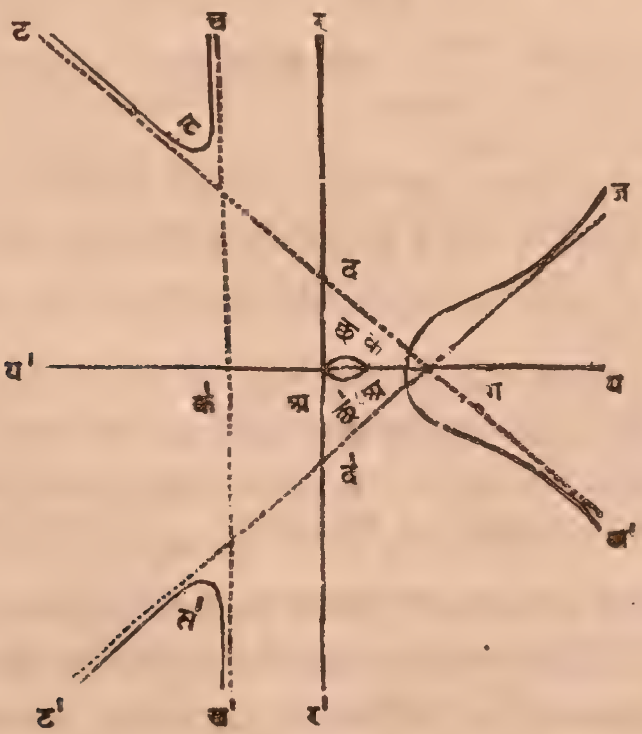
$$\therefore र=\pm\sqrt{\frac{य(य+अ)(य+२अ)}{३अ-य}}$$

इस लिये जब तक य, ३ अ से अल्प र हे गा तब तक र का असम्भव मान हो गा।

जब य > ३ अ तब सर्वदा र का सम्भव द्विविध मान हो गा। ऐसी स्थिति में र के धन और ऋण मान में क्रम से वक्र का चतट और च'त'ट' खण्ड उत्पन्न हों गे।

(४) समीकरण से जब य = ० तो र = ± ३ अ और जब र = ० तो य = ३ अ। अब मानो कि अग = ३ अ, अद = अद' = ३ अ, तो दग, द'ग रेखा ये दो असीमपथ हुईं। और तीसरा असीमपथ चक'च' रेखा हुई जहां य = − ३ अ, और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \infty$।

और चाहे य धन वा ऋण हो (३) और (४) से सिद्ध कर सकते हो कि एक ही भुज में वक्र की कोटि असीमपथ की कोटि से बड़ी हो गी इस लिये असीमपथ से ऊपर ही वक्र रहे गा।



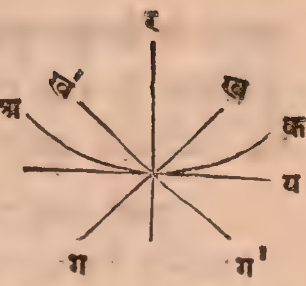
(५) मूलविन्दु के आसन्न में, $\text{अय}^3 - \text{अ}_1\text{रय}^2 + \text{अ}_2\text{र}^3 = 0$ इस समीकरण के वक्र की आकृति जानना है।

पहले मूलविन्दु के आसन्न में $अ_2र^3$ इसे छोड़ दो तो वक्र का समीकरण $अय^4 - अ_1रय^2 = 0$ इस पर से $य^2 = \frac{अ_1}{अ} \cdot र$ ऐसा हो गा।

वा $र = \frac{अ}{अ_1} \cdot य^2$ इस का उत्थापन छोड़े हुए पद में अर्थात् $अ_2र^3$ इस में देने से $अ_2र^3 = \frac{अ_2 \cdot अ^3 \cdot य^6}{अ_1^3}$ इस लिये य का अल्प मान मानने से $अ_2र^3$ इस पद को चाहे जितना छोटा बना सकते हो गृहीतपदों के अपेक्षा। इस लिये मूलविन्दु के पास पास वक्र की एक शाखा स्वल्पान्तर से जान सकते हो जिस का समीकरण $र = \frac{अ}{अ_2} य^2$ यह एक परवलय का समीकरण हुआ।

कल्पना करो कि वास्तव वक्र के समीकरण में दूसरा पद बहुत अल्प है इस लिये उसे छोड़ देने से वक्र का समीकरण $अय^4 + अ_2र^3 = 0$, इस पर से $र = \sqrt[3]{-\frac{अ \cdot य^4}{अ_2}}$ इस का उत्थापन छोड़े हुए पद में देने से छोड़े हुए पद में $य^{\frac{10}{3}}$ यह आवै गा। और गृहीतपदों में $य^4$ है इस लिये य का अल्पमान मानने से गृहीतपदों के अपेक्षा छोड़ा हुआ पद ही बड़ा हो गा। इस लिये $अ_1रय^2$ इसे छोड़ देने से बड़ा अन्तर पड़े गा।

फिर कल्पना करो कि $अय^4$ यह पद बहुत छोटा है इस लिये इसे छोड़ देने से मूलविन्दु के पास पास वक्र का $अ_2र^3 - अ_1रय^2 = 0$ ऐसा समीकरण हो गा। इस पर से $य^2 = \frac{अ_2}{अ_1} र^2$ इस का उत्थापन देने से गृहीतपदों में $य^3$ और छोड़े हुए पद में $य^4$ आता है इस लिये य का मान अल्प मानने से छोड़ा हुआ पद गृहीत पदों के अपेक्षा छोटा हो सकता है। तब स्वल्पान्तर से मूलविन्दु के पास पास वक्र का समीकरण $य^2 = \frac{अ_2}{अ_1} र^2$ वा $र = \pm य \sqrt{\frac{अ_1}{अ_2}}$ यह हुआ।



यह क्षेत्र दिखलाता है कि पहले $अ_2 र^3$ छोड़ देने से मूलविन्दु के पास पास में अक परवलयानुकार खण्ड उत्पन्न हो गा और $अय^4$ छोड़ देने से गख और ग'ख' दो सरलरेखारूप-खण्ड हों गे।

वास्तव समीकरण जो वक्र का $अय^4 - अ_1 रय^2 + अ_2 र^3 = 0$ यह है इस में अ का भाग देकर $\frac{अ_1}{अ} = क_1$, $\frac{अ_2}{अ} = ख$, मानो तो उसी समीकरण का रूप

$य^4 - करय^2 + खर^3 = 0$ ऐसा हो गा।

इस पर से वर्ग समीकरण की युक्ति से

$य^2 = \frac{र}{2}\left\{क \pm \sqrt{(क^2 - 4 खर)}\right\}$ परन्तु द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$\sqrt{(क^2 - 4 खर)} = क - \frac{2 ख}{क} र - \frac{2 ख^2}{क^3} र^2 \cdots$$

इस लिये इस का उत्थापन $य^2$ में देने से

$$य^2 = \frac{र}{2}\left(2 क - \frac{2 ख}{क} र - \frac{2 ख^2}{क^3} र \cdots\right) = रक - \frac{ख}{क} र^2 - \frac{ख^2}{क^3} र^3 \cdots$$

$$\text{वा } य^2 = \frac{र}{2}\left(\frac{2 ख}{क} र + \frac{2 ख^2}{क^3} र^2 \cdots\right) = \frac{ख}{क} र^2 + \frac{ख^2}{क^3} र^3 \cdots$$

मूलविन्दु के पास पास स्वल्पान्तर से $य^2 = कर$

वा $\left.य^2 = \frac{ख}{क} \cdot र^2 \;\therefore\; र = \pm य \sqrt{\frac{क}{ख}}\right\}$ इन पर से भी मूलविन्दु के पास पास स्वल्पान्तर से वक्र की आकृति पूर्ववत् सिद्ध होती है। इसी प्रकार कभीं कभीं अव्यक्तीयसमीकरण के रूप में भी भुजकोटिसम्बन्धि-समीकरण को लाने से वक्र की आकृति जान सकते हो।

(६) मूलविन्दु के पास पास में $र^4 + अर^2 य - य^4 = 0$ इस समीकरण के वक्र की आकृति जानना है

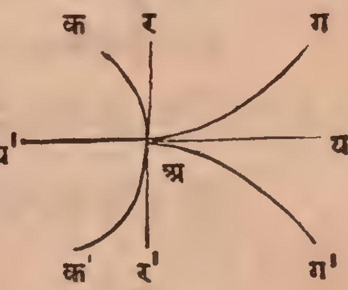
यहां पहले $य^4$ को छोड़ दो तो $र^4 + अर^2 य = 0$

इस लिये $र^2 = -अय$ इस का उत्थापन देने से छोड़े हुए पद में $र^8$ और गृहीतपदों में $र^4$ आवे गा इस लिये र का मान अल्प

मानने से छोड़ा हुआ पद बहुत छोटा हो सकता है। उस दशा में मूलविन्दु के पास पास में वक्र का $र^२ = -अय$ यह समीकरण परवलय का समीकरण हुआ।

दूसरे वार, $अर^२य$ इसे छोड़ो तो वक्र का समीकरण $र^४ = य^४$ $\therefore$ $य = र$ इस का उत्थापन देने से छोड़े हुए पद में $य^३$ और गृहीत-पदों में $य^४$ आता है इस लिये य का मान अल्प मानने से छोड़ा हुआ पद गृहीतपदों के अपेक्षा बड़ा हो गा। इस लिये इस दशा में स्वल्पान्तर से वक्र की आकृति न उत्पन्न हो गी।

फिर जब $र^४$ को छोड़ देवों तो वक्र का समीकरण $अर^२य - य^४$ $\therefore$ $र^२ = \frac{य^३}{अ}$ इस का उत्थापन देने से छोड़े हुए पद में $य^६$ और गृहीत-पदों में $य^४$ आवे गा इस लिये य का मान अल्प मानने से छोड़ा हुआ पद छोटा हो सकता है। यह क्षेत्र दिखलाता है कि $य^४$ को छोड़ देने से कअक' परवलयानुकारखण्ड और $र^४$ को छोड़ देने से अग और अग' खण्ड मूल-विन्दु के पास पास उत्पन्न हों गे।



मूलविन्दु के पास पास स्वल्पान्तर से आकृति जानने के विषय में ये ऊपर दो उदाहरण दिखलाये गये हैं। अब मूलविन्दु से बहुत दूर पर स्वल्पान्तर से कैसी आकृति हो गी उस के विषय में भी उदा-हरण दिखलाते हैं।

(७) (६) वें उदाहरण में जो वक्र का समीकरण है उस से मूलविन्दु से बहुत दूर पर वक्र के आकृति का विचार करो?।

यहां जब य और र दोनों अनन्त के तुल्य हों तो $अर^२य$ इस पद को छोड़ सकते हो तब वक्र का समीकरण $र^४ = य^४$ ऐसा हो गा इस लिये $\pm य = र$ यह स्वल्पान्तर से मूलविन्दु से अत्यन्त दूर पर वक्र का समीकरण हो गा। परन्तु जब $र^४ + अर^२य - य^४ = 0$

इस लिये वर्ग समीकरण की युक्ति से

$$र^२ = \left(य^४ + \frac{अ^२य^२}{४}\right)^{\frac{१}{२}} - \frac{अय}{२} = \frac{य}{२}\left\{(४य^२ + अ^२)^{\frac{१}{२}} - अ\right\}$$

$$=\frac{य^2}{२}\left\{\left(४+\frac{अ^2}{य^2}\right)^{\frac{१}{२}}-\frac{अ}{य}\right\}=\frac{य^2}{२}\left(२+\frac{अ^2}{४य^2}+\frac{अ^2}{६४य^2}\cdots-\frac{अ}{य}\right)$$

$$=\frac{य^2}{२}\left(२-\frac{अ}{य}+\frac{अ^2}{४य^2}+\frac{अ^४}{६४य^४}\cdots\right)=य^2\left(१-\frac{अ}{२य}+\cdots\right)$$

इस का मूल लेने से

$र=\pm य\left(१-\frac{अ}{४य}+\cdots\right)=\pm\left(य-\frac{अ}{४}\right)$ इस में यदि य अत्यन्त बड़ा माना जाय तो स्वल्पान्तर से असीमपथ का समीकरण $र=\pm य$ ऐसा हो गा यह वैसा ही समीकरण है जैसा कि मूलविन्दु से अत्यन्त दूर पर स्वल्पान्तर से पहले वक्र के आकृति का समीकरण निकला है।

(८) मूलविन्दु के पास पास $र^४+यर^३+अय^२र-कय^३=0$ इस समीकरण के वक्र की आकृति जानना है।

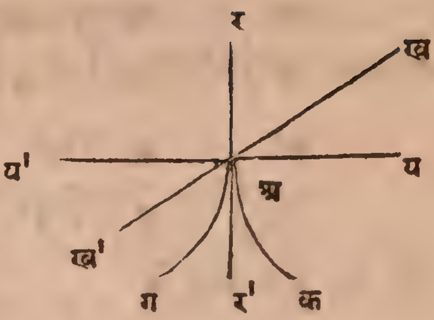
यहां कल्पना करो कि मूलविन्दु के पास में $अय^२र-कय^३=0$ तो स्वल्पान्तर से मूलविन्दु के पास पास वक्र का समीकरण $अर=कय$ ऐसा हो गा. इस का उत्थापन देने से छोड़े हुए पदों में $य^४$ और गृहीत पदों में $य^३$ आता है इस लिये छोड़े हुए पद छोटे हो सकते हैं। इस दशा में स्वल्पान्तर से वक्र की आकृति मूलविन्दु के पास पास में जान सकते हैं।

फिर यदि यह मानो कि $यर^३$, $कय^३$ ये दोनों पद स्वल्पान्तर से छोड़ दिये गये तो वक्र का समीकरण $र^४+अय^२र=0$

वा $र^३=-अय^२$ इस का उत्थापन देने से यह सिद्ध हो जाय गा कि छोड़े हुए पद छोटे हो सकते हैं।

इसी प्रकार यदि और दो दो पदों को छोड़ छोड़ कर समीकरण बनावो तो यह सिद्ध हो गा कि छोड़े हुए पद ही गृहीतपदों से बड़े होते हैं। इस लिये मूलविन्दु के पास पास में वक्र की दोई शाखा स्वल्पान्तर से उत्पन्न हो गी जिन का समीकरण क्रम से $अर=कय$ और $र^३=-अ\cdot य^२$ ये हैं।

यहां यह क्षेत्र दिखलाता है कि ख'अख रेखा एक शाखा और गअ और अक दूसरे खण्ड हैं। यहां दूसरे खण्ड के समीकरण से अर्थात् $र^3 = - अय^2$ इस से सिद्ध कर सकते हो कि गअ, अक शाखाओं का स्कन्ध अ विन्दु है और दोनों शाखाओं में एक ही अर' रेखा स्पर्शरेखा है।



(९) $र^4 + यर^3 + अय^2र - कय^3 = 0$ इस वक्र के मूलविन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो गी उस की दिशा अर्थात् $\frac{तार}{ताय}$ का मान जानना है।

यहां जब $र^4 + यर^3 + अय^2र - कय^3 = 0$ .... (१)

इस लिये $\frac{र^4}{य^3} + \frac{य \cdot र^3}{य^3} + \frac{अर}{य} - क$

$$= (य + र)\left(\frac{र}{य}\right)^3 + \frac{अर}{य} - क = 0$$

$$= \frac{अर}{य} - क = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{क्यों कि मूलविन्दु में य, और र दोनों} \\ \text{शून्य हों गे} \end{array} \right\}$$

$\therefore \frac{र}{य} = \frac{क}{अ}$, परन्तु $\frac{र}{य} = \frac{0}{0}$

इस लिये $\frac{र}{य} = \frac{0}{0} = \frac{तार}{ताय}$ (३२ वें प्रक्रम से)

इस लिये $\frac{र}{य} = \frac{तार}{ताय} = \frac{0}{0} = \frac{क}{अ}$। परन्तु इसे छोड़ $\frac{र}{य} = \frac{तार}{ताय}$ इस का मान अनन्त के तुल्य भी हो सकता है तब स्पष्ट है कि $\frac{य}{र} = 0$ हो गा। इस लिये (१) समीकरण से $र + य + \left\{\frac{य}{र}\right\}^2 \left\{अ - क\frac{य}{र}\right\} = 0$ ऐसा समीकरण बना सकते हो, इस पर से सिद्ध होता है कि शून्य भी एक मान $\frac{य}{र}$ का होता है इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \infty$ यह भी इस उदाहरण में हो सकता है अर्थात् मूलविन्दु पर रर' अक्ष भी स्पर्शरेखा हो गी।

(१०) $र^४ + अर^२य - य^४ = ०$ इस वक्र में मूलविन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो गी उस की दिशा जानना चाहते हैं।

यहां जब $र^४ + अर^२य - य^४ = ०$ .... (१)

$$इस\ लिये\ र\left(\frac{र}{य}\right)^३ + अ\left(\frac{र}{य}\right)^२ - य$$

$$= र\left(\frac{र}{य}\right)^३ + अ\left(\frac{र}{य}\right)^२ \quad \because\ य = ०,\ मूलविन्दु\ में$$

$$= \left\{\frac{र}{य}\right\}^२ \left\{अ + \left(\frac{र}{य}\right)\right\} = ०$$ इस पर से $\frac{र}{य}$ का एक मान शून्य सिद्ध हुआ।

फिर (१) समीकरण का दूसरा रूपान्तर करने से

$$र + अ\frac{य}{र} - य\left(\frac{य}{र}\right)^३$$

$$= अ\cdot\frac{य}{र} - य\cdot\left(\frac{य}{र}\right)^३ \quad \because\ र = ०,\ मूलविन्दु\ में$$

$$= \frac{य}{र}\left\{अ - य\left(\frac{य}{र}\right)^२\right\} = ०$$ इस पर से $\frac{य}{र}$ का भी एक मान शून्य के तुल्य हुआ अर्थात् $\frac{र}{य} = \infty$ हुआ इस लिये मूलविन्दु पर दोनों अक्ष स्पर्शरेखा होते हैं यह यहां पर सिद्ध होता है। इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि बहुधा जिन वक्रों का भुजयुग्मसम्बन्धि-समीकरण दिया हो उन के आकृति का विचार करें।

२८५। इस प्रक्रम में ध्रुवीयसमीकरण पर से वक्रों के आकृति का कैसे विचार करना इस के लिये कुछ उदाहरण कर के दिखलाते हैं।

उदाहरण।

(१) $श्रु = अ(१ + कोज्याप)$ इस वक्र की आकृति जानना है।

यहां कल्पना करो कि अ ध्रुवविन्दु और अक स्थिर रेखा है और, $<कअख$, $<खअक'$, $<क'अग$, और $<गअक$ ये क्रम से प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ समकोणीयपद हैं।

तो, जब $प = ०$ तो $श्रु = २अ = अक$।

$$\text{ष} = \frac{\pi}{2} \text{ तो } \text{श्रु} = \text{श्र} = \text{श्रख} \text{ ।}$$

कल्पना करो कि ष दूसरे पद में गया अर्थात् $\text{ष} = \frac{\pi}{2} + \text{इ}$
$\therefore$ कोज्याष = − ज्याइ, इस लिये श्र (१ + कोज्याष) = श्र (१ − ज्याइ) = श्रु
इस से सिद्ध होता है कि दूसरे पद में श्रु < श्र

यदि $\text{इ} = \frac{\pi}{2}$ तो श्रु = 0 ।

फिर कल्पना करो कि ष तीसरे पद में गया अर्थात् ष = π + इ
$\therefore$ कोज्याष = − कोज्याइ

इस पर से श्र (१ + कोज्याष) = श्र (१ − कोज्याइ) = श्रु

इस लिये यहां भी श्रु < श्र यदि $\text{इ} = \frac{\pi}{2}$ तो श्रु = श्र = श्रग ।

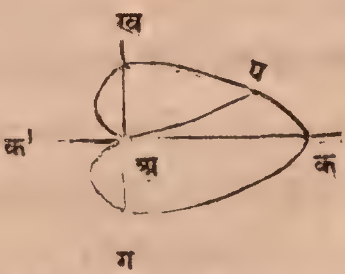
फिर अब कल्पना करो कि ष चतुर्थ पद में गया

अर्थात् $\text{ष} = \frac{\pi}{\cdot} + \text{इ}$ $\therefore$ कोज्याप = ज्याइ

तब श्र (१ + कोज्याष) = श्र (१ + ज्याइ) = श्रु, इस लिये

यहां श्रु > श्र यदि $\text{इ} = \frac{\pi}{2}$ तो श्रु = २ श्र ।

इस लिये ष के धन में प्रथमपद में कख, दूसरे में खश्र तीसरे में श्रग, और चौथे पद में गक खण्ड उत्पन्न हुए इस प्रकार से वक्र की समग्र आकृति कखश्रगक उत्पन्न हुई । श्रप रेखा प्रथमपद में किसी इष्ट ष के मान में श्रुति है । यदि ष को ऋण मानो तो स्पष्ट है कि प्रथम-पद की स्थिति चतुर्थपद में और द्वितीयपद की स्थिति तीसरे पद में परस्पर उत्पन्न हो गी ।



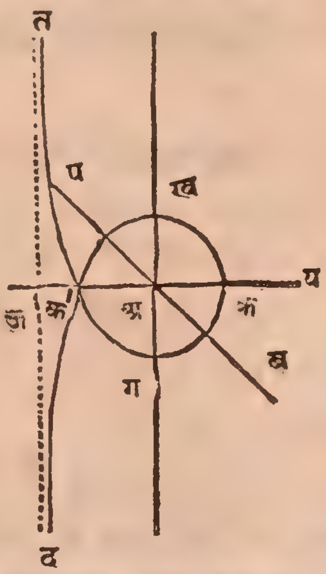
(२) $\text{श्रु} = \text{श्र} \cdot \text{छे}\frac{\text{ष}}{3}$ इस वक्र की आकृति बताओ ? ।

यहां $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} = \frac{\text{श्र}}{3} \text{स्प}\frac{\text{ष}}{3} \cdot \text{छे}\frac{\text{ष}}{3}$,

$$\text{स्पभ} = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताष}}{\text{ताश्रु}} = 3\,\text{कोस्प}\frac{\text{ष}}{3}$$ (१३० वें प्रक्रम से)

$$\text{और नाल} = \text{श्रु}^2 \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = 3\,\text{अ} \cdot \text{कोछे}\,\frac{\text{प}}{3}\ (\text{१३२ वें प्रक्रम से})$$

यहां भी (१) उदाहरण की भांति समकोणीयपदों को समझ लो ।



यदि प = 0 तो श्रु = अ = अक

$$\text{प} = \frac{\pi}{2}\ \text{तो श्रु} = \frac{2\,\text{अ}}{\sqrt{3}} = \text{अख} ।$$

कल्पना करो कि प दूसरे पद में गया

तब यदि $\text{प} = \frac{\pi}{2}$ तो श्रु = २ अ = अक' ।

फिर कल्पना करो कि प तीसरे पद में गया

तो यदि $\text{प} = \frac{3\pi}{2}$ तो श्रु = ∞ ।

फिर कल्पना करो कि प चौथे पद में गया तो श्रुतिमान ऋण हो गा और, यदि प = २ π तो श्रु = − २ अ = अक' ।

इस प्रकार प के धनमान में कखक'द खण्ड सिद्ध हुआ इसी प्रकार प के ऋणमान में कगक'त खण्ड सिद्ध हो गा । इस रीति से समग्र आकृति तक'गकखक'द हुई ।

$$\text{यदि प} = \frac{3\pi}{2}\ \text{तो श्रुति} = \infty\ \text{और नाल} = 3\,\text{अ कोछे}\,\frac{\text{प}}{3} = 3\,\text{अ} = \text{अज}$$

इस लिये अज पर लम्बरूपरेखा जो तजद है वह वक्र की असीमपथ हुई ।

(३) $\text{श्रु} = \text{अ} \cdot \text{कोज्या}\,\frac{\text{प}}{3}$ इस वक्र की आकृति जानना है ।

यहां जब प = 0 तो श्रु = अ = अक ।

$$\text{प} = \frac{\pi}{2}\ \text{तो श्रु} = \frac{\text{अ}}{2}\sqrt{3} = \text{अख} ।$$

$$\text{प} = \pi\ \text{तो श्रु} = \frac{\text{अ}}{2} = \text{अक}' ।$$

$$प = \frac{३\pi}{२} \text{ तो, } श्रु = 0 ।$$

जब प चौथे पद में चला तब श्रुति मान ऋण हो गा ।

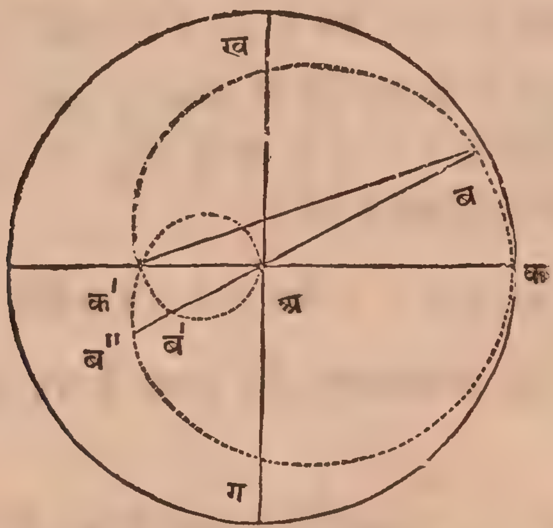
इस लिये यदि प = २ π तो $श्रु = -\frac{अ}{२} =$ अक' ।

यदि $प = \frac{५\pi}{२}$ तो $श्रु = -\frac{अ}{२}\sqrt{३} =$ अग

और जब प = ३ π तो श्रु = – अ = अक ।

इस से अधिक प के मान में वा ऋण प के मान में फिर भी यही आकृति सिद्ध हो गी । इस लिये वक्र की समग्र आकृति कखक'अक'गक हुई ।

देखेा इस वक्र में श्रुति का महत्तमान = अ है इस लिये ध्रुव-विन्दु को केन्द्रमान अ व्यासार्द्ध से जो वृत्त हो गा वही १३६ वें प्रक्रम से वक्र का असीमपथ हो गा ।



(४) $श्रु = अ \cdot \frac{ज्याप}{प}$ इस की आकृति बनावेा? ।

यहां $\frac{ताश्रु}{ताप} = \frac{अ (प \cdot कोज्याप - ज्याप)}{प^२}$

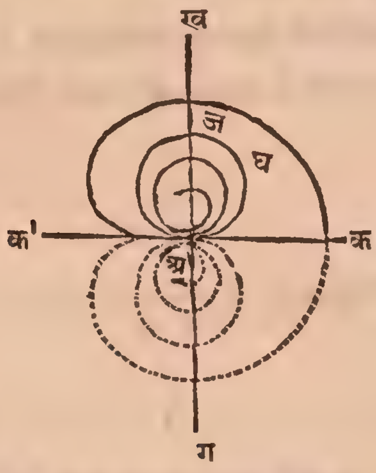
और $स्पभ = \frac{प \cdot ज्याप}{पकोज्याप - ज्याप}$

यहां जब तक प का मान शून्य से ले दो समकोण तक रहे गा तब तक श्रुति का मान धन आवे गा और जब प = 0, श्रु = अ = अक, जब प = π, तब श्रु = 0 ।

फिर जब तक प का मान π से ले कर २π तक रहे गा तब तक श्रु का मान ऋण हो गा ।

इस प्रकार प के 0 से ले π तक मान में वक्र का कखअ खण्ड बने गा फिर प के π से ले २π तक मान में अघजछअ खण्ड बने गा । इस प्रकार वक्र के अनन्तखण्ड उत्पन्न हों गे जिन सब का योग अ विन्दु में हो गा । इसी प्रकार प के ऋणमान में विन्दुरूप आकृति उत्पन्न हो गी ।

यदि प = 0 तो स्पभ = $\frac{0}{0}$ ऐसा हो गा इस का मान यदि निकालो तो अनन्त के तुल्य हो गा । इस लिये अक रेखा के क विन्दु पर जो लम्ब हो गा वह वक्र के क विन्दु पर स्पर्शरेखारूप हो गा ।

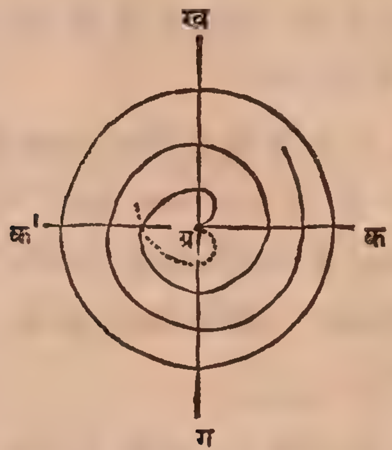


(५) श्रु = $\frac{\text{अ} \cdot \text{प}^2}{१ + \text{प}^2}$ इस की आकृति जानना है यहां यदि प = 0 तो, श्रु = 0 इस लिये वक्र की प्रवृत्ति मूलविन्दु ही से हुई और ज्यों ज्यों प बढ़ेगा त्यों त्यों ध्रुवविन्दु के चारो ओर इस का अनन्तानन्त भ्रमण हो गा । परन्तु जब श्रु = $\frac{\text{अप}^2}{१ + \text{प}^2} = \frac{\text{अ}}{१ + \frac{१}{\text{प}^2}}$ = अ (जब प = ∞)

इस लिये अ व्यासार्द्ध से और ध्रुवविन्दु को केन्द्र मान जो वृत्त बने गा

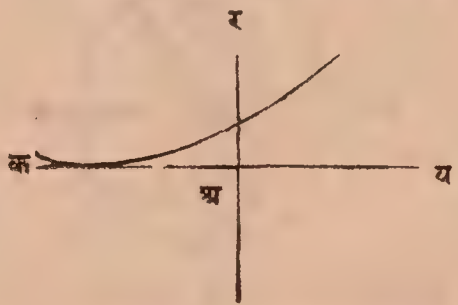
उस के भीतर ही वक्र का सब अवयव रहे गा । इसी लिये इस वृत्त को (१३६ वें प्रक्रम से) वृत्ताकार असीमपथ कहें गे ।

यदि ष का ऋणमान माने तो विन्दुरूप आकृति उत्पन्न हो गी ।



२८६ । इस प्रक्रम में उन वक्रों का समीकरण और आकृति दिखलाते हैं जिन का बहुधा प्रश्नों में काम पड़ा करता है ।

(१) लाघुरिक्थिक वक्र का समीकरण $र = अ \cdot इ^{\frac{य}{क}}$ ऐसा होता है इस की आकृति इस समीकरण से यही नीचे बनाई गई है



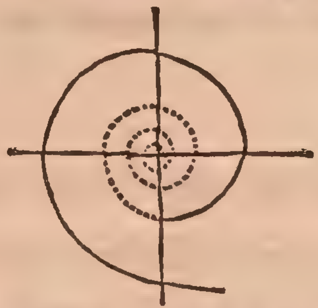
यहां जब $र = 0$ तब $य = -\infty$ इस लिये य अक्ष वक्र का असीमपथ हो गा, और धनात्मक य ज्यों ज्यों बढ़े गा त्यों त्यों र का मान भी बढ़ता जाय गा ।

इस वक्र के समीकरण को $र = अ \cdot इ^{य}$ ऐसा भी लिखते हैं ।

(२) लाघुरिक्थिक सर्पिल ।

इस का समीकरण $श्रु = अ \cdot इ^{\frac{ष}{क}}$ वा, $श्रु = अ \cdot इ^{ष}$ यह है इस पर से इस की आकृति यही नीचे लिखी हुई है ।

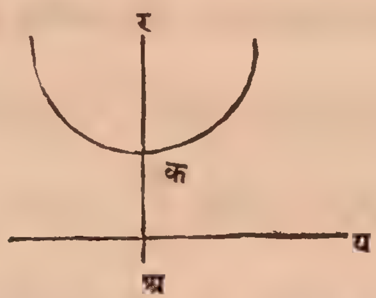
यहां स्पभ $= \text{श्रु} \frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}} = \text{क}$, पहले समीकरण से सिद्ध होता है इस लिये इसे सामासिक सर्पिल भी कहते हैं



प का मान ऋण मानने से विन्दुसमूहाकृति उत्पन्न होती है।

(३) कातन्वली (Catenary)।

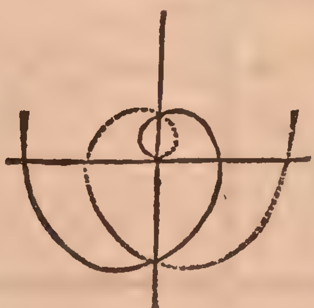
इस वक्र का समीकरण $\text{र} = \frac{\text{ग}}{२} \left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}} \right)$ यह है इस पर से इस की आकृति यही नीचे लिखी हुई है। इस वक्र का स्थिति-विद्या में काम पड़ता है यहां जब $\text{य} = 0$ तो $\text{र} = \text{ग} = \text{अक}$,



(४) आर्किमेडेज़ का सर्पिल (The Spiral of Archimedes)।

इस वक्र का $\text{श्रु} = \text{अ} \cdot \text{प}$ यही समीकरण है

इस पर से यही नीचे लिखी हुई आकृति उत्पन्न होती है।



(५) विटचरी (The Witch)।

अकग एक वृत्तार्द्ध है इस में कन कोई अर्द्धज्या है तो यदि $\frac{\text{अग} \cdot \text{कन}}{\text{अन}} = \text{वन}$ तो गवप वक्र विटचरी नाम का उत्पन्न होता है।

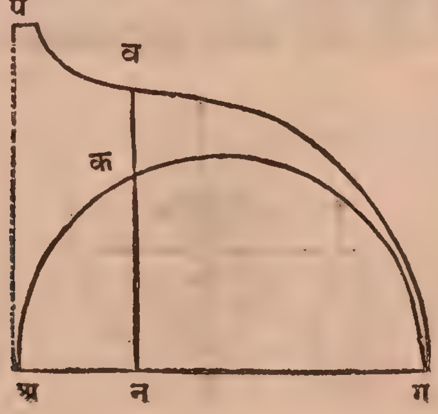
यदि यहां अ को ध्रुवविन्दु $<$ वअन = प और अव = श्रु, तो

$$\left.\begin{aligned} \text{श्रु} \cdot \text{ज्याप} &= \text{वन} \\ \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याप} &= \text{अन} \\ \text{अग} &= २\text{क} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{इस पर से और क्षेत्र के लक्षण से} \\ \dfrac{४\text{क}^२(२\text{क} - \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याप})\,\text{श्रु कोज्याप}}{\text{श्रु}^२\text{कोज्या}^२\text{प}} = \text{श्रु}^२ \cdot \text{ज्या}^२\text{प} \end{array}$$

वा, $४\text{क}^२(२\text{क} - \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याप}) = \text{श्रु}^३ \cdot \text{कोज्याप} \cdot \text{ज्या}^२\text{प}$

पक्षान्तरनयन से, $\text{श्रु}^३\text{कोज्यापज्या}^२\text{प} + ४\,\text{क}^२\text{श्रु} \cdot \text{कोज्याप} = ८\,\text{क}^३$ यह अक्षीयसमीकरण हुआ।

यदि $\text{य} = \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याप}$, $\text{र} = \text{श्रु} \cdot \text{ज्याप} = २\text{क}\sqrt{\dfrac{२\text{क} - \text{य}}{\text{य}}}$ यह भुजयुग्म पर से समीकरण उत्पन्न हुआ। इस में यदि $\text{य} = २\text{क}$, तो $\text{र} = 0$, और यदि $\text{य} = 0$ तो $\text{र} = \infty$ और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{र}\frac{\text{क}}{\text{य}(२\text{क} - \text{य})} = \infty$ इस लिये अग रेखा के अ विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो गी वही वक्र का असीमपथ हो गी।



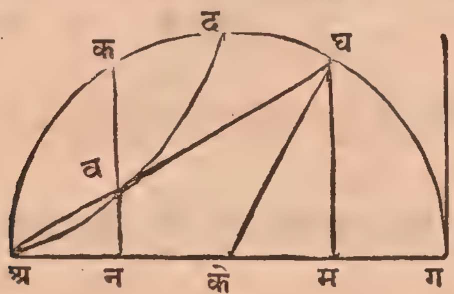
(६) शिञ्जिनीद्वयज (The Cissoid)।

अकग एक वृत्तार्द्ध है उस के (के) केन्द्र से दोनों ओर समान कन, और घम ज्या हैं इस लिये अन = गम। अघ रेखा कन रेखा के व विन्दु में लगती है तो व विन्दु से उत्पन्न अवद वक्र शिञ्जिनीद्वयज कहलाता है। यहां भी यदि अव = श्रु, और $<$ वअन = प तो क · ज्या २ प = घम, क · कोज्या २ प = केम

$\therefore$ गम = क − क · कोज्या २ प = क (१ − कोज्या २ प)

$$= \text{अन} = \text{श्रु}\cdot\text{कोज्याप} \;\therefore\; \text{श्रु} = \frac{२\,\text{क}\cdot\text{ज्या}^{२}\text{प}}{\text{कोज्याप}} = २\,\text{क}\cdot\text{स्पप}\cdot\text{ज्याप}$$

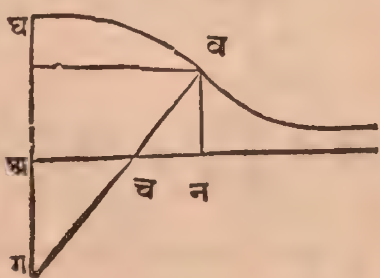
यहां क = वृत्तार्द्ध का व्यासार्द्ध।



(७) कर्णच्छेद (The conchoid of Nicomedes)।

अन रेखा और ग विन्दु स्थिर है गव रेखा घूमती हुई अन रेखा को च विन्दु में काटती है तो यदि सर्वदा चव = स्थिर = क तो घव वक्रक्षेत्र कर्णच्छेद नाम का होता है।

यहां यदि श्रु = गव, $<$ घगव = व (गघ रेखा अन रेखा के अ विन्दु पर लम्ब है) तो वक्र के लक्षण से यदि अग = इ तो $\text{श्रु} = \text{क} + \dfrac{\text{इ}}{\text{कोज्याप}}$ यह समीकरण हुआ।



(८) तैार्य्यिक (The Quadratrix of Dinastratus)।

अकग एक वृत्त का चतुर्थांश है के अ व्यासार्द्ध पर लम्बरूप घन रेखा समान चाल से जितने काल में अ विन्दु से के विन्दु तक आती है उतने ही काल में समान चाल से केअ व्यासार्द्ध अ विन्दु से ग विन्दु तक आता है तो इन दोनों के योग विन्दुओं से उत्पन्न हुआ अवद वक्र को तैार्यिक कहते हैं।

यहां यदि अव = श्रु, < वअके = प, अन = य और वन = र तो

य = श्रु · कोज्याप, और क्षेत्र के लक्षण से

$$क : \frac{\pi}{२} :: य : < अकेव \therefore < अकेव = \frac{\pi \cdot य}{२ क} = \frac{\pi श्रु \cdot कोज्याप}{२ क}$$

$$परन्तु\ स्प < अकेव = \frac{र}{क - य} = \frac{र}{क - श्रु \cdot कोज्याप}$$

$$\therefore\ र = श्रु \cdot ज्याप = स्प < अकेव\,(क - श्रु \cdot कोज्याप) = स्प \frac{\pi य}{२ क}(क - य)$$

इन पर से वक्र का ध्रुवीयसमीकरण $\left(< अकेव = \frac{\pi श्रु \cdot कोज्याप}{२ क}\right)$

$$श्रु \cdot ज्याप = स्प \frac{\pi श्रु \cdot कोज्याप}{२ क}(क - श्रु \cdot कोज्याप)\ यह\ हुआ$$

और भुजयुग्मसम्बन्धिसमीकरण

$$र = (क - य)\, स्प \frac{\pi य}{२ क} = (क - य)\, कोस्प\left(\frac{\pi}{२} - \frac{\pi य}{२ क}\right)$$

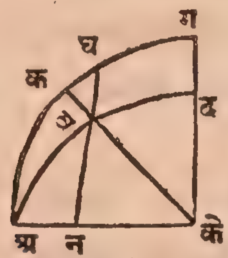
$$= (क - य)\, कोस्प \left\{\frac{\pi}{२ क}(क - य)\right\}\ यह\ हुआ$$

जब य = क तब

$$र = (क - य)\, कोस्प\left\{\frac{\pi}{२ क}(क - य)\right\} = \frac{क - य}{स्प\left\{\frac{\pi}{२ क}(क - य)\right\}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{\text{२क}}(\text{क} - \text{य})}{\text{स्प}\left\{\frac{\pi}{\text{२क}}(\text{क} - \text{य})\right\}} \times \frac{\text{२क}}{\pi}$$

$$= \frac{\text{१}}{\dfrac{\text{स्प}\left\{\frac{\pi}{\text{२क}}(\text{क} - \text{य})\right\}}{\frac{\pi}{\text{२क}}(\text{क} - \text{य})}} \cdot \frac{\text{२क}}{\pi} = \frac{\text{२क}}{\pi} = \text{केद}$$



इस वक्र के बल से दृष्टकोण का चाहे जितना समान विभाग कर सकते हो।

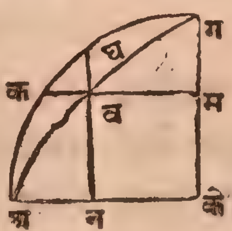
(९) द्वितीयतैार्य्यिक (The Quadratrix of Tochirnhausen)।

(८) वें वक्र में घन रेखा जैसे चलती है उसी प्रकार से चले और अके रेखा के समानान्तर कवम रेखा उतने ही काल में अ विन्दु से ग विन्दु तक चले ते इन दोनों के योग विन्दुओं से अवग वक्र जो उत्पन्न हो गा उसे द्वितीयतैार्यिक कहते हैं।

यहां यदि अन = य, वन = र ते वक्र के लक्षण से

$$\text{क} : \text{वृत्तचतुर्थांश} :: \text{य} : \text{अकचाप} \therefore \text{अकचाप} = \frac{\pi\,\text{कय}}{\text{२क}} = \frac{\pi\,\text{य}}{\text{२}}$$

और $\text{र} = \text{क} \cdot \text{ज्या}\,\frac{\pi\,\text{य}}{\text{२क}}$ यह समीकरण हुआ।



(१०) इलामूलक (The Lamniscate) ।

यदि अग = स्थिर = २क आधार पर अनेक त्रिबाहु बनाये जायं उन में प्रत्येक त्रिभुज के दोनों भुजों का घात यदि आधार के आधे के वर्ग के समान हो तो त्रिभुजों के शिरःकोणरूप विन्दुसमूह से जो वक्र होता है उसे इलामूलक कहते हैं ।

कल्पना करो कि अग आधार का घ विन्दु पर समान दो भाग है और किसी एक अकग त्रिभुज के शिरःकोण से आधार पर कन लम्ब है तो यदि घक = श्रु, और $<$ कघन = ष तो कन = श्रु · ज्याष,
घन = श्रु · कोज्याष, अघ = घग = क, अन = क + श्रु · कोज्याष और
नग = क − श्रु · कोज्याष इन पर से

$$\text{अक}^2 = (\text{क} + \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याष})^2 + \text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{ष}$$

$$\text{कग}^2 = (\text{क} - \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याष})^2 + \text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{ष}$$

वक्र के लक्षण से ।

$$\text{अक}^2 \cdot \text{कग}^2 = \text{क}^4 = \{(\text{क} + \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याष})^2 + \text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{ष}\} \cdot \{(\text{क} - \text{श्रु} \cdot \text{कोज्याष})^2 + \text{श्रु} \cdot \text{ज्या}^2\text{ष}\}$$

$$= (\text{क}^2 + 2\,\text{कश्रुकोज्याष} + \text{श्रु}^2\text{कोज्या}^2\text{ष} + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष}) \cdot (\text{क}^2 - 2\,\text{कश्रुकोज्याष} + \text{श्रु}^2\text{कोज्या}^2\text{ष} + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष})$$

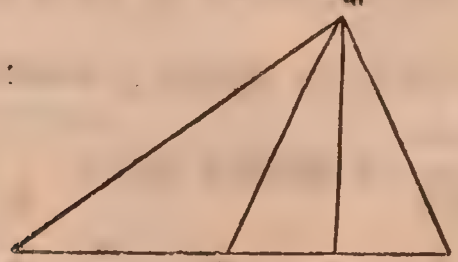
$$= (\text{क}^2 + 2\,\text{कश्रुकोज्याष} + \text{श्रु}^2)(\text{क}^2 - 2\,\text{कश्रुकोज्याष} + \text{श्रु}^2)$$

$$= \text{क}^4 + 2\,\text{क}^2\text{श्रु}^2 - 4\,\text{क}^2\text{श्रु}^2 \cdot \text{कोज्या}^2\text{ष} + \text{श्रु}^4$$

समशोधन और पक्षान्तरनयन से

$$2\,\text{क}^2(1 - 2\,\text{कोज्या}^2\text{ष}) = -\text{श्रु}^2 \quad \therefore \quad \text{श्रु}^2 = 2\,\text{क}^2 \cdot \text{कोज्या}\,2\,\text{ष}$$

यह समीकरण, वक्र का उत्पन्न हुआ ।



(११) चक्राभ (The Cycloid) ।

अय एक सरल रेखा और कवघ एक वृत्त है वृत्त का व विन्दु पहले अ विन्दु में या फिर जिस प्रकार गाड़ी की पहिया सड़क पर

चलती है उसी प्रकार वृत्त अय रेखा पर चलता है उस के चलने से व विन्दु भी एक अवव' वक्र में चलै गा । ऐसे वक्र को चक्रालद कहते हैं।

कल्पना करो कि वक्र के किसी विन्दु (व) का भुज = य = अन और कोटि = र = वन, और वक्र के लक्षण से अक = वकचाप क्यों कि वृत्त का प्रतिविन्दु अक रेखा में लगता गया है । वृत्त का व्यास = व'ग = घक = २क, के वृत्त का केन्द्र है और < केवक = अ तो अक = वक चाप = अक । और वम = कन = क · ज्याअ ∴ य = अक − कन = अ · क − क · ज्याअ = क (अ − ज्याअ)

$$\text{वा, } य = क \cdot \text{उज्या}^{-1}\frac{र}{क} - \sqrt{२कर - र^2}$$

$$= क \cdot \text{कोज्या}^{-1}\frac{क - र}{क} - \sqrt{२कर - र^2} \text{ यह समीकरण हुआ}$$

$$\text{इस पर से } \frac{ताय}{तार} = \sqrt{\frac{र}{२अ - र}}$$

इस लिये स्पर्शरेखा का समीकरण (११९ वें प्रक्रम से)

$$र_1 - र = \frac{तार}{ताय}(य_1 - य) = (य_1 - य)\sqrt{\frac{२क - र}{र}}$$

और मुख्यलम्ब का समीकरण

$$र_1 - र = -\frac{ताय}{तार}(य_1 - य) = -(य_1 - य)\sqrt{\frac{र}{२क - र}} \text{ इस में}$$

$$\text{यदि } र_1 = 0 \text{ तो } र = (य_1 - य)\sqrt{\frac{र}{२क - र}}$$

$$\therefore य_1 - य = \sqrt{र(२क - र)} = क \cdot ज्याअ$$

इस लिये मुख्यलम्ब की दिशा वक रेखा हो गी ।

यहां $अ^{\pi}$ = वृत्तार्द्ध = πक ।

यदि व' को मूलविन्दु मानो और व'म' = य, वम' = र तो वल = कग (क्यों कि क्षेत्रलक्षण से कव, गल दोनों समान और समानान्तर हैं) परन्तु कग = अग − अक = गक − कवचाप = वघचाप = व'लचाप

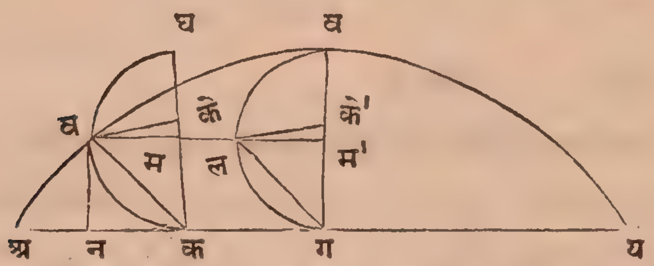
इस लिये $र = वल + लम' = क \cdot ज्याअ + क \cdot अ = क(अ + ज्याअ)$ और $य = क(१ - कोज्याअ)$

$$य \text{ के मान पर से } अ = उज्या^{-१}\frac{य}{क} = कोज्या^{-१}\frac{क-य}{क}$$

और $क \cdot ज्याअ = \sqrt{२कय - य^२}$

इस लिये $र = \sqrt{२कय - य^२} + क \cdot कोज्या^{-१}\frac{क-य}{क}$ यह समीकरण हुआ । इस पर से

$$\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{२क-य}{य}} \text{ इस पर से } \frac{ता^२र}{ताय^२} = -\frac{क}{य^{\frac{३}{२}}\sqrt{२क-य}}$$



और यदि व'व वक्र चाप के मान को चा मानो तो (१५३ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से)

$$\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}} = \sqrt{\frac{२क}{य}} \text{ इस पर से}$$

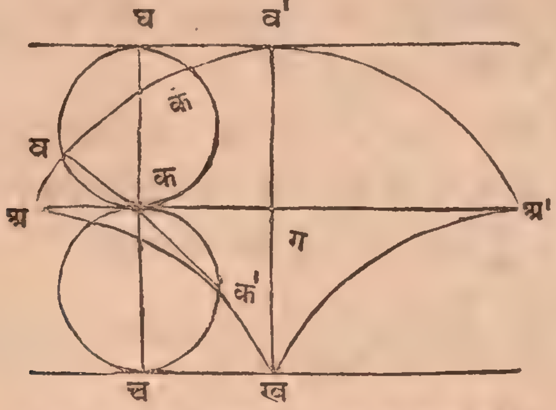
$चा = व'व = \sqrt{८कय}$ यही इस ग्रन्थ के दूसरे खण्ड से सिद्ध हो गा ।

यदि व विन्दु सम्बन्धि वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान जानना हो तो १६७ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$वि = \frac{\left(१ + \frac{तार^२}{ताय^२}\right)^{\frac{३}{२}}}{\frac{ता^२र}{ताय^२}} = २\sqrt{४क^२ - २कय} = २वक = २लग$$
$$= २क \cdot कोज्या\frac{अ}{२}$$

इस लिये वक को क की ओर बढ़ा कर उस में वक के तुल्य काटने से वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान हो गा क्यों कि इसी वक्र के

समीकरण में ऊपर दिखला चुके हैं कि व विन्दु के मुख्यलम्ब की दिशा वक्र रेखा ही है और १६७ वें प्रक्रम के अन्त्य में जो विशेष लिख आये हैं उस से स्पष्ट है कि मुख्यलम्ब ही में वक्रजातीयवृत्त का केन्द्र होता है।



देखेा ऊपर के क्षेत्र में वक' = २ वक इस लिये क' वक्रजातीयवृत्त का केन्द्र हुआ इस लिये क' विन्दु १७५ वें प्रक्रम से अवव'अ' चक्राभद के अवलूत में हुआ।

गख = व'ग तेा ख भी उसी अवलूत में हुआ।

खच रेखा अअ' रेखा के समानान्तर खींचेा और खच, घक रेखाओं का येागविन्दु च मानेा तेा स्पष्ट है कि कच व्यास के ऊपर जेा वृत्त बनैगा वह अवश्य क' विन्दु पर हेा कर जाय गा क्यों कि घक = कच = २ क अर्थात् दोनों वृत्त समान हैं तब कक'चाप = वकचाप = अक

इस लिये क'चचाप = कग = खच

इस पर से यह सिद्ध हेाता है कि क' विन्दु उस चक्राभद में है जेा खच रेखा पर कक'च वृत्त के चलने से उत्पन्न हेाता है। इस लिये अव'वअ' चक्राभद का अवलूत दो अख और अ'ख अर्द्धचक्राभद हेाते हैं।

(१२) त्रिच्छेद (The Trochoid)।

अकग, घभर दो वृत्त एक ही धरातल में परस्पर लगे हुए हैं अकग वृत्त $अअ_1$ सरलरेखा पर पहिये की तरह चलता है उस के चलने से घभर वृत्त भी चलै गा क्यों कि दोनों परस्पर लगे हुए हैं इस लिये घ विन्दु भी किसी वक्र में चलै गा माना कि घ विन्दु घव वक्र में चलता है तेा घव वक्र को त्रिच्छेद कहैं गे।

यहां वक्र के लक्षण से वम$_1$ = रम, (वम रेखा, अअ$_1$ के समानान्तर है) और घभर वृत्त चल कर भ$_1$वघ$_1$ स्थान पर पतित हुआ है जहां घ विन्दु व विन्दु पर पतित है) और <अकेग = <अ$_1$के$_1$व = अ (बड़े वृत्त का व्यासार्द्ध = क, लघुवृत्त का व्यासार्द्ध = ग मानो) अगचा = अन = य और वन = र तो

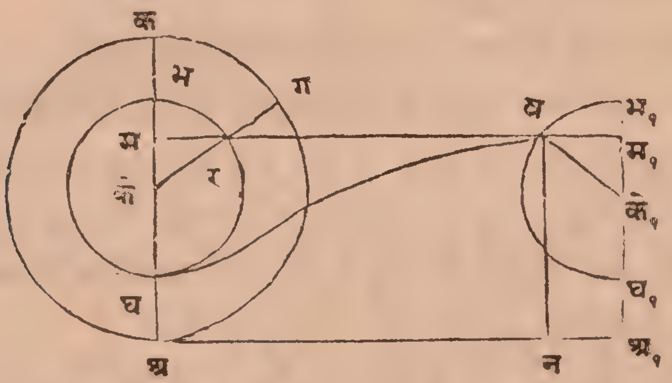
$$\left.\begin{aligned} \text{य} &= \text{अअ}_1 - \text{अ}_1\text{न} = \text{क}\cdot\text{अ} - \text{ग}\cdot\text{ज्याअ} \\ \text{और}\quad \text{र} &= \text{के}_1\text{अ}_1 + \text{के}_1\text{म}_1 = \text{क} - \text{ग}\cdot\text{कोज्याअ} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

यदि $\text{इ} = \frac{\text{ग}}{\text{क}}$ तो (१) इस का रूपान्तर

$$\left.\begin{aligned} \text{य} &= \text{क}(\text{अ} - \text{इ}\cdot\text{ज्याअ}) \\ \text{र} &= \text{क}(१ - \text{इ}\cdot\text{कोज्याअ}) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (२)$$

ऐसा हो गा।

यदि यहां इ = १ तो (२) समीकरण ठीक चक्रालद का हो जाय गा।



(१३) अपचक्रालद (The Epicycloid)।

अकख वृत्त स्थिर है उस के परिधिस्थ अ विन्दु पर पहले कपव वृत्त का व विन्दु रहा फिर कपव वृत्त स्थिरवृत्त के परिधि पर चलने लगा इस के चलने से व विन्दु भी किसी मार्ग में चले गा कल्पना करो कि व विन्दु अवपख वक्र में चला तो अवपख वक्र को अपचक्रालद कहते हैं।

कपव वृत्त का केन्द्र ग, और अकख वृत्त का केन्द्र के कल्पना करो, क चलितवृत्त और स्थिरवृत्त का स्पर्शविन्दु किसी समय में है। के अ रेखा को य अक्ष और गन, वम को य अक्ष पर पड़ा लम्ब समझो और केक = अ, गक = अ, मानो और <अकेक = ए, <कगव = ब तो

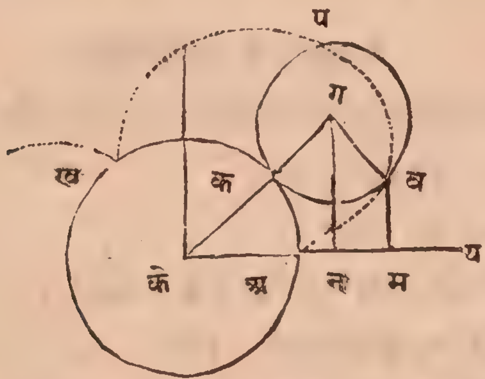
$$य = केन + नम = (अ + क)\ कोज्याप + क \cdot ज्या\left(ब - \frac{\pi}{२} + ष\right)$$
$$= (अ + क)\ कोज्याप - क \cdot कोज्या\ (ब + ष)$$

परन्तु वक्र के लक्षण से अकचाप = कवचाप

इस लिये अ · ष = क · ब और $\frac{अ \cdot ष}{क}$ = ब इस का उत्थापन य के मान में देने से

$$य = (अ + क)\ कोज्याप - क \cdot कोज्या\ \frac{अ + क}{क}\ ष$$

इसी प्रकार, $र = मव = (अ + क)\ ज्याप - क \cdot ज्या\ \frac{अ + क}{क}\ ष$



यदि चलितवृत्त स्थिरवृत्त के भीतर परिधि से स्पर्श करता हुआ चले तो स्पष्ट है कि पूर्व समीकरण में क के स्थान में − क का उत्थापन देने से वक्र का समीकरण हो गा इस लिये तब

$$य = (अ - क)\ कोज्याप + क \cdot कोज्या\ \frac{अ - क}{क}\ ष$$

$$र = (अ - क)\ ज्याप - क \cdot ज्या\ \frac{अ - क}{क}\ ष$$

ऐसा समीकरण हो गा। इस समीकरण के वक्र को अतिचक्राभ (The Hypocycloid) कहते हैं। इस में क को अ से बड़ा मानने से एक और भेद हो सकता है।

यदि अतिचक्राभ के समीकरण में अ = ४ क

तो $य = ३\ क \cdot कोज्याप + क \cdot कोज्या\ ३\ ष = ४\ क \cdot कोज्या^{३}ष = अ \cdot कोज्या^{३}ष$

$र = ३\ क \cdot ज्याप - क \cdot ज्या\ ३\ ष = ४\ क \cdot ज्या^{३}प = अ \cdot ज्या^{३}प$

इस लिये $य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ ऐसा एक प्रकार के वक्र का समीकरण उत्पन्न हुआ ।

इसी प्रकार यदि पूर्वोक्त अतिचक्रालद के समीकरण में अ = २ क तो य = २ क · कोज्याष और र = ० हो गा

इस लिये अब यही अतिचक्रालद का रूप स्थिरवृत्त के व्यास-रेखारूप हो गा ।

इस प्रकार से हजारों वक्र बन सकते हैं विद्यार्थियों को चाहिये कि पूछने वाला जैसा कहै उस लक्षण के अनुसार जिस में सुभीता पड़े उस प्रकार का समीकरण अक्षीय वा भुजयुग्मसम्बन्धि बनावे ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

नीचे लिखे हुए समीकरणों के वक्रों की आकृति बनावो ? ।

(१) $र^३ = २ अय^२ - य^३$ ।

(२) $र^३ = अ^३ - य^३$ ।

(३) $र^२ (य^२ - अ^२) = य^२ (य + अ)^२$ ।

(४) $य^२र^२ = ४ अ^२ (य^२ - र^२)$ ।

(५) $र^२ (य - ८ अ) = २ अय (य - ६ अ)$ ।

(६) $(य^२ + र^२)^३ = १६ अ^२य^२र^२$ ।

(७) $र^२ (अ - य) = य^३$ (शिञ्जिनीद्वयज)

(८) $य^२र^२ = (अ^२ - र^२)(२क + र)^२$ (कर्णच्छेद) ।

(९) $(य^२ + र^२) = २ अ \sqrt{य^२ - र^२}$ ।

(१०) श्रु = २ अपज्या २ ष ।

(११) श्रु = अ (२ ष + ज्या २ ष) ।

(१२) श्रु = अ (ज्याष + स्पष) ।

(१३) श्रु = अ (ष + छे $\frac{ष}{२}$) ।

(१४) श्रु = अ (२ ष + उज्याष) ।

(१५) श्रु = अ (लाज्याष) ।

(१६) श्रुज्याष = अ · $कोज्या^२ष$ ।

(१७) $श्रु^२$कोज्याष = $अ^२कोज्या^३$ ३ ष ।

(१८) श्रु (ष − स्पष) = अ (ष + स्पष) ।

(१९) $श्रु^{२}$कोज्या २ ष = $अ^{२}$$ज्या^{३}$ २ ष ।

(२०) श्रु · ष = अ ।

(२१) ष · $श्रु^{२}$ज्याष = अ ।

(२२) $श्रु^{२}$ · लाष = अ ।

(२३) अप चक्रालद के व विन्दु पर जो स्पर्शरेखा और मुख्य-लम्ब हो गा उन का समीकरण बनावो? (१३ वां वक्र देखो)

(२४) य = २ अ (१ − कोज्याब) जहां र = २ अब इस की आकृति बनावो? । इस वक्र को चक्रालद का साथी कहते हैं ।

(२५) अपचक्रालद में यदि अ = २ क तो सिद्ध करो कि $४ (य^{२} + र^{२} - अ^{२})^{३} = २७\, अ^{४} र^{२}$ ।

(२६) यदि अपचक्रालद में अ = क तो सिद्ध करो कि वक्र का श्रु = अ (१ − कोज्याष) ऐसा समीकरण हो गा? ।

(२७) २८५ वें प्रक्रम में (३) उदाहरण का जो वक्र है उस में सिद्ध करो कि < वकअ = $\frac{१}{३}$ ∠ कअब जहां व वक्र में कोई विन्दु है ।

(२८) २८५ वें प्रक्रम में (३) उदाहरण का जो वक्र है उस में यदि क'व' रेखा कर दी जाय तो सिद्ध करो कि < वक'व' = ६०° ।

(२९) नीचे लिखे हुए समीकरणसम्बन्धि वक्रों की आकृति बनावो? ।

(१) $र = य \sqrt{\frac{य^{२} - अ^{२}}{य^{२} + अ^{२}}}$ ।   (२) $र = य \sqrt{\frac{य^{२} + अ^{२}}{य^{२} - अ^{२}}}$ ।

(३) $र = य \sqrt{\frac{अ^{२} + य^{२}}{अ^{२} - य^{२}}}$ ।   (४) $र^{२} = \frac{अ^{४}}{अ^{२} + य^{२}}$ ।

(५) $र = (य - २) \sqrt{\frac{य - ९}{य}}$ ।   (६) $र = य \sqrt{\frac{अ^{२} - य^{२}}{अ^{२} + य^{२}}}$ ।

(३०) श्रु = अ − अस्पष एक यह वक्र और दूसरा $श्रु = \frac{२\, अ}{१ - स्पष}$ यह वक्र है इन के योगविन्दु पर दोनों वक्रों में जो स्पर्श रेखा हों गी

उन से जो कोण उत्पन्न हो गा उस का समान द्विभाग श्रुति से होता है? इस को सिद्ध करना चाहिये ।

(३१) $\frac{र}{ग}$ = स्प $\frac{य}{अ}$ ला (म · स्प $\frac{य}{अ}$) इस समीकरण के वक्र की आकृति कैसी हो गी? जब म बड़ा है एक से, जब म समान है एक के और जब म छोटा है एक से ।

(३२) ३० वें प्रश्न में सिद्ध करो कि योगविन्दु पर जो दोनों वक्रों में स्पर्शरेखा हों गी उन से २ स्प$^{-१}$ (१ + $\sqrt{२}$) इतना बड़ा कोण उत्पन्न हो गा? ।

(३३) एक पुरुष अपनी मुट्ठी में एक सुग्गे को पकड़े लिये चला आता था (जिस के पैर और मुट्ठी का अन्तर एक हाथ था) दैवयोग से मुट्ठी ढीली होने के कारण सुग्गा छूटा और छूटते ही उड़ चला। वह पुरुष भी जिस ओर सुग्गा चला उसी ओर दौड़ा। उस समय में यह चमत्कार हुआ कि जितना हाथ पुरुष दौड़ता था उस के घन, वर्ग की युति में उसी को मिला देने से जो हो उस में एक जोड़ दो तो उतना ऊपर पृथ्वी से उस पुरुष के शिर के सामने सुग्गा उठता था तो बताओ कि सुग्गा जिस वक्र में जाता था उस की आकृति कैसी हो गी? और जब पुरुष दश हाथ दौड़ा उस समय सुग्गा मुख्यलम्ब की दिशा से पृथ्वी पर उतरे तो पुरुष और सुग्गे का अन्तर सिद्ध करो कि १०१ $\frac{१११९}{३५२०}$ इतना मील हो गा? ।

इति एकोनविंशति अध्याय ।

विंशति अध्याय ।

उन्नीसो अध्यायसम्बन्धि विशेष के विषय में ।

२८७ । जब स्पष्ट है कि $\frac{ता र}{ता ल} = \frac{\frac{ता र}{ता य}}{\frac{ता ल}{ता य}}$ इस लिये यदि य के वश से र का तात्कालिकसम्बन्ध ज्ञात हो और उस पर से ल के वश से तात्कालिकसम्बन्ध जानना हो जहां ल भी य का कोई फल है तो

य के वश से जो र का सम्बन्ध है उस में य के वश से ल का जो सम्बन्ध हो उस का भाग देने से र का ल के वश से सम्बन्ध निकल आवै गा।

जैसे $र = ज्या^{-1}\sqrt{य} - \sqrt{(य - य^{2})}$

और, $ल = कोज्या^{-1}(य^{\frac{1}{3}}अ^{\frac{1}{6}}) - \sqrt{(य^{\frac{2}{3}}अ^{\frac{1}{3}} - य^{\frac{4}{3}}अ^{\frac{2}{3}})}$।

यहां $\frac{तार}{ताल}$ इस का मान जानना है तो दूसरे और तीसरे

अध्याय से, $\frac{तार}{ताय} = \frac{1}{2\sqrt{य - य^{2}}} - \frac{1 - 2य}{2\sqrt{य - य^{2}}} = \frac{य^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - य}}$

और $\frac{ताल}{ताय} = -\frac{अ^{\frac{1}{6}}}{3य^{\frac{1}{3}}\sqrt{य^{\frac{2}{3}} - अ^{\frac{1}{3}}य^{\frac{4}{3}}}} - \frac{अ^{\frac{1}{6}} - 2अ^{\frac{1}{3}}य^{\frac{2}{3}}}{3य^{\frac{1}{3}}\sqrt{य^{\frac{2}{3}} - अ^{\frac{1}{3}}य^{\frac{4}{3}}}}$

$$= -\frac{2अ^{\frac{1}{6}}\sqrt{1 - अ^{\frac{1}{3}}य^{\frac{2}{3}}}}{3य^{\frac{2}{3}}}$$

$$इस\ लिये\ \frac{तार}{ताल} = \frac{\frac{तार}{ताय}}{\frac{ताल}{ताय}} = \frac{\frac{य^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - य}}}{-\frac{2अ^{\frac{1}{6}}\sqrt{1 - अ^{\frac{1}{3}}य^{\frac{4}{3}}}}{3य^{\frac{2}{3}}}}$$

$$= -\frac{3य^{\frac{7}{6}}}{2अ^{\frac{1}{6}}\sqrt{1 - य}\sqrt{1 - अ^{\frac{1}{3}}य^{\frac{4}{3}}}}$$

यही उत्तर हुआ।

इस प्रकार जहां कहीं ऊपर के ऐसा प्रश्न हो उस का उत्तर निकालो।

२८८। (२३) वें प्रक्रम में जो होमरशम काक्स साहब की की हुई उपपत्ति अर्थात्

$$फ(य+च)=फ(य)+च\cdot फ'(य)+\frac{च^2}{\lfloor 2}फ''(य)+\cdots$$

$$+\frac{च^न}{\lfloor न}फ^न(य)+\frac{च^{न+1}}{\lfloor न+1}फ^{न+1}(य+पच)$$ यह दिखलाया है इसे टेलर के सिद्धान्त की सीमा जानने के लिये ल्याग्रांज (Lagrange) का सिद्धान्त कहते हैं ल्याग्रांज ने इस सिद्धान्त को सन् १८०१ में प्रकाश किया था इस में यदि $न=0$ मानो तो

$फ(य+च)=फ(य)+च\cdot फ'(य+पच)$ ऐसा हो गा। इस में यदि स्वल्पान्तर से प का मान जानना हो तो कल्पना करो कि

$$प=अ+कच+ख\cdot च^2+\cdots, \qquad (1)$$

टेलर के सिद्धान्त से

$$च\cdot फ'(य+प\cdot च)=च\left\{फ'(य)+पच\cdot फ''(य)+\frac{प^2\cdot च^2}{\lfloor 2}फ'''(य)+\cdots\right\}$$

इस लिये $फ(य+च)=फ(य)+च\cdot फ'(य+प\cdot च)$

$$=फ(य)+च\cdot फ'(य)+पच^2\cdot फ''(य)+\frac{प^2\cdot च^3}{\lfloor 2}फ'''(य)+\cdots$$ इस में

(१) समीकरण का उत्थापन देने से

$$फ(य+च)=फ(य)+च\cdot फ'(य)+अच^2\cdot फ''(य)$$

$$+च^3\left\{कफ''(य)+\frac{अ^2}{\lfloor 2}फ'''(य)\right\}$$

$$+च^4\left\{ख\cdot फ''(य)+अकफ'''(य)+\frac{अ^3}{\lfloor 3}फ''''(य)\right\}+\cdots$$

परन्तु टेलर के सिद्धान्त से

$$फ(य+च)=फ(य)+च\cdot फ'(य)+\frac{च^2}{\lfloor 2}फ''(य)+\frac{च^3}{\lfloor 3}फ'''(य)+\cdots$$

इस लिये $फ(य)+च\cdot फ'(य)+च^2\cdot अ\cdot फ''(य)$

$$+\text{च}^{\text{३}}\left\{\text{क}\cdot\text{फ}''(\text{य})+\frac{\text{अ}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}\text{फ}'''(\text{य})\right\}+\cdots$$

$$=\text{फ}(\text{य})+\text{च}\cdot\text{फ}'(\text{य})+\frac{\text{च}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}\text{फ}''(\text{य})+\frac{\text{च}^{\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}\text{फ}'''(\text{य})+\cdots$$

इस सरूपसमीकरण में च के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$\text{अ}\cdot\text{फ}''(\text{य})=\frac{\text{फ}''(\text{य})}{\text{२}}\text{ । }\text{क}\cdot\text{फ}''(\text{य})+\frac{\text{अ}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}\text{फ}'''(\text{य})=\frac{\text{फ}'''(\text{य})}{\underline{|\text{३}}}$$

और $\text{ख}\cdot\text{फ}''(\text{य})+\text{अकफ}'''(\text{य})+\frac{\text{अ}^{\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}\text{फ}''''(\text{य})=\frac{\text{फ}''''(\text{य})}{\underline{|\text{४}}}$, इत्यादि

इन पर से अ, क, ख इत्यादि का व्यक्त मान जान कर (१) समीकरण में उत्थापन देने से

$$\text{प}=\frac{\text{१}}{\text{२}}+\frac{\text{च}}{\text{२४}}\cdot\frac{\text{फ}'''(\text{य})}{\text{फ}''(\text{य})}+\frac{\text{च}^{\text{२}}}{\text{४८}}\cdot\frac{\text{फ}''(\text{य})\cdot\text{फ}''''(\text{य})-\left\{\text{फ}'''(\text{य})\right\}^{\text{२}}}{\left\{\text{फ}''(\text{य})\right\}^{\text{२}}}+\cdots$$

यदि च बहुत छोटा हो तो स्वल्पान्तर से और पदों को छोड़ देने से $\text{प}=\frac{\text{१}}{\text{२}}$ इस का उत्थापन फ(य + च) में देने से

स्वल्पान्तर से $\text{फ}(\text{य}+\text{च})=\text{फ}(\text{य})+\text{च}\cdot\text{फ}'\left(\text{य}+\frac{\text{च}}{\text{२}}\right)$ ऐसा हुआ ।

जैसे यदि $\text{फ}(\text{य}+\text{च})=\text{ज्या}(\text{य}+\text{च})$ तो

$\text{ज्या}(\text{य}+\text{च})=\text{ज्याय}+\text{च}\cdot\text{कोज्या}(\text{य}+\text{प}\cdot\text{च})$ ऐसा हो गा इस में यदि $\text{य}=\text{३५}^{\circ}$, $\text{च}=\text{१०}^{\circ}$, च का चापीयमान = ·१७४५३२९

$$\therefore\ \text{कोज्या}(\text{य}+\text{पच})=\frac{\text{ज्या}(\text{य}+\text{च})-\text{ज्याय}}{\text{च}}=\frac{\text{ज्या ४५}^{\circ}-\text{ज्या ३५}^{\circ}}{\cdot\text{१७४५३२९}}$$

$$=\frac{\cdot\text{७०७१०६८}-\cdot\text{५७३५७६४}}{\cdot\text{१७४५३२९}}=\frac{\cdot\text{१३३५३०४}}{\cdot\text{१७४५३२९}}$$ इस का चाप जान कर कोटि

बनाने से, $\text{४०}^{\circ}\frac{\text{१}}{\text{१२}}=\text{य}+\text{प}\cdot\text{च}=\text{३५}^{\circ}+\text{१०}\,\text{प}$

$\therefore$ प $= \frac{५\frac{१}{१२}}{१०} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१२०} = \frac{१}{२}$ स्वल्पान्तर से । इस प्रकार च को और अल्प मानने से प बहुत ही पास $\frac{१}{२}$ के हो गा ।

२८९ । किसी वृत्त में चाप की पूर्णज्या और चाप के आधे की पूर्णज्या जान स्वल्पान्तर से उन दोनों पर से चाप का मान जानना ।

कल्पना करो कि वृत्त का व्यासार्द्ध = अ, चाप का मान = चा, चाप के सजातीय रूपव्यासार्द्धसम्बन्धि वृत्त का चाप = ष, चाप की पूर्णज्य = पू और चाप के आधे की पूर्णज्या = पू' तो सरलत्रिकोणमिति से चा = अ · ष, पू = २ अ · ज्या $\frac{१}{२}$ ष और पू' = २ अ · ज्या $\frac{१}{४}$ ष, तो

$$\text{पू} \cdot \text{य} + \text{पू}' \cdot \text{र} = २\,\text{अ} \left(\text{य} \cdot \text{ज्या}\,\tfrac{१}{२}\,\text{ष} + \text{र} \cdot \text{ज्या}\,\tfrac{१}{४}\,\text{ष} \right)$$

परन्तु (२०) वें प्रक्रम के (१) उदाहरण से

$$\text{ज्या}\,\tfrac{१}{२}\,\text{ष} = \frac{\text{ष}}{२} - \frac{\text{ष}^{३}}{६ \cdot ८} + \frac{\text{ष}^{५}}{१२० \cdot ३२} - \cdots$$

$$\text{ज्या}\,\tfrac{१}{४}\,\text{ष} = \frac{\text{ष}}{४} - \frac{\text{ष}^{३}}{६ \cdot ६४} + \frac{\text{ष}^{५}}{६ \cdot १०२४} - \cdots$$

इस लिये पू · य + पू' · र

$$= २\,\text{अ} \left\{ \left(\frac{\text{य}}{२} + \frac{\text{र}}{४} \right) \text{ष} - \left(\frac{\text{य}}{८} + \frac{\text{र}}{६४} \right) \frac{\text{ष}^{३}}{६} + \left(\frac{\text{य}}{३२} + \frac{\text{र}}{१०२४} \right) \frac{\text{ष}^{५}}{१२०} - \cdots \right\}$$

मानो कि $\frac{\text{य}}{२} + \frac{\text{र}}{४} = \frac{१}{२}$, और $\frac{\text{य}}{८} + \frac{\text{र}}{६४} = 0$ तो $\text{य} = -\frac{१}{३}$, $\text{र} = \frac{८}{३}$ इन का उत्थापन देने से $\frac{८\,\text{पू}' - \text{पू}}{३} = \text{चा} \left(१ - \frac{\text{ष}^{४}}{७६८०} \right)$ स्वल्पान्तर से ।

इस से यह सिद्ध होता है कि चाप के आधे की पूर्णज्या को आठ से गुण उस में चाप की पूर्णज्या घटाओ शेष की तिहाई स्वल्पान्तर से चाप का मान हो गा ।

यदि चाप के चौथाई के पूर्णज्या का मान पू'' मानो तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\frac{\text{पू} + २५६\,\text{पू}'' - ४०\,\text{पू}'}{४५} = \text{चा} \left(१ + \frac{\text{ष}^{६}}{२०६४३८४०} \right)$$ ऐसा सिद्ध कर सकते हो ।

इसी प्रकार यदि अष्टमांश के पूर्णज्या का मान पू''' मानो तो चार गुणक उत्पन्न हों गे उन का मान जो क्रम से य, र, ल, और व कल्पना करो तो

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\text{य}}{\text{२}}+\frac{\text{र}}{\text{२}^{\text{२}}}+\frac{\text{ल}}{\text{२}^{\text{३}}}+\frac{\text{व}}{\text{२}^{\text{४}}}=\frac{\text{१}}{\text{२}}\\
&\frac{\text{य}}{\text{२}^{\text{३}}}+\frac{\text{र}}{\text{२}^{\text{६}}}+\frac{\text{ल}}{\text{२}^{\text{९}}}+\frac{\text{व}}{\text{२}^{\text{१२}}}=0\\
&\frac{\text{य}}{\text{२}^{\text{५}}}+\frac{\text{र}}{\text{२}^{\text{१०}}}+\frac{\text{ल}}{\text{२}^{\text{१५}}}+\frac{\text{व}}{\text{२}^{\text{२०}}}=0\\
&\frac{\text{य}}{\text{२}^{\text{७}}}+\frac{\text{र}}{\text{२}^{\text{१४}}}+\frac{\text{ल}}{\text{२}^{\text{२१}}}+\frac{\text{व}}{\text{२}^{\text{२८}}}=0
\end{aligned}\right\}\text{ ये चार समीकरण हों गे।}$$

इन पर से $\text{य}=-\frac{\text{१}}{\text{२८३५}}$, $\text{र}=\frac{\text{१६८}}{\text{२८३५}}$, $\text{ल}=-\frac{\text{५३७६}}{\text{२८३५}}$ और $\text{व}=\frac{\text{३२७६८}}{\text{२८३५}}$ ये सिद्ध हो जायं गे इन का उत्थापन $\text{य}\cdot\text{पू}+\text{र}\cdot\text{पू}'+\text{ल}\cdot\text{पू}'+\text{व}\cdot\text{पू}''$ इस में देने से

$$\frac{\text{१६८ पू}'+\text{३२७६८ पू}'''-\text{पू}-\text{५३७६ पू}''}{\text{२८३५}}=\text{चा}\left(\text{१}-\frac{\text{चा}^{\text{८}}}{\text{३८०५०७२५८८८०}}\right)$$

ऐसा हो गा इस में कुछ गौरव दोष तो है परन्तु पूर्वोक्त दोनों के अपेक्षा सूक्ष्म है। इस प्रकार चाप के तृतीयांशादि की पूर्णज्याओं को जान कर भी चाप का मान स्वल्पान्तर से जानने के लिये अनेक प्रकार बना सकते हो।

२९०। कल्पना करो कि

$\text{०}^{\text{म}}, \text{१}^{\text{म}}, \text{२}^{\text{म}}, \text{३}^{\text{म}}, \text{४}^{\text{म}}, \cdots\cdots$ इत्यादि पद हैं (जहां म कोई धन अभिन्नसंख्या है) इन का परस्पर अन्तर जानना है (८५ प्रक्रम देखो)

यदि $\text{म}=\text{१}$, तो, $\triangle\cdot 0=\text{१}$, $\triangle^{\text{२}}\cdot 0=0$, $\triangle^{\text{३}}\cdot 0=0$, $\triangle^{\text{४}}\cdot 0=0$,

$\text{म}=\text{२}$, तो, $\triangle\cdot 0^{\text{२}}=\text{१}$, $\triangle^{\text{२}}\cdot 0^{\text{२}}=\text{२}$, $\triangle^{\text{३}}\cdot 0^{\text{२}}=0$, $\triangle^{\text{४}}\cdot 0^{\text{२}}=0$,

$\text{म}=\text{३}$ तो, $\triangle\cdot 0^{\text{३}}=\text{१}$, $\triangle^{\text{२}}\cdot 0^{\text{३}}=\text{६}$, $\triangle^{\text{३}}\cdot 0^{\text{३}}=\text{६}$, $\triangle^{\text{४}}\cdot 0^{\text{३}}=0$

$\text{म}=\text{४}$ तो, $\triangle\cdot 0^{\text{४}}=\text{१}$, $\triangle^{\text{२}}\cdot 0^{\text{४}}=\text{१४}$, $\triangle^{\text{३}}\cdot 0^{\text{४}}=\text{३६}$,

$\triangle^{\text{४}}\cdot 0^{\text{४}}=\text{२४}$, $\triangle^{\text{५}}\cdot 0^{\text{४}}=0$, $\cdots$

इस से यह ज्ञान पड़ता है कि यदि न > म तो $\triangle^{न} \cdot 0^{म} = 0$ ऐसा होता है ।

८५ प्रक्रम में यदि, स, $स_१$, ... $स_न$ इत्यादि के स्थान में $0^{म}$, $१^{म}$, $२^{म}$, ... $न^{म}$ का उत्थापन दो तो

$$\triangle^{न} \cdot 0^{म} = न^{म} - न(न-१)^{म} + न \cdot \frac{न-१}{२}(न-२)^{म} - \cdots$$

$$\pm न \cdot १^{म} \mp 0^{म}$$

और,

$$\triangle^{न-१} \cdot १^{म-१} = न^{म-१}$$

$$-(न-१)(न-१)^{म-१} + (न-१)\frac{न-२}{२}(न-२)^{म-१} - \cdots$$

$$\pm १^{म-१}$$

देखो यहां यदि दूसरी श्रेढ़ी को न से गुण दो तो पहली श्रेढ़ी हो जाती है इस लिये $\triangle^{न} \cdot 0^{म} = न(\triangle^{न-१} \cdot १^{म-१})$ परन्तु श्रेढ़ी-परम्परा के धर्म से

$$\triangle^{न-१} \cdot १^{म-१} = \triangle^{न-१} \cdot 0^{म-१} + \triangle^{न} \cdot 0^{म-१}$$

इस लिये $\triangle^{न} \cdot 0^{म} = न(\triangle^{न-१} \cdot 0^{म-१} + \triangle^{न} \cdot 0^{म-१})$ ...... (१)

दोनों पक्षों में यदि $\underline{|न}$ का भाग दो तो

$$\frac{\triangle^{न} \cdot 0^{म}}{\underline{|न}} = \frac{\triangle^{न-१} \cdot 0^{म-१}}{\underline{|न-१}} + न\frac{\triangle^{न} \cdot 0^{म-१}}{\underline{|न}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

जैसे ऊपर अभी अन्तर कर के दिखा आये हैं कि

$$\triangle^{२} \cdot 0^{३} = ६, \ \triangle^{३} \cdot 0^{३} = ६$$

अब जब म = ४ तब चाहते हैं कि $\triangle^{३} \cdot 0^{४}$ इस का मान निकालें ।

(१) समीकरण में न, और म के स्थान में ३, और ४ का उत्थापन देने से,

$\triangle^{३} \cdot 0^{४} = ३(\triangle^{२} 0^{३} \cdot + \triangle^{३} \cdot 0^{३}) = ३(६+६) = ३६$ यही पहले अन्तर करने से भी सिद्ध हुआ है इस प्रकार पीछे के अन्तरों के ज्ञान से आगे का चाहे जौन सा अन्तर निकल सकता है ।

और इसी प्रकार (२) समीकरण से न संख्यक अन्तर $\underline{|न}$ भक्त निकले गा ।

२९१ । ८५ प्रक्रम के अन्त्य में जो श्रेढ़ी है उस में स, $स_1$, $स_2$ ⋯ $स_न$ इत्यादि के स्थानों में यदि $0^म$, $1^म$, $2^म$, ⋯ $य^म$ का उत्थापन देवो तो

$$य^म = 0^म + य \cdot \triangle \cdot 0^म + य \frac{य-1}{2} \triangle^2 \cdot 0^म + \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

क्यों कि यहां न = य

$$\text{और } \triangle य^म = \triangle \cdot 0^म + य \cdot \triangle^2 \cdot 0^म + \frac{य(य-1)}{2} \triangle^3 \cdot 0^म + \cdots \quad (2)$$

२९२ । यदि स = स्थिर = ग, $स_1 = ग + र$, $स_2 = ग + र + र_1$, $स_3 = ग + र + र_1 + र_2$, ⋯, $स_न = ग + र + र_1 + र_2 + \cdots + र_{न-1}$ ……… (३)

तो ८५ प्रक्रम से,

$$स_न = ग + न \cdot \triangle ग + न \cdot \frac{न-1}{2} \triangle^2 ग + \cdots + न \cdot \triangle^{न-1} ग + \triangle^न ग$$

इस में △ ग, $\triangle^2$ग ⋯ इत्यादि के स्थान में र, △ र, इत्यादि का उत्थापन देने से

$$ग + न \cdot र + न \cdot \frac{न-1}{2} \triangle र + \cdots + न \cdot \triangle^{न-2} र + \triangle^{न-1} र$$

$= ग + र + र_1 + र_2 + \cdots = स_न$, इस लिये

$$र + र_1 + र_2 + \cdots = न \cdot र + न \cdot \frac{न-1}{2} \triangle र + \cdots + \triangle^{न-1} र$$

$$= स_न - ग, \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

यदि (३) समीकरण के पास पास दो दो पदों का अन्तर करो तो

$स_न - स_{न-1} = र_{न-1} = \triangle स_{न-1}$ और $र_न = \triangle स_न$

$\therefore \triangle^{-1} र_न = ग + र + र_1 + \cdots + र_{न-1}$ यहां $\triangle^{-1} र = ग$,

$\triangle^{-1} र_1 = ग + र$, इत्यादि समझो ।

२९३ । २९२ प्रक्रम के (४) समीकरण में यदि र, $र_1$, $र_2$ ⋯ के स्थान में $0^म$, $1^म$, $2^म$ ⋯ का और न के स्थान में य का उत्थापन देवो तो

$$स_न - ग = य \cdot 0^म + \frac{य(य-१)}{२} \Delta \cdot 0^म + \frac{य(य-१)(य-२)}{\lfloor ३} \Delta^२ \cdot 0^म + \cdots, \quad \cdots\cdots (१)$$

२९४ । २९१ प्रक्रम के (१) और २९३ प्रक्रम के (१) में य के स्थान में य + इ + १ इस का उत्थापन देने से

$$(य+इ+१)^म = 0^म + \Delta \cdot 0^म (य+इ+१) + \frac{\Delta^२ \cdot 0^म}{२}(य+इ+१)(य+इ) + \cdots\cdots (१)$$

$$स_न - ग = 0^म(य+इ+१) + \frac{\Delta \cdot 0^म}{२}(य+इ+१)(य+इ) + \frac{\Delta^२ \cdot 0^म}{\lfloor ३}(य+इ+१)(य+इ)(य+इ-१) + \cdots, \cdots (२)$$

(१) और (२) का रूपान्तर करने से

$$(य+इ+१)^म = \Delta \cdot 0^म (य+इ+१) + \frac{\Delta^२ \cdot 0^म}{२}(य+इ+१)(य+इ) + \cdots, \cdots\cdots (३)$$

$$स_न - ग = \Delta \cdot 0^म \frac{य+इ+१}{२}(य+इ) + \frac{\Delta^२ \cdot 0^म}{\lfloor ३}(य+इ+१)(य+इ)(य+इ-१) + \cdots, \cdots (४)$$

(४) में य के स्थान में −१ का उत्थापन देने से

$स_न = 0$ (क्यों कि $र_{न-१} = र_{य-१}$ (२९३) प्रक्रम से इस लिये जब $य = -१$ तो $स_न = स_य$ अर्थात् $स_न = स_{-१} = 0$) इस लिये

$$-ग = \frac{\Delta \cdot 0^म}{२}(इ-१)इ + \frac{\Delta^२ \cdot 0^म}{\lfloor ३}(इ-२)(इ-१)इ + \cdots$$

$$तब\ स_न = \frac{\Delta \cdot 0^म}{२}(य+इ+१)(य+इ) + \frac{\Delta^२ \cdot 0^म}{\lfloor ३}(य+इ+१)(य+इ)(य+इ-१) + \cdots$$

$$-\frac{\Delta\cdot 0^{\text{म}}}{\text{२}}(\text{इ}-\text{१})\text{इ}-\frac{\Delta^{\text{२}}\cdot 0^{\text{म}}}{\underline{|\text{३}}}(\text{इ}-\text{२})(\text{इ}-\text{१})\text{इ}-\cdots\quad(\text{५})$$

इ के स्थान में $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ का उत्थापन दे कर $\text{क}^{\text{म}}$ से गुण देने से,

$$\text{क}^{\text{म}}\cdot\text{स}_{\text{न}}=\frac{\Delta\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{२}}}{\text{२}}(\text{अ}+\text{कय})(\text{अ}+\text{कय}+\text{क})$$

$$+\frac{\Delta^{\text{२}}\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}(\text{अ}+\text{कय}-\text{क})(\text{अ}+\text{कय})(\text{अ}+\text{कय}+\text{क})+\cdots$$

$$-\frac{\Delta\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{२}}}{\text{२}}(\text{अ}-\text{क})\text{अ}$$

$$-\frac{\Delta^{\text{२}}\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}(\text{अ}-\text{२क})(\text{अ}-\text{क})\text{अ}-\cdots\cdots\quad(\text{६})$$

परन्तु य के स्थान में $-\text{१}, 0, \text{१}, \text{२}\cdots$ इत्यादि का उत्थापन देने से (३) का रूपान्तर जो हो उसे $\text{क}^{\text{म}}$ से गुण कर जोड़ देने से बायां पक्ष $\text{अ}^{\text{म}}+(\text{अ}+\text{क})^{\text{म}}+(\text{अ}+\text{२क})^{\text{म}}+\cdots$ और दहिना पक्ष ठीक (६) वां समीकरण होता है

इस लिये $\text{अ}^{\text{म}}+(\text{अ}+\text{क})^{\text{म}}+(\text{अ}+\text{२क})\cdots+(\text{अ}+\text{यक})^{\text{म}}$

$$=\frac{\Delta\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}(\text{अ}+\text{कय})(\text{अ}+\text{कय}+\text{क})$$

$$+\frac{\Delta^{\text{२}}\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}(\text{अ}+\text{कय}-\text{क})(\text{अ}+\text{कय})(\text{अ}+\text{कय}+\text{क})+\cdots$$

$$-\frac{\Delta\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}(\text{अ}-\text{क})\text{अ}$$

$$-\frac{\Delta^{\text{२}}\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{क}^{\text{म}-\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}(\text{अ}-\text{२क})(\text{अ}-\text{क})\text{अ}-\cdots\cdots\quad(\text{७})$$

जैसे यदि $\text{१}^{\text{म}}+\text{३}^{\text{म}}+\text{५}^{\text{म}}+\cdots+(\text{२प}-\text{१})^{\text{म}}$ इन का योग करना है तो यहां $\text{अ}=\text{१}$, $\text{क}=\text{२}$ और $\text{य}=\text{प}-\text{१}$ इन का उत्थापन (७) वें में देने से $\text{१}^{\text{म}}+\text{३}^{\text{म}}+\text{५}^{\text{म}}+\cdots+(\text{२प}-\text{१})^{\text{म}}$

$$=\frac{\Delta\cdot 0^{\text{म}}\cdot\text{२}^{\text{म}-\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}(\text{२प}-\text{१})(\text{२प}+\text{१})$$

$$+\frac{\Delta^{२}\cdot 0^{म}\cdot २^{म-३}}{\lfloor ३}(२प-३)(२प-१)(२प+१)+\cdots$$

$$-\frac{\Delta\cdot 0^{म}\cdot २^{म-२}}{\lfloor २}\times -१\times १$$

$$-\frac{\Delta^{२}\cdot 0^{म}\cdot २^{म-३}}{\lfloor ३}\times -३\times -१\times १-\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots (८)$$

२९५। ऊपर के (८) वें समीकरण में यदि म = ३ तो

$$१^{३}+३^{३}+५^{३}+\cdots+(२प-१)^{३}$$

$$=\frac{\Delta\cdot 0^{३}\cdot २}{\lfloor २}(२प-१)(२प+१)$$

$$+\frac{\Delta^{२}\cdot 0^{३}}{\lfloor ३}(२प-३)(२प-१)(२प+१)+\cdots$$

$$-\frac{\Delta\cdot 0^{३}\cdot २}{\lfloor २}\times -१\times १-\frac{\Delta^{२}\cdot 0^{३}}{\lfloor ३}\times -३\times -१\times १-\cdots$$

परन्तु २९० प्रक्रम से $\Delta\cdot 0^{३}=१$, $\Delta^{२}\cdot 0^{३}=६$, $\Delta^{३}\cdot 0^{३}=६$, और $\Delta^{४}\cdot 0^{३}=0$, इस लिये

$$१^{३}+३^{३}+५^{३}+\cdots+(२प-१)^{३}$$

$$=(२प-१)(२प+१)+(२प-३)(२प-१)(२प+१)$$

$$+\frac{(२प-५)(२प-३)(२प-१)(२प+१)}{२\times ४}+१-३+\frac{१५}{८}$$

$$=\frac{८(२प-१)(२प+१)+\{(२प-३)(२प-१)(२प+१)\}\{८+२प-५\}-१}{८}$$

$$=\frac{८(२प-१)(२प+१)+(२प-३)(२प-१)(२प+१)(२प+३)-१}{८}$$

$$=\frac{\{(२प-१)(२प+१)\}\{८+(२प-३)(२प+३)\}-१}{८}$$

$$=\frac{\{४प^{२}-१\}\{८+(४प^{२}-९)\}-१}{८}=\frac{(४प^{२}-१)^{२}-१}{८}$$ इस से यह

सिद्ध होता है कि दूने गच्छ का वर्ग कर उस में एक घटावो शेष के वर्ग में एक घटा कर आठ का भाग देवो तो १, ३ आदि विषमाङ्कों के घनों का योग हो गा।

श्लोक।

बुध गच्छद्विघातस्य वर्गः कूनोऽथ तत्कृतिः।
कूनेभहृद्युतिः सा स्याद्विषमाङ्कघनोद्भवा ॥

दोहा।

दूने पद को वर्ग करि रखिये ताहि सुजान।
ता में एक घटाय फिरि वर्ग करहु धरि ध्यान ॥
या में एक घटाय भाग देहु पुनि आठ को।
कहहु धाय हरखाय विषम अङ्क घनयोग को ॥

जैसे यदि ५ गच्छ हो तो $५ = ४ + १ = ग + १$ इस लिये

$$\{२(ग+१)\}^२ = १००, [\{२(ग+१)\}^२ - १]^२ = (१०० - १)^२ = ९८०१$$

और $\frac{\{(२ग+२)^२ - १\}^२ - १}{८} = \frac{९८०१ - १}{८} = १२२५$ इस लिये,

$$१^३ + ३^३ + ५^३ + ७^३ + ९^३ = १ + २७ + १२५ + ३४३ + ७२९ = १२२५$$

यदि $१^२ + ३^२ + ५^२ + \cdots$ यह जानना हो तो २९४ प्रक्रम के (८) वें समीकरण में म के स्थान में दो का उत्थापन देने से

$$१^२ + ३^२ + ५^२ + \cdots + (२प - १)^२ = \frac{प(४प^२ - १)}{३}$$ ऐसा हो गा

और यदि पहले घनयुति जो सिद्ध हुई है उस का

$$\frac{(४प^२ - १)^२ - १}{८} = \frac{४प^२(४प^२ - २)}{८} = प^२(२प^२ - १) = \frac{प^२(४प^२ - २)}{२}$$

$$= \frac{प^२(४प^२ - १) - प^२}{२} = \frac{प\{प(४प^२ - १) - प\}}{२}$$

ऐसा रूपान्तर करो तो वर्गयुति और घनयुति जानने के लिये

द्विघ्नपदस्य कृतिः कुविहीना गच्छहता त्रिहृता कृतियोगः।
वर्गयुतिस्त्रिहता पदहीना गच्छहता दलिता घनयोगः ॥

यह जो मेरा बनाया सूत्र है उस की उपपत्ति होती है।

पूर्वोक्त उदाहरण में गच्छ ५ है इस लिये पहले

$$१^२ + ३^२ + ५^२ + ७^२ + ९^२ = \frac{\{(२ \times ५)^२ - १\}५}{३} = १६५$$

$$\text{फिर } १^३ + ३^३ + ५^३ + ७^३ + ९^३ = \frac{(१६५ \times ३ - ५)५}{२} = १२२५$$

इस प्रकार बहुत से सूत्र २९४ प्रक्रम के (८) वें समीकरण से बन सकते हैं।

२९६। $(इ^त - १)^न$ इस का मान त की घातवृद्धि में लाना है (यहां इ नेपियर के लघुरिक्थ का आधार जानो) तो द्वियुक्पद-सिद्धान्त से

$$(इ^त - १)^न = इ^{तन} - न \cdot इ^{त(न-१)} + \frac{न(न-१)}{\underline{|२}} इ^{त(न-१)} - \cdots$$

परन्तु (२०) वें प्रक्रम के (६) उदाहरण के (२) समीकरण से

$$इ^{तन} = १ + तन + \frac{त^२ \cdot न^२}{\underline{|२}} + \frac{त^३ \cdot न^३}{\underline{|३}} + \cdots \frac{त^म \cdot न^म}{\underline{|म}} + \cdots$$

$$नइ^{त(न-१)} = \left\{ १ + त(न-१) + \frac{त^२(न-१)^२}{\underline{|२}} + \cdots + \frac{त^म(न-१)^म}{\underline{|म}} + \cdots \right\} न$$

इस लिये $(इ^त - १)^न$ इस के विस्तृतरूप में $त^म$ का गुणक

$$= \frac{१}{\underline{|म}} \left\{ न^म - न(न-१)^म + \frac{न(न-१)}{\underline{|२}}(न-२)^म + \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}}(न-३)^म + \cdots \right\} = \frac{१}{\underline{|म}} \cdot \triangle^न \cdot ०^म$$

२९० प्रक्रम से,

परन्तु यदि $न > म$ तो २९० ही प्रक्रम से $\triangle^न \cdot ०^म = ०$

इस लिये म के स्थान में न, न + १, न + २, इत्यादि का उत्थापन देने से

$$(\text{इ}^{\text{त}}-1)^{\text{न}} = \frac{\Delta^{\text{न}}\cdot 0^{\text{न}}}{|\underline{\text{न}}}\,\text{त}^{\text{न}} + \frac{\Delta^{\text{न}}\cdot 0^{\text{न}+1}}{|\underline{\text{न}+1}}\,\text{त}^{\text{न}+1} + \frac{\Delta^{\text{न}}\cdot 0^{\text{न}+2}}{|\underline{\text{न}+2}}\cdot\text{त}^{\text{न}+2} + \cdots\cdots \quad (1)$$

जैसे यदि न = २, तो २९० प्रक्रम से,

$\Delta^2\cdot 0^2 = 2$, $\Delta^2\cdot 0^3 = 6$, $\Delta^2\cdot 0^4 = 14$, $\Delta^2\cdot 0^5 = 30$, $\Delta^2\cdot 0^6 = 62$, इत्यादि, इन का उत्थापन (१) में देने से

$$(\text{इ}^{\text{त}}-1)^2 = \text{त}^2 + \text{त}^3 + \frac{14\,\text{त}^4}{|\underline{4}} + \frac{30\,\text{त}^5}{|\underline{5}} + \frac{62\,\text{त}^6}{|\underline{6}} + \cdots$$

यहां न के स्थान में अनेक संख्याओं का उत्थापन देने से $\text{इ}^{\text{त}}-1$ इस का अनेक घात त की घातवृद्धि में जान सकते हो।

२९७। यदि य, य + २ष, य + ४ष, य + ६ष, ⋯ इत्यादि चाप के मान हों जहां Δ य = २ ष तो यहां Δ ज्याय, Δ^2 ज्याय, Δ^3 ज्याय इत्यादि का मान जानना है।

अन्तर के नियम से यहां

Δ ज्याय = ज्या (य + २ ष) − ज्याय = २ कोज्या (य + ष) ज्याष

Δ ज्या (य + २ ष) = ज्या (य + ४ ष) − ज्या (य + २ ष)

= २ कोज्या (य + ३ ष) · ज्याष

Δ ज्या (य + ४ ष) = ज्या (य + ६ ष) − ज्या (य + ४ ष)

= २ कोज्या (य + ५ ष) · ज्याष

Δ ज्या (य + ६ ष) = ज्या (य + ८ ष) − ज्या (य + ६ ष)

= २ कोज्या (य + ७ ष) · ज्याष

Δ ज्या (य + २ नष) = २ कोज्या $\{$य + ष (२ न + १)$\}$ · ज्याष

Δ^2 ज्याय = २ कोज्या (य + ३ ष) ज्याष − २ कोज्या (य + ष) · ज्याष

= २ ज्याष $\{$कोज्या (य + ३ ष) − कोज्या (य + ष)$\}$

= -2^2 ज्या (य + २ ष) ज्या^2ष

इसी प्रकार यदि और अन्तरों को बनाओ तो सिद्ध हो गा कि

Δ^2 ज्याय = − ४ ज्या (य + २ ष) ज्या^2ष

Δ^3 ज्याय = − ८ कोज्या (य + ३ ष) ज्या^3ष

Δ^4 ज्याय = १६ ज्या (य + ४ ष) ज्या^4ष

और कोटिज्या का अन्तर।

$$\Delta^{२}\,\text{कोज्याय} = -४\,\text{कोज्या}\,(\text{य}+२\text{प})\,\text{ज्या}^{२}\text{प}$$

$$\Delta^{३}\,\text{कोज्याय} = ८\,\text{ज्या}\,(\text{य}+३\text{प})\,\text{ज्या}^{३}\text{प}$$

$$\Delta^{४}\,\text{कोज्याय} = १६\,\text{कोज्या}\,(\text{य}+४\text{प})\,\text{ज्या}^{४}\text{प}$$

२९८। यदि न कोई पूर्ण संख्या हो तो

$$\Delta^{४\text{न}}\,\text{ज्याय} = २^{४\text{न}}\,\text{ज्या}\,(\text{य}+४\text{नप})\,\text{ज्या}^{४\text{न}}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}+१}\,\text{ज्याय} = २^{४\text{न}+१}\,\text{कोज्या}\left\{\text{य}+(४\text{न}+१)\text{प}\right\}\text{ज्या}^{४\text{न}+१}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}+२}\,\text{ज्याय} = -२^{४\text{न}+२}\,\text{ज्या}\left\{\text{य}+(४\text{न}+२)\text{प}\right\}\text{ज्या}^{४\text{न}+२}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}+३}\,\text{ज्याय} = -२^{४\text{न}+३}\,\text{कोज्या}\left\{\text{य}+(४\text{न}+३)\text{प}\right\}\text{ज्या}^{४\text{न}+३}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}}\,\text{कोज्याय} = २^{४\text{न}}\,\text{कोज्या}\,(\text{य}+४\text{नप})\,\text{ज्या}^{४\text{न}}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}+१}\,\text{कोज्याय} = -२^{४\text{न}+१}\,\text{कोज्या}\left\{\text{य}+(४\text{न}+१)\text{प}\right\}\text{ज्या}^{४\text{न}+१}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}+२}\,\text{कोज्याय} = -२^{४\text{न}+२}\,\text{कोज्या}\left\{\text{य}+(४\text{न}+२)\text{प}\right\}\text{ज्या}^{४\text{न}+२}\text{प}$$

$$\Delta^{४\text{न}+३}\,\text{कोज्याय} = २^{४\text{न}+३}\,\text{ज्या}\left\{\text{य}+(४\text{न}+३)\text{प}\right\}\text{ज्या}^{४\text{न}+३}\text{प}$$

इस में न के स्थान में १, २, ३ इत्यादि का उत्थापन देने से $\Delta^{४}$ ज्याय, $\Delta^{५}$ ज्याय, $\Delta^{६}$ ज्याय इत्यादि का तथा $\Delta^{४}$ कोज्याय, $\Delta^{५}$ कोज्याय, $\Delta^{६}$ कोज्याय इत्यादि का मान निकाल सकते हो।

२९९। यदि २९४ प्रक्रम के (७) वें समीकरण में अ और क के स्थान में १ का उत्थापन देवो तो

$$१^{\text{म}}+२^{\text{म}}+३^{\text{म}}+\cdots\cdots(१+\text{य})^{\text{म}}$$

$$=\frac{१}{२}\cdot\Delta\cdot0^{\text{म}}(१+\text{य})(२+\text{य})+\frac{१}{|\underline{३}}\Delta^{२}\cdot0^{\text{म}}\text{य}(\text{य}+१)(\text{य}+२)+\cdots$$

इस में यदि य+१ के स्थान में य का उत्थापन देवो तो

$$१^{\text{म}}+२^{\text{म}}+३^{\text{म}}+\cdots\text{य}^{\text{म}}$$

$$=\frac{१}{|\underline{२}}\cdot\Delta\cdot0^{\text{म}}(\text{य}+१)\text{य}+\frac{१}{|\underline{३}}\cdot\Delta^{२}\cdot0^{\text{म}}(\text{य}+१)\text{य}(\text{य}-१)$$

$$+\frac{१}{|\underline{४}}\Delta^{३}\cdot0^{\text{म}}(\text{य}+१)\text{य}(\text{य}-१)(\text{य}-२)+\cdots$$

ऐसा होगा इस पर से भी अनेक प्रकार निकाल सकते हो।
जैसे $१^{३}+२^{३}+३^{३}+\cdots\text{य}^{३}$ इस का मान जानना है
यहां म = ३, इस लिये, २९० प्रक्रम से

$\triangle \cdot 0^३ = १, \triangle^२ \cdot 0^३ = ६, \triangle^३ \cdot 0^३ = ६$ और $\triangle^४ \cdot 0^३ = 0$ इत्यादि इन का उत्थापन ऊपर देने से

$$१^३ + २^३ + ३^३ + \cdots य^३ = \frac{१}{\lfloor २}(य+१)य + \frac{६(य+१)य(य-१)}{\lfloor ३} + \frac{६(य+१)य(य-१)(य-२)}{\lfloor ४}$$

$$= \frac{२य(य+१)}{४} + \frac{४य(य+१)(य-१)}{४} + \frac{य(य+१)(य-१)(य-२)}{४}$$

$$= \frac{२य(य+१)}{४} + \frac{\{य(य+१)(य-१)\}\{४+(य-२)\}}{४}$$

$$= \frac{\{य(य+१)\}\{२+(य-१)(य+२)\}}{४} = \frac{य(य+१)(य^२+य)}{४}$$

$$= \frac{य(य+१)}{२} \cdot \frac{य(य+१)}{२} = \left\{\frac{य(य+१)}{२}\right\}^२$$ इस पर से

"सङ्कलितस्य कृतेः सममेकाद्यङ्कघनैक्यमुदीरितमाद्यैः"
यह भास्कराचार्योक्त प्रकार उपपन्न होता है ।

३०० । २० वें प्रक्रम के (६) वें उदाहरण का (३) समीकरण जो कोज्याय $= \frac{१}{२}(इ^{य\sqrt{-१}} + इ^{-य\sqrt{-१}})$ यह है इस में $इ^{य\sqrt{-१}}$ इस के स्थान में र का उत्थापन देने से कोज्याय $= \frac{१}{२}\left(र + \frac{१}{र}\right)$ इस का द्वियुक्-पद सिद्धान्त से न घात करने से ।

$$कोज्या^नय = \frac{१}{२^न}\left(र + \frac{१}{र}\right)^न$$

$$= \frac{१}{२^न}\left(र^न + न \cdot र^{न-१} \cdot \frac{१}{र} + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} \cdot र^{न-२} \cdot \frac{१}{र^२} + \cdots + \frac{१}{र^न}\right)$$

इस में प्रथम और अन्त, द्वितीय और उपान्तिम इत्यादि पदों को पास पास लिखने से

$$कोज्या^{न}य = \frac{१}{२^{न}}\left\{\left(र^{न}+\frac{१}{र^{न}}\right)+न\left(र^{न-२}+\frac{१}{र^{न-२}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{न(न-१)}{\underline{|२}}\left(र^{न-४}+\frac{१}{र^{न-४}}\right)+\cdots\right\}$$

परन्तु जब $इ^{य\sqrt{-१}}=र$ तो $इ^{नय\sqrt{-१}}=र^{न}$, और $इ^{-नय\sqrt{-१}}=\frac{१}{र^{न}}$

इस लिये $कोज्यानय=\frac{१}{२}\left(र^{न}+\frac{१}{र^{न}}\right)$

$कोज्याय(न-२)=\frac{१}{२}\left(र^{न-२}+\frac{१}{र^{न-२}}\right)$, इत्यादि

इन का उत्थापन ऊपर देने से

$$कोज्या^{न}य=\frac{१}{२^{न-१}}\left\{कोज्यानय+न\cdot कोज्या(न-२)य\right.$$
$$\left.+\frac{न(न-१)}{\underline{|२}}कोज्या(न-४)य+\cdots\right\}$$

यदि न समसंख्या हो अर्थात् न = २म तो कोज्या^{न}य में २म + १ इतने पद हों गे इस लिये आद्यन्त, द्वितीयोपान्तिम इत्यादि दो दो पदों को पास पास लिखने से बीच का एक पद अकेला रह जाय गा जिस का

$$\frac{२म(२म-१)(२म-२)\cdots(म+१)}{\underline{|म}}\cdot य^{म}\cdot\frac{१}{य^{म}}$$

$=\frac{२म(२म-१)(२म-२)\cdots(म+१)}{\underline{|म}}$ यही मान हो गा। और

यदि न विषमसंख्या हो अर्थात् न = २म + १ तो कोज्या^{न}य में २म + २ इस का आधा अभिन्नसंख्या है इस लिये यहां आदि अन्त, द्वितीय उपान्तिम इत्यादि दो दो पदों को लेने से कोई पद न छूटे गा। इस लिये जब न समसंख्या अर्थात् जब न = २म तब

$$२^{२म-१}कोज्या^{२म}य = कोज्या २मय + २म कोज्या(२म-२)य$$

$$+\frac{२म(२म-१)}{\lfloor २}\text{ कोज्या }(२म-४)य+\cdots$$

$$+\frac{२म(२म-१)(२म-२)\cdots(म+२)}{\lfloor म-१}\text{ कोज्या }२य$$

$$+\frac{२म(२म-१)(२म-२)\cdots(म+१)}{\lfloor म}\cdot\frac{१}{२}$$

और जब न विषमसंख्या है अर्थात् जब न $=२म+१$ तब

$$२^{२म}\cdot\text{कोज्या}^{२म+१}य=\text{कोज्या }(२म+१)य$$

$$+(२म+१)\text{ कोज्या }(२म-१)य$$

$$+\frac{(२म+१)२म}{\lfloor २}\text{ कोज्या }(२म-३)य$$

$$+\frac{(२म+१)२म(२म-१)}{\lfloor ३}\text{ कोज्या }(२म-५)य$$

$$+\cdots+\frac{(२म+१)२म(२म-१)(२म-२)\cdots(म+२)}{\lfloor म}\text{ कोज्या}य$$

३०१ । २० वें प्रक्रम के (६) उदाहरण के (३) समीकरण में

यदि $इ^{य\sqrt{-१}}=र$ तो ज्याय $=\frac{१}{२\sqrt{-१}}\left(र-\frac{१}{र}\right)$ इस लिये

$$\text{ज्या}^{न}य=\frac{१}{२^{न}}\cdot\frac{१}{(\sqrt{-१})^{न}}\cdot\left(र-\frac{१}{र}\right)^{न}\text{ इस में}$$

यदि न $=४म$ तो $(\sqrt{-१})^{न}=(\sqrt{-१})^{४म}=१$

यदि न $=४म+१$ तो, $(\sqrt{-१})^{४म+१}=\sqrt{-१}$

यदि न $=४म+२$ तो, $(\sqrt{-१})^{४म+२}=-१$

और यदि न $=४म+३$ तो $(\sqrt{-१})^{४म+३}=-\sqrt{-१}$

इस लिये यदि न $=४म$ तो $\left(र-\frac{१}{र}\right)^{न}$ इस का आदि अन्त्य-

पद, द्वितीय उपान्तिमपद इत्यादि दोनों पद एक ही जाति के अर्थात् दोनों धनात्मक वा ऋणात्मक ही हों गे ।

यदि न = ४ म + २ तो सब पद ऊपर ४ म सम्बन्धि पदों के अपेक्षा विरुद्ध चिन्ह के हों गे ।

यदि न = ४ म + १ तो $\left(र-\frac{१}{र}\right)^{न}$ इस का आद्यन्त, द्वितीयोपान्तिम, इत्यादि दो दो पद विरुद्ध चिन्ह के हों गे ।

और यदि न = ४ म + ३ तो सब पद ऊपर ४ म + १ सम्बन्धि-पदों के अपेक्षा विरुद्ध चिन्ह के हों गे ।

$\left(र-\frac{१}{र}\right)^{न}$ इस के पदों के गुणकाङ्क वे ही हों गे जो कि $\left(र+\frac{१}{र}\right)^{न}$ इस के गुणकाङ्क हैं ।

इस लिये, ३०० प्रक्रम ही की युक्ति से

$$२^{४म-१}\text{ज्या}^{४म}य = \text{कोज्या}\,४\,मय - ४\,म\cdot\text{कोज्या}\,(४\,म-२)\,य + \frac{४\,म\,(४\,म-१)}{|\underline{२}}\,\text{कोज्या}\,(४\,म-४)\,य - \cdots - \frac{४\,म\,(४\,म-१)\,(४\,म-२)\cdots(२\,म+२)}{|\underline{२\,म-१}}\,\text{कोज्या}\,२\,य + \frac{४\,म\,(४\,म-१)\,(४\,म-२)\cdots(२\,म+१)}{|\underline{२\,म}}\cdot\frac{१}{२}$$

$$२^{४म}\cdot\text{ज्या}^{४म+१}य = \text{ज्या}\,(४\,म+१)\,य - (४\,म+१)\,\text{ज्या}\,(४\,म-१)\,य + \frac{(४\,म+१)\,४\,म}{|\underline{२}}\,\text{ज्या}\,(४\,म-३)\,य - \cdots + \frac{(४\,म+१)\,४\,म\,(४\,म-१)\,(४\,म-२)\cdots(२\,म+२)}{|\underline{२\,म}}\,\text{ज्या}\,य$$

$$२^{४म+१}\text{ज्या}^{४म+२}य = -\,\text{कोज्या}\,(४\,म+२)\,य + (४\,म+२)\,\text{कोज्या}\,४\,मय - \frac{(४\,म+२)\,(४\,म+१)}{|\underline{२}}\,\text{कोज्या}\,(४\,म-२)\,य + \cdots$$

$$-\frac{(४म+२)(४म+१)४म(४म-१)\cdots(२म+३)}{|२म}कोज्या२य$$

$$+\frac{(४म+२)(४म+१)४म(४म-१)\cdots(२म+२)}{|२म+१}\cdot\frac{१}{२}$$

और $२^{४म+२}ज्या^{४म+३}य = -ज्या(४म+३)य$

$$+(४म+३)ज्या(४म+१)य$$

$$-\frac{(४म+३)(४म+२)}{|२}ज्या(४म-१)य+\cdots$$

$$+\frac{(४म+३)(४म+२)(४म+१)\cdots(२म+३)}{|२म+१}ज्याय$$

३०२। यदि ३०० प्रक्रम के सिद्धान्त में न के स्थान में पांच और छ का उत्थापन देवो तो क्रम से दो और तीन ये म के मान हों गे इस लिये $२^{न-१}कोज्या^{न}य = २^{म}कोज्या^{२म+१}य = २^{४}कोज्या^{५}य$

$$= कोज्या(२म+१)य + (२म+१)कोज्या(२म-१)य+\cdots$$

$$+\frac{(२म+१)२म(२म-१)\cdots(म+२)}{|म}कोज्याय$$

$$= कोज्या ५ य + ५ कोज्या ३ य + १० कोज्याय$$

इसी प्रकार $२^{न-१}कोज्या^{न}य = २^{२म-१}कोज्या^{२म}य = २^{५}\cdot कोज्या^{६}य$

$$= कोज्या२मय + २मकोज्या(२म-२)य+\cdots$$

$$+\frac{२म(२म-१)\cdots(म+२)}{|म-१}कोज्या२य$$

$$+\frac{२म(२म-१)\cdots(म+१)}{|म}\cdot\frac{१}{२}$$

$$= कोज्या ६ य + ६ कोज्या ४ य + १५ कोज्या २ य + १०$$

ऐसे ही यदि ३०१ प्रक्रम के सिद्धान्त में म के स्थान में एक का उत्थापन देवो तो

$$८ ज्या^{४}य = कोज्या ४ य - ४ कोज्या २ य + ३$$

$$१६ ज्या^{५}य = ज्या ५ य - ५ ज्या ३ य + १० ज्याय$$

$३२ ज्या^{६}य = - कोज्या ६ य + ६ कोज्या ४ य - १५ कोज्या २ य + १०$

$६४ ज्या^{७}य = - ज्या ७ य + ७ ज्या ५ य - २१ ज्या ३ य + ३५ ज्याय$

३०३। ज्याय = न · ज्या (अ + य) यहां य का चापीयमान य की घातवृद्धि में लाना है।

(२०) वें प्रक्रम के (६) वें उदाहरण से

$$इ^{य \sqrt{-१}} - इ^{-य \sqrt{-१}} = न \left\{ इ^{(अ + य) \sqrt{-१}} - इ^{-(अ + य) \sqrt{-१}} \right\}$$

$$\therefore \frac{इ^{२य \sqrt{-१}} - १}{इ^{य \sqrt{-१}}} = न \left\{ \frac{इ^{(अ + २य) \sqrt{-१}} - इ^{-अ \sqrt{-१}}}{इ^{य \sqrt{-१}}} \right\}$$

छेदगम और पक्षान्तरनयन से

$$इ^{२य \sqrt{-१}} \left\{ १ - न \cdot इ^{अ \sqrt{-१}} \right\} = १ - न \cdot इ^{-अ \sqrt{-१}}$$

$$\therefore इ^{२य \sqrt{-१}} = \frac{१ - न \cdot इ^{-अ \sqrt{-१}}}{१ - न \cdot इ^{अ \sqrt{-१}}},$$ दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से

$$२ य \sqrt{-१} = न (इ^{अ \sqrt{-१}} - इ^{-अ \sqrt{-१}})$$
$$+ \frac{न^२}{२} (इ^{२अ \sqrt{-१}} - इ^{-२अ \sqrt{-१}}) + \cdots$$

$$इस लिये\ य = न \cdot ज्याअ + \frac{न^२}{२} \cdot ज्या २ अ + \frac{न^३}{३} \cdot ज्या ३ अ + \cdots \quad (१)$$

(१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताय}{ताअ} = न कोज्याअ + न^२ \cdot कोज्या २ अ + न^३ \cdot कोज्या ३ अ + \cdots\cdots \quad (२)$$

परन्तु जब ज्याय = न · ज्या (अ + य)

$$= न (ज्याअ \cdot कोज्याय + ज्याय \cdot कोज्याअ)$$

$$\therefore स्पय = \frac{न \cdot ज्याअ}{१ - न \cdot कोज्याअ}$$ इस का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताय}{ताअ} \cdot छे^{२}य = \frac{ताय}{ताअ} (१ + स्प^{२}य) = \frac{न (कोज्याअ - न)}{(१ - नकोज्याअ)^{२}}$$ इस लिये

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताअ}} = \frac{\text{न}(\text{कोज्याअ} - \text{न})}{(१ - \text{न}\cdot\text{कोज्याअ})^२} \cdot \frac{१}{(१ + \text{स्प}^२\text{य})} = \frac{\text{न}(\text{कोज्याअ} - \text{न})}{१ - २\,\text{नकोज्याअ} + \text{न}^२}$$

$$= \text{न}\cdot\text{कोज्याअ} + \text{न}^२\text{कोज्या}\,२\,\text{अ} + \text{न}^३\cdot\text{कोज्या}\,३\,\text{अ} + \cdots$$

(२) समीकरण से

वा, $$\frac{\text{कोज्याअ} - \text{न}}{१ - २\,\text{नकोज्याअ} + \text{न}^२} = \text{कोज्याअ} + \text{न}\cdot\text{कोज्या}\,२\,\text{अ} + \text{न}^२\cdot\text{कोज्या}\,३\,\text{अ} + \cdots$$

इस प्रक्रम का (१) समीकरण दृग्लम्बन जानने के लिये सिद्धान्त विद्या में बड़ा ही उपयोगी है।

३०४। स्पय = न · स्पर इस समीकरण में य का चापीयमान जानना है।

$$\text{यहां स्पय} = \frac{\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-१}} - \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-१}}}{\sqrt{-१}(\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-१}} + \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-१}})}$$

$$= \text{न}\cdot\frac{\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-१}} - \text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-१}}}{\sqrt{-१}(\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-१}} + \text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-२}}}$$ इस पर से

$$\frac{\text{इ}^{२\text{य}\sqrt{-१}} - १}{\text{इ}^{२\text{य}\sqrt{-१}} + १} = \text{न}\cdot\frac{\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} - १}{\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} + १}$$

दोनों पक्षों में एक जोड़ और घटा कर परस्पर भाग देने से,

$$\text{इ}^{२\text{य}\sqrt{-१}} = \frac{(१ + \text{न})\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} + १ - \text{न}}{(१ - \text{न})\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} + १ + \text{न}}$$

$$= \frac{\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} + \text{म}}{\text{म}\cdot\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} + १}\left(\text{यहां म} = \frac{१ - \text{न}}{१ + \text{न}}\right)$$

$$= \text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}}\frac{\text{म}\cdot\text{इ}^{-२\text{र}\sqrt{-१}} + १}{\text{म}\cdot\text{इ}^{२\text{र}\sqrt{-१}} + १}$$

दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से

$$२ य \sqrt{-१} = २ र \sqrt{-१} + ला (म इ^{-२ र \sqrt{-१}} + १)$$
$$- ला (म इ^{२ र \sqrt{-१}} + १)$$
$$= २ र \sqrt{-१} - म (इ^{२ र \sqrt{-१}} - इ^{-२ र \sqrt{-१}})$$
$$+ \frac{म^२}{२} (इ^{४ र \sqrt{-१}} - इ^{-४ र \sqrt{-१}})$$
$$- \frac{म^३}{२} (इ^{६ र \sqrt{-१}} - इ^{-६ र \sqrt{-१}}) + \cdots$$

दोनों पक्षों में $२ \sqrt{-१}$ का भाग देने से

$$य = र - म \cdot ज्या २ र + \frac{म^२}{२} ज्या ४ र - \frac{म^३}{३} ज्या ६ र + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

(१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताय}{तार} = १ - २ म \cdot कोज्या २ र + २ म^२ कोज्या ४ र - २ म^३ \cdot कोज्या ६ र + \cdots$$

परन्तु $स्पय = न \cdot स्पर \therefore \frac{ताय}{तार} (१ + स्प^२ य) = न (१ + स्प^२ र)$

इस लिये $\frac{ताय}{तार} = \frac{न (१ + स्प^२ र)}{१ + स्प^२ य} = \frac{न (१ + स्प^२ र)}{१ + न^२ \cdot स्प^२ र}$

परन्तु त्रिकोणमिति से

$स्प^२ र = \frac{१ - कोज्या २ र}{१ + कोज्या २ र}$ और जब $म = \frac{१ - न}{१ + न}$

इस लिये $न = \frac{१ - म}{१ + म}$ ऊपर इन का उत्थापन देने से,

$$\frac{ताय}{तार} = \frac{न (१ + स्प^२ र)}{१ + न^२ स्प^२ र} = \frac{१ - म^२}{१ + २ म कोज्या २ र + म}$$

परन्तु (१) का तात्कालिकसम्बन्ध भी $\frac{ताय}{तार}$ यही है इस लिये

$$\frac{१ - म^२}{१ + २ म कोज्या २ र + म^२} = १ - २ (म कोज्या २ र - म^२ \cdot कोज्या ४ र + \cdots)$$

समशोधन कर २ म का भाग देने से

$$\frac{\text{कोज्या}\,२\text{र}+\text{म}}{१+२\,\text{म}\text{कोज्या}\,२\text{र}+\text{म}^२}=\text{कोज्या}\,२\text{र}-\text{म}\text{कोज्या}\,४\text{र}+\cdots$$

२र के स्थान में र का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{कोज्या}\text{र}+\text{म}}{१+२\text{म}\cdot\text{कोज्या}\text{र}+\text{म}^२}=\text{कोज्या}\text{र}-\text{म}\cdot\text{कोज्या}\,२\text{र}+\text{म}^२\cdot\text{कोज्या}\,३\text{र}$$
$$-\text{म}^३\cdot\text{कोज्या}\,४\text{र}+\cdots$$

इस में म के स्थान में −म का और र के स्थान में अ का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{कोज्या}\text{अ}-\text{म}}{१-२\text{म}\cdot\text{कोज्या}\text{अ}+\text{म}^२}=\text{कोज्या}\text{अ}+\text{म}\cdot\text{कोज्या}\,२\text{अ}$$
$$+\text{म}^२\text{कोज्या}\,३\text{अ}+\cdots$$

३०२ प्रक्रम के अन्त्य में भी ऐसा ही उत्पन्न हुआ है।

इस प्रक्रम का (१) पहला समीकरण ग्रहों के स्पष्टीकरण में बहुत ही उपयोगी है।

$$\frac{\text{कोज्या}\text{अ}-\text{म}}{१-२\text{म}\cdot\text{कोज्या}\text{अ}+\text{म}^२}$$ इसे म से गुण एक जोड़ देने से

$$\frac{१-\text{म}\cdot\text{कोज्या}\text{अ}}{१-२\text{म}\cdot\text{कोज्या}\text{अ}+\text{म}^२}=१+\text{म}\text{कोज्या}\text{अ}+\text{म}^२\cdot\text{कोज्या}\,२\text{अ}$$
$$+\text{म}^३\text{कोज्या}\,३\text{अ}+\cdots$$

ऐसा हो गा।

इस प्रकार बहुत श्रेढ़ियों का योग जान सकते हो।

३०५। प्रायः जरमन के गणितज्ञों का कहीं कहीं भिन्न ह सङ्केत होता है।

जैसा, जिसे हम लोग $\text{य}(\text{य}+\text{अ})$ ऐसा लिखते हैं उसे जरमन के गणितज्ञ $\text{य}^{२।\text{अ}}$ इस सङ्केत से प्रकाशित करते हैं।

इसी प्रकार

$\text{य}(\text{य}+\text{अ})(\text{य}+२\text{अ})(\text{य}+३\text{अ})=\text{य}^{४।\text{अ}}$।

$\text{य}(\text{य}+\text{अ})(\text{य}+२\text{अ})\cdots(\text{य}+\text{न}\text{अ})=\text{य}^{\text{न}+१।\text{अ}}$।

$\text{य}(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-२\text{अ})=\text{य}^{३।-\text{अ}}$।

$\text{य}(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-२\text{अ})\cdots(\text{य}-\text{न}\text{अ})=\text{य}^{\text{न}+१।-\text{अ}}$।

$य(य+१)(य+२)\cdots(य+न)=य^{न+१।१}$ ।

$य(य-१)(य-२)\cdots(य-न)=य^{न+१।-१}$ ।

$१\cdot२\cdot३=१^{३।१}$, $१\cdot२\cdot३\cdot४=१^{४।१}$ ।

$१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६=१^{६।१}$, $१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५\cdots न=१^{न।१}$ ।

$न(न+१)=न^{२।१}$, $न(न-१)=न^{२।-१}$

और $न(न-१)(न-२)\cdots२\cdot१=न^{न।-१}$ ।

ये सब भी जरमन के सङ्केत से सिद्ध होते हैं ।

३०६ । $अ^{य+१।क}+(अ+क)^{य+१।क}+(अ+२क)^{य+१।क} +\cdots+\{अ+(न-१)क\}^{य+१।क}$

इन का योग जानना है ।

यहां य के स्थान में ०, १, २, ३, आदि का उत्थापन देने से

अ, अ + क, ... (१)

अ(अ + क), (अ + क)(अ + २क), ... (२)

अ(अ + क)(अ + २क), (अ + क)(अ + २क)(अ + ३क), ... (३)

अ(अ + क)(अ + २क)(अ + ३क);

(अ + क)(अ + २क)(अ + ३क)(अ + ४क) .... (४)

इत्यादि अनेक श्रेढ़ी उत्पन्न हों गी ।

जिन में क्रम से अन्तर करने से

$\triangle अ=क$ प्रथम श्रेढ़ी में

$\triangle अ(अ+क)=(अ+क)(अ+२क)-अ(अ+क)=२क(अ+क)$,

.........(२) श्रेढ़ी में

$\triangle अ(अ+क)(अ+२क)=(अ+क)(अ+२क)(अ+३क)$
$-अ(अ+क)(अ+२क)=३क(अ+क)(अ+२क)$

.........(३) श्रेढ़ी में

इसी प्रकार

$\triangle अ(अ+क)(अ+२क)(अ+३क)$
$=४क(अ+क)(अ+२क)(अ+३क)$ ...... (४) श्रेढ़ी में

और य + १, संख्यक श्रेढ़ी में

$\triangle अ^{य+१।क}=(य+१)क\cdot(अ+क)^{य।क}$ ऐसा हो गा ।

इस में यदि अ के स्थान में अ + रक का उत्थापन देवो तो

$\{\text{अ}+\text{रक}\}\{\text{अ}+(\text{र}+१)\text{क}\}\cdots\{\text{अ}+\text{यक}\}$ इस में $\text{य}-\text{र}$ इतने गुणक हों गे इस लिये

$$\triangle(\text{अ}+\text{रक})^{\text{य}-\text{र}+१\text{।क}}=(\text{य}-\text{र}+१)\text{क}\cdot\{\text{अ}+(\text{र}+१)\text{क}\}^{\text{य}-\text{र।क}}$$

इसी प्रकार प्रथम, द्वितीय, तृतीय आदि श्रेढ़ियों के प्रथमपद-सम्बन्धि द्वितीय, तृतीय आदि अन्तरों को बनाओ तो उन पर से,

$$\triangle^{२}(\text{अ}+\text{रक})^{\text{य}-\text{र}+१\text{।क}}$$
$$=(\text{य}-\text{र}+१)(\text{य}-\text{र})\text{क}^{२}\{\text{अ}+(\text{र}+२\text{क})\}^{\text{य}-\text{र}-१\text{।क}},$$

$$\triangle^{३}(\text{अ}+\text{रक})^{\text{य}-\text{र}+१\text{।क}}$$
$$=(\text{य}-\text{र}+१)(\text{य}-\text{र})(\text{य}-\text{र}-१)\text{क}^{२}\{\text{अ}+(\text{र}+३\text{क})\}^{\text{य}-\text{र}-२\text{।क}}$$

$$\vdots$$

$$\triangle^{\text{न}}(\text{अ}+\text{रक})^{\text{य}-\text{र}+१\text{।क}}$$
$$=(\text{य}-\text{र}+१)(\text{य}-\text{र})(\text{य}-\text{र}-१)(\text{य}-\text{र}-२)\cdots\{\text{य}-\text{र}-\text{न}+१\}\text{क}^{२}\{\text{अ}+(\text{र}+\text{नक})\}^{\text{य}-\text{र}-\text{न}+१\text{।क}}$$

यह भी एक प्रकार का आनुगम सिद्ध हो जाय गा ।

अब देखो जो कि $\triangle(\text{अ}+\text{रक})^{\text{य}-\text{र}+१\text{।क}}$ इस का पहले $(\text{य}-\text{र}+१)\text{क}\{\text{अ}+(\text{र}+१)\text{क}\}^{\text{य}-\text{र।क}}$ यह मान सिद्ध हुआ है इस में यदि र के स्थान में य का और य के स्थान में $\text{र}+\text{य}+१$ का उत्थापन देओ तो

$$\triangle\{\text{अ}+\text{यक}\}^{\text{र}+२\text{।क}}=\text{क}(\text{र}+२)\{\text{अ}+(\text{य}+१)\text{क}\}^{\text{र}+१\text{।क}}$$

इस में फिर, र के स्थान में य का और य के स्थान में $\text{न}-१$ का उत्थापन देओ तो

$$\triangle\{\text{अ}+(\text{न}-१)\text{क}\}^{\text{य}+२\text{।क}}=\text{क}(\text{य}+२)\{\text{अ}+\text{नक}\}^{\text{य}+१\text{।क}}$$

इस लिये $(\text{अ}+\text{नक})^{\text{य}+१\text{।क}}=\dfrac{\triangle\{\text{अ}+(\text{न}-१)\text{क}\}^{\text{य}+२\text{।क}}}{\text{क}(\text{य}+२)}$

परन्तु $\text{अ}^{\text{य}+१\text{।क}}+(\text{अ}+\text{क})^{\text{य}+१\text{।क}}+\cdots+\{\text{अ}+(\text{न}-१)\text{क}\}^{\text{य}+१\text{।क}}$

और $\text{अ}^{\text{य}+१\text{।क}}+(\text{अ}+\text{क})^{\text{य}+१\text{।क}}+\cdots+(\text{अ}+\text{नक})^{\text{य}+१\text{।क}}$

इन दोनों का अन्तर भी $(\text{अ}+\text{नक})^{\text{य}+१\text{।क}}$ यही है इस लिये २९२ प्रक्रम से

$$\text{अ}^{\text{य}+१\text{।क}}+(\text{अ}+\text{क})^{\text{य}+१\text{।क}}+\cdots+\{\text{अ}+(\text{न}-१)\text{क}\}^{\text{य}+१\text{।क}}$$

$$=ग+\frac{\{अ+(न-१)क\}^{य+२|क}}{क(य+२)}$$ इस में यदि न के स्थान में शून्य का उत्थापन दिया जाय तो स्पष्ट है कि श्रेढ़ी का योग शून्य होगा क्यों कि ऐसी स्थिति में कोई पद न रहें गे इस लिये

$$0=ग+\frac{(अ-क)^{य+२|क}}{क(य+२)}$$

$$\therefore\ ग=-\frac{(अ-क)^{य+२|क}}{क(य+२)}$$ इस का उत्थापन ऊपर देने से

$$अ^{य+१|क}+(अ+क)^{य+१|क}+\cdots+\{अ+(न-१)क\}^{य+१|क}$$
$$=\frac{\{अ+(न-१)क\}^{य+२|क}}{क(य+२)}-\frac{(अ-क)^{य+२|क}}{क(य+२)},\ \cdots(अ)$$

इसे अच्छी तरह स्मरण रक्खो।

३०७। $२\cdot३\cdot४+३\cdot४\cdot५+४\cdot५\cdot६+५\cdot६\cdot७$ इस का मान जानना है।

यहां ३०६ प्रक्रम के (अ) समीकरण में $न=४$, $अ=२$, $क=१$, $य=२$ इन का उत्थापन देने से,

$$२^{३|१}+३^{३|१}+४^{३|१}+५^{३|१}=\frac{(२+३)^{४|१}}{१(२+२)}-\frac{१^{४|१}}{१(२+२)}$$
$$=\frac{५^{४|१}}{४}-\frac{१^{४|१}}{४}=\frac{५\cdot६\cdot७\cdot८-१\cdot२\cdot३\cdot४}{४}=४१४।$$

इसी प्रकार

$$२\cdot३+३\cdot४+४\cdot५+५\cdot६=\frac{५\cdot६\cdot७-१\cdot२\cdot३}{३\cdot१}=६८।$$

$$१\cdot२\cdot३+२\cdot३\cdot४+\cdots+य(य+१)(य+२)$$
$$=\frac{य(य+१)(य+२)(य+३)-0\cdot१\cdot२\cdot३}{४}$$
$$=\frac{य(य+१)(य+२)(य+३)}{४}$$ इत्यादि सिद्ध हो जायं गे।

३०८। यदि $२\cdot४\cdot६\cdot८+४\cdot६\cdot८\cdot१०+\cdots$
$+२य(२य+२)(२य+४)(२य+६)$
इस का मान जानना हो तो यहां ३०६ प्रक्रम के (अ) समीकरण में अ = २, क = २, न = य, य = ३ इन का उत्थापन देने से

$$योग=\frac{\{अ+(न-१)क\}^{य+२।क}}{क(य+२)}-\frac{(अ-क)^{य+२।क}}{क(य+२)}$$

$$=\frac{२य(२य+२)(२य+४)(२य+६)(२य+८)}{५\times२}$$

इस में यदि य = ३ तो

$$२\cdot४\cdot६\cdot८+४\cdot६\cdot८\cdot१०+६\cdot८\cdot१०\cdot१२=३८४+१९२०+५७६०$$

$$=\frac{६\cdot८\cdot१०\cdot१२\cdot१४}{५\times२}=८०६४$$

इस प्रकार अनेक श्रेढ़ियों का योग सहज में निकल सकता है।

३०९। $\frac{१}{अ^{य+१।क}}+\frac{१}{(अ+क)^{य+१।क}}+\cdots$

$$+\frac{१}{\{अ+(न-१)क\}^{य+१।क}}$$

इन का मान जानना है।

यहां तब स्पष्ट है कि $\frac{१}{\{अ+(न-१)क\}^{य+१।क}}$

$$=\frac{१}{\{अ+(न-१)क\}\{अ+नक\}\{अ+(न+१)क\}\cdots\{अ+(य+न-१)क\}}$$

इस लिये एक के नीचे जो हर है उस के प्रत्येक पास पास के दो दो पदों का अन्तर क है अर्थात् हर के सब खण्ड योग श्रेढ़ी के पद हैं जहां आदि अ + (न − १)क, चय क, और गच्छ य + १ है यहां प्रत्येक पदों का मान क्रम से $अ_१$, $अ_२$ $अ_३$ $\cdots$ $अ_{य+१}$ इत्यादि मानो तो

$$\frac{१}{\{अ+(न-१)क\}^{य+१।क}}=\frac{१}{अ_१\cdot अ_२\cdot अ_३\cdots अ_{य+१}}$$

इस लिये $\frac{१}{\{अ+नक\}^{य+१।क}}=\frac{१}{अ_२\cdot अ_३\cdots अ_{य+२}}$ और

$$\triangle \frac{1}{\{अ+(न-1)क\}^{य+1|क}} = \frac{1}{अ_2 अ_3 \cdots अ_{य+2}} - \frac{1}{अ_1 अ_2 \cdots अ_{य+1}}$$

$$= \frac{अ_1 - अ_{य+2}}{अ_1 \cdot अ_2 \cdots अ_{य+2}} = -\frac{क(य+1)}{अ_1 \cdot अ_2 \cdots अ_{य+2}}$$ यहां यदि य के स्थान में $य-1$ का उत्थापन देवो तो

$$\triangle \frac{1}{\{अ+(न-1)क\}^{य|क}} = -\frac{क \cdot य}{अ_1 \cdot अ_2 \cdots अ_{य+1}}$$ इस लिये

$$\frac{1}{अ_1 \cdot अ_2 \cdots अ_{य+1}} = \frac{1}{\{अ+(न-1)क\}^{य+1|क}}$$

$$= -\frac{1}{कय} \triangle \frac{1}{\{अ+(न-1)क\}^{य|क}}$$

और न के स्थान में $न+1$ रखने से

$$\frac{1}{(अ+नक)^{य+1|क}} = -\frac{1}{कय} \triangle \frac{1}{\{अ+नक\}^{य|क}}$$ अब २९२ प्रक्रम से

$$\frac{1}{अ^{य+1|क}} + \frac{1}{(अ+क)^{य+1|क}} + \cdots + \frac{1}{\{अ+(न-1)क\}^{य+1|क}}$$

$$= \triangle^{-1}\left\{\frac{1}{(अ+नक)^{य+1|क}}\right\} = ग - \frac{1}{कय} \cdot \frac{1}{(अ+नक)^{य|क}}$$

यहां यदि $न=0$ तो श्रेढ़ी का योग भी शून्य हो गा

इस लिये $0 = ग - \frac{1}{कय} \cdot \frac{1}{अ^{य|क}}$ $\therefore$ $ग = \frac{1}{कय} \cdot \frac{1}{अ^{य|क}}$

तब श्रेढ़ी का योग

$$= \frac{1}{कय} \cdot \frac{1}{अ^{य|क}} - \frac{1}{कय} \cdot \frac{1}{(अ+नक)^{य|क}}$$

इस श्रेढ़ी के योग का नाम (अ) रक्खो और इसे अच्छी तरह से समझो ।

३१० । $\frac{1}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \cdots + \frac{1}{न(न+1)(न+२)}$

स का मान जानना है ।

३०९ प्रक्रम के (अ) में

अ = २, क = १, य = २, और, $\{ अ + (न - १) क \} = न$ इन का उत्थापन देने से

$$\frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \cdots + \frac{१}{न (न + १)(न + २)}$$

$$= \frac{१}{२^{३।१}} + \frac{१}{३^{३।१}} + \cdots + \frac{१}{२ न^{३।१}}$$

$$= \frac{१}{कय} \cdot \frac{१}{अ^{य।क}} - \frac{१}{कय} \cdot \frac{१}{(अ + नक)^{य।क}}$$

$$= \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{२ \cdot ३} - \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{(न + १)(न + २)}$$

यदि गच्छ + १ = ग + १ = न तो

$$\frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \cdots + \frac{१}{(ग + १)(ग + २)(ग + ३)}$$

$$= \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{२ \cdot ३} - \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{(ग + २)(ग + ३)}$$ यदि ग = २ तो

$$\frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{३ \cdot ४ \cdot ५} = \frac{१}{२४} + \frac{१}{१६०} = \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{२ \cdot ३} - \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{४ \cdot ५}$$

$$= \frac{१}{१२} - \frac{१}{४०} = \frac{७}{१२०} ।$$

३११ । $$\frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} + \cdots + \frac{१}{ग (ग + १)(ग + २)(ग + ३)}$$

इस में य = ३, अ = १, क = १, न = ग

इस लिये ३०९ प्रक्रम के (अ) से

$$\frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} + \cdots + \frac{१}{ग (ग + १)(ग + २)(ग + ३)}$$

$$=\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{१\cdot२\cdot३}-\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(ग+१)(ग+२)(ग+३)}\text{ ।}$$

यदि गच्छ का मान अनन्त कल्पना करो तो श्रेढ़ी का योग

$$=\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{१\cdot२\cdot३}=\frac{१}{१८}$$ इसी प्रकार यदि

$$\frac{१}{१\cdot३\cdot५\cdot७}+\frac{१}{३\cdot५\cdot७\cdot९}+\cdots$$

$$+\frac{१}{(२ग-१)(२ग+१)(२ग+३)(२ग+५)}$$

इस का मान जानना हो तो यहां अ = १, क = २, य = ३ न = ग इन सब का उत्थापन ३०९ प्रक्रम के (अ) में देने से,

$$\text{योग}=\frac{१}{६}\cdot\frac{१}{१\cdot३\cdot५}-\frac{१}{६}\cdot\frac{१}{(२ग+१)(२ग+३)(२ग+५)}$$

इस में भी यदि ग = ∞ तो श्रेढ़ी का योग $=\frac{१}{६\cdot१\cdot३\cdot५}=\frac{१}{९०}$,

इस प्रकार अनेक श्रेढ़ियों का योग लाघव से कर सकते हो ।

३१२ । $$\frac{फ(य)}{(य-अ)^{म}\cdot फा(य)}=\frac{अ_०}{(य-अ)^{म}}+\frac{अ_१}{(य-अ)^{म-१}}+\cdots$$

$$+\frac{अ_{म-१}}{य-अ}+\frac{फि(य)}{फा(य)}$$

यह एक भिन्नसम्बन्धि समीकरण है, इस में छेदगम से फ(य)

$$=\left\{अ_० + अ_१(य-अ)+अ_२(य-अ)^२+\cdots\right.$$
$$\left.+अ_{म-१}(य-अ)^{म-१}\right\}फा(य)$$
$$+फि(य)(य-अ)^{म}$$

इस का यदि म − १ बार तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा निकालो और प्रत्येक सम्बन्ध में य = अ तो $\frac{ता}{ताय}\left\{फि(य)(य-अ)^{म}\right\}$,

$$\frac{ता^२}{ताय^२}\left\{फि(य)(य-अ)^{म}\right\}\cdots\frac{ता^{म-१}}{ताय^{म-१}}\left\{फि(य)(य-अ)^{म}\right\}$$

शून्य हों गे इस लिये म संख्या तुल्य समीकरण बनाने से $अ_0$, $अ_1$, $अ_2$ इत्यादि प्रगट हो जायं गे, जैसे, फ(य) और फ'(य), फ''(य) इत्यादि में य = अ मानने से फ(अ) = $अ_0$ · फा(अ)

$$\therefore\ अ_0 = \frac{फ(अ)}{फा(अ)} \text{।}\ फ'(अ) = अ_0 \cdot फा'(अ) + अ_1 फा(अ)$$

$$\therefore\ अ_1 = \frac{फ'(अ) - अ_0 फा'(अ)}{फा(अ)}\ \text{सामान्यतः}\ फ^{(म-१)}(अ)$$

$$= अ_0 फा^{(म-१)}(अ) + (म-१) अ_1 फा^{(म-२)}(अ) + \cdots$$

$$+ \underline{|म-१}\ फि(अ)$$

और, $फ^{(म)}(अ)$

$$= अ_0 फा^{(म)}(अ)$$

$$+ म \cdot अ_1 फा^{(म-१)}(अ) + म(म-१) अ_2 फा^{(म-२)}(अ)$$

$$+ म(म-१)(म-२) \cdot अ_3 फा^{(म-३)}(अ) + \cdots$$

$+ \underline{|म}\ फि(अ)$ इस से भी किसी विशेष फल का विस्तार में रूप ला सकते हो

जैसे फ(य) = $य^3 + १$, फा(य) = $य^2 + १$, अ = १, म = ४

$$\text{तो}\ \frac{फ(य)}{(य-अ)^म फा(य)} = \frac{य^3+१}{(य-१)^४ (य^2+१)} = \frac{अ_0}{(य-१)^४}$$

$$+ \frac{अ_1}{(य-१)^3} + \frac{अ_2}{(य-१)^2} + \frac{अ_3}{(य-१)} + \frac{फि(य)}{य^2+१}$$

$$फ(य) = य^3 + १ \quad \therefore\ फ(अ) = २$$

$$फ'(य) = ३य^2 \quad \therefore\ फ'(अ) = ३$$

$$फ''(य) = ६य \quad \therefore\ फ''(अ) = ६$$

$$फ'''(य) = ६ \quad \therefore\ फ'''(अ) = ६$$

$$फा(य) = य^2 + १ \quad \therefore\ फा(अ) = २$$

$$फा'(य) = २य \quad \therefore\ फा'(अ) = २$$

$$फा''(य) = २ \quad \therefore\ फा''(अ) = २$$

$$फा'''(य) = ० \quad \therefore\ फा'''(अ) = ०$$

$$\text{इन सब से}\ अ_0 = \frac{फ(अ)}{फा(अ)} = \frac{२}{२} = १$$

और $फ^{(म)}(अ) = अ_0 \cdot फा^{(म)}(अ) + मअ_1 फा^{(म-1)}(अ)$

$+ म(म-1) अ_2 फा^{(म-2)}(अ)$

$+ अ_3 म(म-1)(म-2) \cdot फा^{(म-3)}(अ) + \cdots$

$+ फि(य) \underline{|म}$ इस में म के स्थान में १, २, ३ का उत्थापन देने से

$फ'(अ) = 3 = अ_0 \cdot फा'(अ) + अ_1 फा(अ) = अ_0 \cdot 2 + अ_1 \cdot 2$

$\therefore अ_1 = \frac{1}{2}$ ।

$फ''(अ) = 6 = अ_0 \cdot फा''(अ) + 2 अ_1 फा'(अ)$

$+ 2 \cdot 1 अ_2 फा(अ) = अ_0 \cdot 2 + 2 अ_1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot अ_2 \cdot 2$

$= 2 + 2 + 4 अ_2 \quad \therefore अ_2 = \frac{1}{2}$

और $फ'''(अ) = 6 = अ_0 फा'''(अ)$

$+ 3 अ_1 \cdot फा''(अ) + 3 \cdot 2 \cdot अ_2 फा'(अ) 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot अ_3 फा(अ)$

$= 0 + 6 अ_1 + 12 अ_2 + 12 अ_3 = 3 + 6 + 12 अ_3$

$\therefore अ_3 = -\frac{1}{2}$ इस लिये $फ(य) = य^3 + 1$

$= (य^2 + 1) \left\{ 1 + \frac{1}{2}(य-1) + \frac{1}{2}(य-1)^2 - \frac{1}{4}(य-1)^3 \right\}$

$+ फि(य)(य-1) \quad \therefore फि(य) = \frac{1}{4}(य-1)$

$$तब \ \frac{य^3+1}{(य-1)^4(य^2+1)} = \frac{1}{(य-1)^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(य-1)^3}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{(य-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(य-1)} + \frac{1}{4} \frac{(य-1)}{(य^2+1)} \text{ ।}$$

३१३ । बहुधा ३१२ प्रक्रम का विस्ताररूप केवल बीजगणित से ही हो जाता है, जैसे कल्पना करो कि

$$\frac{य^4 - 6 य^3}{(य-2)^3(य-1)^2(य-3)(य-5)} = \frac{प_1}{(य-2)^3(य-1)^2}$$

$$+ \frac{अ_1}{य-3} + \frac{अ_2}{य-5}$$

दोनों पक्षों को य − ५ से गुण कर य = ५ के मानो तो

$$\frac{125 \times -1}{27 \cdot 16 \cdot 2} = अ_2 \text{ वा, } अ_2 = -\frac{125}{864}$$

इसी प्रकार दोनों पक्षों को य − ३ से गुणा कर य = ३ मानो.

तो $अ_1 = \frac{८१}{८}$, फिर $अ_1$ और $अ_2$ पर से समशोधनादि से $प_1$ का मान भी प्रगट हो जाय गा ।

३१४ । कल्पना करो कि

$स = ज्याय + अज्या(य + र) + अ^2 \cdot ज्या(य + २र) + \cdots$

$+ अ^{न-1} ज्या\{य + (न - १) र\}$ यहां ज्याय, ज्या(य + र) इत्यादि का रूप ३० वें प्रक्रम के (६) वें उदाहरण के (३) समीकरण के रूप में लिखने से

$$२स\sqrt{-1} = इ^{य\sqrt{-1}} + अ \cdot इ^{(य+र)\sqrt{-1}} + अ^2 \cdot इ^{(य+२र)\sqrt{-1}} + \cdots$$
$$+ अ^{न-1} \cdot इ^{\{य+र(न-1)\}\sqrt{-1}}$$
$$- \{इ^{-य\sqrt{-1}} + अ^2 \cdot इ^{-(य+र)\sqrt{-1}}$$
$$+ अ^2 \cdot इ^{-(य+२र)\sqrt{-1}} + \cdots$$
$$+ अ^{न-1} \cdot इ^{-\{य-र(न-1)\}\sqrt{-1}}\}$$
$$= इ^{य\sqrt{-1}}\{1 + अ \cdot इ^{र\sqrt{-1}} + अ^2 \cdot इ^{२र\sqrt{-1}} + \cdots$$
$$+ अ^{न-1} \cdot इ^{र(न-1)\sqrt{-1}}\}$$
$$- इ^{-य\sqrt{-1}}\{1 + अ \cdot इ^{-र\sqrt{-1}} + अ^2 \cdot इ^{-२र\sqrt{-1}} + \cdots$$
$$+ अ^{न-1} \cdot इ^{-र(न-1)\sqrt{-1}}\}$$

परन्तु बीजगणित से

$$इ^{य\sqrt{-1}}\{1 + अ \cdot इ^{र\sqrt{-1}} + \cdots + अ^{न-1} \cdot इ^{र(न-1)\sqrt{-1}}\}$$
$$= इ^{य\sqrt{-1}} \frac{1 - अ^न \cdot इ^{नर\sqrt{-1}}}{1 - अ \cdot इ^{र\sqrt{-1}}} \text{ और}$$

$$इ^{-य\sqrt{-1}}\{1 + अ \cdot इ^{-र\sqrt{-1}} + \cdots + अ^{न-1} इ^{-(न-1)\sqrt{-1}}\}$$
$$= इ^{-य\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 - अ^न \cdot इ^{-नर\sqrt{-1}}}{1 - अ \cdot इ^{-र\sqrt{-1}}} \text{ इस लिये}$$

$$२स\sqrt{-1} = इ^{य\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 - अ^न \cdot इ^{नर\sqrt{-1}}}{1 - अ \cdot इ^{र\sqrt{-1}}}$$
$$- इ^{-य\sqrt{-1}} \frac{1 - अ^न \cdot इ^{-नर\sqrt{-1}}}{1 - अ \cdot इ^{-र\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{(\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}^{\text{न}}\cdot\text{इ}^{(\text{य}+\text{नर})\sqrt{-\text{१}}})(\text{१}-\text{अ}\cdot\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-\text{१}}})-(\text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}^{\text{न}}\cdot\text{इ}^{-(\text{य}+\text{नर})\sqrt{-\text{१}}})(\text{१}-\text{अ}\cdot\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-\text{१}}})}{(\text{१}-\text{अ}\cdot\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-\text{१}}})(\text{१}-\text{अ}\cdot\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-\text{१}}})}$$

$$=\frac{\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}^{\text{न}}\cdot\text{इ}^{(\text{य}+\text{नर})\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}\cdot\text{इ}^{(\text{य}-\text{र})\sqrt{-\text{१}}}+\text{अ}^{\text{न}+\text{१}}\cdot\text{इ}^{\{\text{य}+\text{र}(\text{न}-\text{१})\}\sqrt{-\text{१}}}}{\text{१}-\text{अ}(\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-\text{१}}}+\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-\text{१}}})+\text{अ}^{\text{२}}}$$

$$-\frac{\text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}^{\text{न}}\cdot\text{इ}^{-(\text{य}+\text{नर})\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}\cdot\text{इ}^{-(\text{य}-\text{र})\sqrt{-\text{१}}}+\text{अ}^{\text{न}+\text{१}}\cdot\text{इ}^{-\{\text{य}+\text{र}(\text{न}-\text{१})\}\sqrt{-\text{१}}}}{\text{१}-\text{अ}(\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-\text{१}}}+\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-\text{१}}})+\text{अ}^{\text{२}}}$$

$$=\frac{\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-\text{१}}}-\text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-\text{१}}}-\text{अ}\{\text{इ}^{(\text{य}-\text{र})\sqrt{-\text{१}}}-\text{इ}^{-(\text{य}-\text{र})\sqrt{-\text{१}}}\}-\text{अ}^{\text{न}}\{\text{इ}^{(\text{य}+\text{नर})\sqrt{-\text{१}}}-\text{इ}^{-(\text{य}+\text{नर})\sqrt{-\text{१}}}\}}{\text{१}-\text{अ}(\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-\text{१}}}+\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-\text{१}}})+\text{अ}^{\text{२}}}$$

$$+\frac{\text{अ}^{\text{न}+\text{१}}\{\text{इ}^{\{\text{य}+\text{र}(\text{न}-\text{१})\}\sqrt{-\text{१}}}-\text{इ}^{-\{\text{य}+\text{र}(\text{न}-\text{१})\}\sqrt{-\text{१}}}\}}{\text{१}-\text{अ}(\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-\text{१}}}+\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-\text{१}}})+\text{अ}^{\text{२}}}$$

दोनों पक्षों में $\text{२}\sqrt{-\text{१}}$ का भाग देने से

$$\text{स}=\frac{\text{ज्याय}-\text{अ}\cdot\text{ज्या}(\text{य}-\text{र})-\text{अ}^{\text{न}}\cdot\text{ज्या}(\text{य}+\text{न}\cdot\text{र})+\text{अ}^{\text{न}+\text{१}}\cdot\text{ज्या}\{\text{य}+(\text{न}-\text{१})\text{र}\}}{\text{१}-\text{२}\,\text{अ}\cdot\text{कोज्यार}+\text{अ}^{\text{२}}}$$

यदि अ < १ और न = ∞ तो

$$स = \frac{ज्याय - अ \cdot ज्या\,(य - र)}{१ - २अ \cdot कोज्यार + अ^२}$$

इस लिये, ज्याय + अज्या (य + र) + $अ^२$ · ज्या (य + २र) + ⋯

$$= \frac{ज्याय - अ \cdot ज्या\,(य - र)}{१ - २अ \cdot कोज्यार + अ^२}$$

र को स्थिर और य को चलमान तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से कोज्याय + अ · कोज्या (य + र) + $अ^२$ · कोज्या (य + २र) + ⋯

$$= \frac{कोज्याय - अ \cdot कोज्या\,(य - र)}{१ - २अ \cdot कोज्यार + अ^२}$$ इस में यदि र = य

तो कोज्याय + अ · कोज्या २य + $अ^२$ · कोज्या ३य + ⋯

$$= \frac{कोज्याय - अ}{१ - २अ \cdot कोज्याय + अ^२}$$ यही ३०३ प्रक्रम के अन्त्य में भी सिद्ध हुआ है।

३१५। यदि $स = अ \cdot ज्या\,(य + र) + \frac{अ^२}{\lfloor २}ज्या\,(य + २र) + \frac{अ^३}{\lfloor ३}ज्या\,(य + ३र) + \cdots$

तो $२स\sqrt{-१} = अ\left\{इ^{(य+र)\sqrt{-१}} - इ^{-(य+र)\sqrt{-१}}\right\} + \frac{अ^२}{\lfloor २}\left\{इ^{(य+२र)\sqrt{-१}} - इ^{-(य+२र)\sqrt{-१}}\right\} + \cdots$

वा $२स\sqrt{-१}$

$$= इ^{य\sqrt{-१}}\left\{अ \cdot इ^{र\sqrt{-१}} + \frac{अ^२}{२} \cdot इ^{२र\sqrt{-१}} + \frac{अ^३}{\lfloor ३} \cdot इ^{३र\sqrt{-१}} + \cdots\right\}$$

$$- इ^{-य\sqrt{-१}}\left\{अ \cdot इ^{-र\sqrt{-१}} + \frac{अ^२}{\lfloor २}इ^{-२र\sqrt{-१}} + \frac{अ^३}{\lfloor ३}इ^{-३\sqrt{-१}} + \cdots\right\}$$

$$= \text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}}\left\{\text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{इ}^{\text{र}\sqrt{-1}}}-1\right\} - \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}}\left\{\text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{इ}^{-\text{र}\sqrt{-1}}}-1\right\}$$

$$= \text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}}\left\{\text{इ}^{\text{अ}(\text{कोज्यार}+\text{ज्यार}\sqrt{-1})}-1\right\}$$

$$- \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}}\left\{\text{इ}^{\text{अ}(\text{कोज्यार}-\text{ज्यार}\sqrt{-1})}-1\right\}$$

$$= \text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{कोज्यार}}\cdot\text{इ}^{(\text{अज्यार}+\text{य})\sqrt{-1}} - \text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$- \text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{कोज्यार}}\cdot\text{इ}^{-(\text{अज्यार}+\text{य})\sqrt{-1}} + \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$= \text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{कोज्यार}}\left\{\text{इ}^{(\text{अ}\cdot\text{ज्यार}+\text{य})\sqrt{-1}} - \text{इ}^{-(\text{अ}\cdot\text{ज्यार}+\text{य})\sqrt{-1}}\right\}$$

$$- (\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-1}} - \text{इ}^{-\text{य}\sqrt{-1}})$$

दोनों पक्षों में $२\sqrt{-1}$ का भाग देने से

$$\text{स} = \text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{कोज्यार}}\cdot\text{ज्या}(\text{य}+\text{अज्यार}) - \text{ज्याय}$$

केवल य को चलमान तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\text{अ}\cdot\text{कोज्या}(\text{य}+\text{र}) + \frac{\text{अ}^2}{\underline{|२}}\text{कोज्या}(\text{य}+२\text{र})$$
$$+ \frac{\text{अ}^3}{\underline{|३}}\text{कोज्या}(\text{य}+३\text{र}) + \cdots$$

$$= \text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{कोज्यार}}\cdot\text{कोज्या}(\text{य}+\text{अ}\cdot\text{ज्यार}) - \text{कोज्याय}$$

इन ऊपर के दोनों प्रक्रमसम्बन्धि सिद्धान्तों से भी अनेक श्रेढ़ियों का योग जाना जाय गा ।

३१६ । जब ८८ प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$\left(\text{कोज्या}\frac{२\pi\cdot\text{क}}{\text{न}} \pm \sqrt{-1}\,\text{ज्या}\frac{२\pi\,\text{क}}{\text{न}}\right)^{\text{न}} = 1$$ तब कह सकते हैं

कि, $\text{य}^{\text{न}} = 1$ इस समीकरण में य का मान

$\left(\text{कोज्या}\frac{२\pi\,\text{क}}{\text{न}} \pm \sqrt{-1}\,\text{ज्या}\frac{२\pi\,\text{क}}{\text{न}}\right)$ है यहां क कोई अभिन्न संख्या है ।

कल्पना करो कि न समसंख्या है तो क का मान, ०, १, २, ३ इत्यादि मानने से य के सब मान विदित हों गे ।

परन्तु यदि क = ० तो $\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} \pm \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} = १$

और जब $\text{क} = \frac{\text{न}}{२}$ तो $\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} \pm \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} = -१$

बाकी और क के प्रत्येक मान में $\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} \pm \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}}$ का मान द्विविध आवै गा परन्तु $\text{य}^{\text{न}} = १$ इस समीकरण से य के न तुल्यमान आवें गे इस लिये $\text{य}^{\text{न}} - १$ इस का न तुल्य गुण्यगुणकरूप खण्ड हों गे परन्तु य का एक मान १, दूसरा −१ ये सिद्ध हो चुके हैं इस लिये $\text{य}^{\text{न}} - १ = (\text{य} - १)(\text{य} + १)\text{प}$ जहां प का गुण्यगुणकरूप खण्ड न − २ तुल्य हों गे और यदि दो दो खण्डों का घात कर एक खण्ड कल्पना करो तो वैसे $\frac{\text{न} - २}{२}$ इतने खण्ड हों गे परन्तु पूर्व युक्ति से य का एक मान $\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} + \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}}$ यह दूसरा $\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} - \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}}$ यह हो गा इस लिये दोनों खण्ड क्रम से

$\text{य} - \left\{\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} + \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}}\right\}$, और

$\text{य} - \left\{\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} - \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}}\right\}$ हों गे इन दोनों का घात

$= \text{य}^२ - २\text{य}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{२\pi\text{क}}{\text{न}} + १$ ऐसे ऐसे खण्ड प में $\frac{\text{न} - २}{२}$ इतने होने चाहिये इस लिये क के स्थान में, १, २, ३, ······ $\frac{\text{न} - २}{२}$ उत्थापन देकर सब खण्ड विदित कर उन के घात से $\text{य}^{\text{न}} - १ = (\text{य} - १)(\text{य} + १)$

$$(य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{२\pi}{न} + १)(य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{४\pi}{न} + १) \cdots\cdots$$

$$\left\{य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{(न-४)}{न}\pi + १\right\}\left\{य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{(य - २\pi)}{न} + १\right\}$$

ऐसा समीकरण बनै गा इसे (१) इस से प्रकाश करें गे ।

यदि न विषम संख्या हो तो क के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से य का एक मान १ आवै गा इस लिये $य^न - १ = (य - १)\,प$ यहां प का गुण्यगुणकरूपखण्ड न − १ तुल्य हों गे अथवा यदि दो दो खण्डों का घात कर एक खण्ड मानो तो $\frac{न - १}{२}$ इतने खण्ड हों गे इस लिये यहां भी इसी प्रक्रम के (१) समीकरण की क्रिया से

$$य^न - १ = (य - १)\left(य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{२\pi}{न} + १\right)$$

$$\left(य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{४\pi}{न} + १\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\left\{य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{(न-३)}{न}\pi + १\right\}$$

$$\left\{य^2 - २य \cdot \text{कोज्या}\,\frac{न-१}{न}\pi + १\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

३१७ । यदि $य^न + १ = 0$ इस समीकरण में गुण्यगुणकरूपखण्डों का ज्ञान करना हो तो $य^न$ का मान तो स्पष्ट ही है कि −१ हो गा परन्तु यदि $\text{कोज्या}\,\frac{२क+१}{न}\pi \pm \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२क+१}{न}\pi$ इस का न घात किया जाय तौ भी −१ हो गा

इस लिये $\text{कोज्या}\,\frac{२क+१}{न}\pi \pm \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२क+१}{न}\pi$ यह य का मान है इस में यदि न समसंख्या हो तो य का सम्भवमान तो कोई न हो गा परन्तु य के अवश्य न तुल्य गुण्यगुणकरूपखण्ड हों गे

वा दो दो खण्डों के घाततुल्य खण्ड $\frac{न}{२}$ तुल्य हों गे परन्तु जब य का एक मान कोज्या $\frac{२क+१}{न}\pi+\sqrt{-१}$ ज्या $\frac{२क+१}{न}\pi$ यह है और दूसरा

कोज्या $\frac{२क+१}{न}\pi-\sqrt{-१}$ ज्या $\frac{२क+१}{न}\pi$ यह है इस लिये

दोनों खण्डों का घात $=य^२-२य\cdot$ कोज्या $\frac{२क+१}{न}\pi+१$ ऐसे खण्ड $\frac{न}{२}$ हों गे, इस लिये क के स्थान में ०, १, २, ... $\frac{न}{२}-१$ का उत्थापन देने से

$$य^न+१=\left(य^२-२यकोज्या\frac{\pi}{न}+१\right)\cdot\left(य^२-२यकोज्या\frac{३\pi}{न}+१\right)\cdots$$
$$\cdots\left(य^२-२यकोज्या\frac{न-३}{न}\pi+१\right)\cdot\left(य^२-२यकोज्या\frac{न-१}{न}\pi+१\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (१)$$

यदि न विषमसंख्या हो तो य का एक सम्भवमान -१ हो गा शेषखण्ड $न-१$ हों गे वा शेष दो दो खण्डों के घाततुल्यखण्ड $\frac{न-१}{२}$ हों गे, इस लिये यहां भी (१) समीकरण की क्रिया से

$$य^न+१=(य-१)\left(य^२-२यकोज्या\frac{\pi}{न}+१\right)\cdot\left(य^२-२यकोज्या\frac{३\pi}{न}+१\right)\cdots$$

$$\cdots\left(य^2 - २ य कोज्या \frac{न-४}{न}\pi + १\right)$$

$$\left(य^2 - २ य कोज्या \frac{न-२}{न}\pi + १\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

३१८ । $य^{२न} - २य^{न} \cdot कोज्या ष + १ = ०$ यदि इस समीकरण में वर्गसमीकरण की विधि से य का मान निकालो तो

$$य^{न} = कोज्या ष \pm \sqrt{-१}\, ज्या ष$$

इस लिये $य = \left\{कोज्या ष \pm \sqrt{-१}\, ज्या ष\right\}^{\frac{१}{न}}$

$= कोज्या \frac{२क\pi + ष}{न} \pm \sqrt{१} - ज्या \frac{२क\pi + ष}{न}$ जहां क कोई अभिन्नसंख्या है यहां य का एक मान

$कोज्या \frac{२क\pi + ष}{न} + \sqrt{-१}\, ज्या \frac{२क\pi + ष}{न}$ यह दूसरा

$कोज्या \frac{२क\pi + ष}{न} - \sqrt{-१}\, ज्या \frac{२क\pi + ष}{न}$ यह है इस लिये य के मान में जो २न तुल्य गुण्यगुणकरूपखण्ड हों गे उन में दो का घात

$= य^2 - २य \cdot कोज्या \frac{२क\pi + ष}{न} + १$ ऐसे ऐसे न तुल्यखण्ड हों गे इस लिये क के स्थान में ०, १, २ ⋯ न − १ का उत्थापन देने से

$$य^{२न} - २य^{न} \cdot कोज्या ष + १$$

$$= \left(य^2 - २य \cdot कोज्या \frac{ष}{न} + १\right)\left(य^2 - २य \cdot कोज्या \frac{२\pi + ष}{न} + १\right) \cdots\cdots$$

$$\cdots \left\{य^2 - २य \cdot कोज्या \frac{(२न-४)\pi + ष}{न} + १\right\}$$

$$\left\{य^2 - २य \cdot कोज्या \frac{(२न-२)\pi + ष}{न} + १\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

३१९ । ३१६, ३१७, ३१८, प्रक्रमों में क्रम से (१), (२) (१), (२) और (१) जो समीकरण हैं उन में यदि य = १ मानो

तो बहुत से सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जैसे ३१६ प्रक्रम के (१) से

$$\frac{य^{न}-१}{य-१}=य^{न-१}+य^{न-२}+य^{न-३}+\cdots+य+१$$

$$=न=२\left(२-२\,कोज्या\,\frac{२\pi}{न}\right)\left(२-२\,कोज्या\,\frac{४\pi}{न}\right)\cdots\left(२-२\,कोज्या\,\frac{न-२}{न}\pi\right)$$

$$=२^{\frac{न}{२}}\left(१-कोज्या\,\frac{२\pi}{न}\right)\left(१-कोज्या\,\frac{४\pi}{न}\right)\cdots\left(१-कोज्या\,\frac{न-२}{न}\pi\right)$$

$$=२^{न-१}ज्या^{२}\frac{२\pi}{२न}\cdot ज्या^{२}\frac{४\pi}{२न}\cdots\cdots\cdots ज्या^{२}\cdot\frac{न-२}{२न}\pi$$

मूल लेने से

$$\sqrt{न}=२^{\frac{न-१}{२}}\cdot ज्या\,\frac{२\pi}{२न}\cdot ज्या\,\frac{४\pi}{२न}\cdot ज्या\,\frac{६\pi}{२न}\cdots ज्या\,\frac{न-२}{२न}\pi\cdots(१)$$

इसी प्रकार ३१६ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\sqrt{न}=२^{\frac{न-१}{२}}\,ज्या\,\frac{२\pi}{२न}\cdot ज्या\,\frac{४\pi}{२न}\cdot ज्या\,\frac{६\pi}{२न}\cdots ज्या\,\frac{न-१}{२न}\pi,\cdots(२)$$

३१७ प्रक्रम के समीकरणों में भी य=१ मान दो का भाग दे कर मूल लेने से

$$१=२^{\frac{न-१}{२}}\,ज्या\,\frac{\pi}{२न}\cdot ज्या\,\frac{३\pi}{२न}\cdots ज्या\,\frac{न-३}{२न}\pi\cdot ज्या\,\frac{न-१}{२न}\pi,\cdots\cdots(३)$$

$$१=२^{\frac{न-१}{२}}\cdot ज्या\,\frac{\pi}{२न}\cdot ज्या\,\frac{३\pi}{२न}\cdots ज्या\,\frac{न-४}{२न}\pi\,ज्या\,\frac{न-२}{२न}\pi,\cdots\cdots\cdots(४)$$

यहां (१) और (३) समीकरण में न समसंख्या और (२) और (४) समीकरण में न विषमसंख्या है ।

यदि ३१६ प्रक्रम के (१) समीकरण में दोनों पक्षों में य+१ का भाग देकर, य के स्थान में −१ का उत्थापन देकर मूल लेने से

$$\sqrt{न}=२^{\frac{न-१}{२}}\,कोज्या\,\frac{२\pi}{२न}\cdot कोज्या\frac{४\pi}{२न}\cdots कोज्या\,\frac{न-४}{२न}\pi\,कोज्या\frac{न-२}{२न}\pi,$$

इसी प्रकार ३१८ के (१) में य के स्थान में एक का उत्थापन देने से,

$$२\,(१-\text{कोज्या}\,प) = २^{न}\left(१-\text{कोज्या}\,\frac{प}{न}\right)\left(१-\text{कोज्या}\,\frac{२\pi+प}{न}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(१-\text{कोज्या}\,\frac{२न\pi-२\pi+प}{न}\right)$$ मानो कि $प = २न\cdot ब$, $अ = \frac{\pi}{२न}$

तो मूल लेने से

$\pm\,\text{ज्या}\,नब = २^{न-१}\text{ज्या}\,ब\cdot\text{ज्या}\,(२अ+ब)\,\text{ज्या}\,(४अ+ब)\;\cdots$ $\text{ज्या}\,(२नअ-२अ+ब)$ यहां यदि ब, ० और २अ के भीतर हो तो स्पष्ट है कि दहने पक्ष के सब गुणकरूपखण्ड धन हों गे इस लिये ज्यानब तब धन हो गी।

यदि ब, २अ और ४अ के भीतर हो तो भी दहने पक्ष के सब खण्ड धन हों गे परन्तु अन्त्य का खण्ड ऋण हो गा इस लिये तब ज्यानब ऋण हो गी।

और यदि ब, ४अ और ६अ के भीतर हो तो दहने पक्ष के सब खण्ड धन हों गे परन्तु अन्त के दो ऋण हों गे इस लिये तब ज्याब धन हो गी।

इस प्रकार यदि आगे भी विचार करते जाओ तो यदि न संख्या सम हो गी तो ब के ० और २नπ के भीतर के मान में ज्याब धन ही हो गी। परन्तु यदि न विषमसंख्या हो तो दहने पक्ष में जो $२^{न-१}$ छोड़ न तुल्यखण्ड हैं उन में ज्याब छोड़ बाकी न − १ खण्ड सब ऋण हों गे परन्तु न विषम है इस लिये न − १ समसंख्या हो गी इस लिये तब भी ज्याब धन ही रहै गी। इस लिये ऊपर के समीकरण में धन मान लेने से $\text{ज्या}\,नब = २^{न-१}\text{ज्या}\,ब\cdot\text{ज्या}\,(२अ+ब\;\;\text{ज्या}\,(४अ+ब)$

$$\cdots\text{ज्या}\,(२नअ-२अ-ब)\;\cdots\cdots\cdots\cdots\;(५)$$

यदि $ब = म\pi + श$ $\therefore$ $नब = नम\pi + नश$ और $नश = नब - नम\pi$ इस लिये $\text{ज्या}\,नश = \text{ज्या}\,(नब - नम\pi)$

$= \text{ज्या}\,नब\,\text{कोज्या}\,नम\pi = (-१)^{नम}\text{ज्या}\,नब\;\left\{\text{यहां}\;\pi > श > ०\right\}$

यदि न = १, तो $\text{ज्या}\,श = (-१)^{म}\text{ज्या}\,ब$ और

$\text{ज्या}\,(२अ+श) = \text{ज्या}\,(२अ+ब-म\pi) = \text{ज्या}\,(२अ+ब)\,\text{कोज्या}\,म\pi$

$= (-१)^{म}\text{ज्या}\,(२अ+ब)$ इस लिये

$(-१)^{नम}\text{ज्या}\,ब = \text{ज्या}\,नश = २^{न-१}\text{ज्या}\,श\cdot\text{ज्या}\,(२अ+श)$

ज्या (४ अ + श) ⋯ ज्या (२ न π − २ अ + श)

$= २^{न-१} (-१)^{नम}$ ज्याबज्या (२ अ + ब) ज्या (४ अ + ब) ⋯

ज्या (२ न π − २ अब) दोनों पक्षों में $(-१)^{नम}$ का भाग देने से

ज्याब = $२^{न-१}$ ज्याब · ज्या (२ अ + ब) ज्या (४ अ + ब) ⋯

ज्या (२ न π − २ अ + ब) इस लिये चाहे ब का कितना ही मान हो सब में ऊपर का समीकरण ठीक है ।

यदि (५) वें में ब के स्थान में ब + अ का उत्थापन दे देव तो

कोज्यानब = $२^{न-१}$ ज्या (अ + ब) ज्या (३ अ + ब) ज्या (५ अ + ब) ⋯

ज्या (२ नअ − अ + ब) यदि ब = ० तो

१ = $२^{न-१}$ ज्याअ · ज्या ३ अज्या ५ अ ⋯ ज्या { अ (२ न − १) }

यदि (५) वें के दोनों पक्षों में ज्याब का भाग देकर ब का मान शून्य मानो तो

$$\frac{\text{ज्यानब}}{\text{ज्याब}} = न = २^{न-१} \text{ ज्या } २ \text{अ} \cdot \text{ज्या } ४ \text{ अज्या } ६ \text{ अ} \cdots \text{ ज्या } \{ २ \text{ अ } (न - १) \}$$

इसी प्रकार यदि (५) वें में कोज्यानब का भाग दे देव तो स्पनब का भी मान आय जाय गा वा यदि न विषम हो तो (५) वें में ब के स्थान में ब + $\frac{\pi}{२}$ का उत्थापन देव तो

$$\text{ज्या} \left(\text{नब} + \frac{\text{न}\,\pi}{२} \right) = \text{कोज्यानब} \cdot \text{ज्या } \frac{\text{न}\,\pi}{२}$$

$$= २^{न-१} \text{ कोज्याब} \cdot \text{कोज्या } (२ \text{ अ} + \text{ब}) \cdots$$

कोज्या (२ नअ − २ अ + ब) यह समीकरण हो गा इस का भी (५) वें में भाग देने से स्पनब का मान आय जाय गा यों हज़ार हों समीकरण ऊपर लिखे हुए समीकरणों से बना सकते हो ।

३२० । फ ($इ^{य}$) का य के घातवृद्धि में विस्तृतरूप जानना है ।

यहां टेलर के सिद्धान्त से

$$\text{फ} \{ इ^{य} + \text{च} \} = \text{फ} (इ^{य}) + \text{च} \cdot \text{फ}' (इ^{य}) + \frac{\text{च}^{२}}{\underline{|२}} \text{फ}'' (इ^{य})$$

$+ \frac{\text{च}^{३}}{\underline{|३}} \text{फ}''' (इ^{य})$ इस में यदि $इ^{य} = १$ और च = $इ^{य} - १$ तो

$$\text{फ}\left\{\text{इ}^{\text{य}} + \text{च}\right\} = \text{फ}\left\{१ + (\text{इ}^{\text{य}} - १)\right\} = \text{फ}(\text{इ}^{\text{य}}) = \text{फ}(१)$$

$$+ \text{फ}'(१)(\text{इ}^{\text{य}} - १) + \frac{\text{फ}''(१)}{\underline{|२}}(\text{इ}^{\text{य}} - १)^{२}$$

$$+ \frac{\text{फ}'''(१)}{\underline{|३}}(\text{इ}^{\text{य}} - १)^{३} + \cdots \text{ यहां } (\text{इ}^{\text{य}} - १), (\text{इ}^{\text{य}} - १)^{२}$$

इत्यादि का मान २९६ प्रक्रम से ला कर उत्थापन देने से

$$\text{फ}(\text{इ}^{\text{य}}) = \text{फ}(१)$$

$$+ \text{फ}'(१)\left(\frac{\triangle 0}{१}\text{य} + \frac{\triangle \cdot 0^{२}}{\underline{|२}}\text{य}^{२} + \frac{\triangle \cdot 0^{३}}{\underline{|३}}\text{य}^{३} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{\text{फ}''(१)}{\underline{|२}}\left(\frac{\triangle^{२} \cdot 0^{२}}{\underline{|२}}\text{य}^{२} + \frac{\triangle^{२} \cdot 0^{३}}{\underline{|३}}\text{य}^{३} + \frac{\triangle^{२} \cdot 0^{४}}{\underline{|४}}\text{य}^{४} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{\text{फ}'''(१)}{\underline{|३}}\left(\frac{\triangle^{३} \cdot 0^{३}}{\underline{|३}}\text{य}^{३} + \frac{\triangle^{३} \cdot 0^{४}}{\underline{|४}}\text{य}^{४} + \frac{\triangle^{३} \cdot 0^{५}}{\underline{|५}}\text{य}^{५} + \cdots\right)$$

यदि इस में से $\text{य}^{\text{न}}$ का गुणक अलग करें तो

$$\frac{\text{य}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\left\{\text{फ}(१) \cdot 0^{\text{न}} + \text{फ}'(१)\frac{\triangle \cdot 0^{\text{न}}}{\underline{|१}} + \text{फ}''(१)\frac{\triangle^{२} \cdot 0^{\text{न}}}{\underline{|२}}\right.$$

$$\left. + \text{फ}'''(१)\frac{\triangle^{३} \cdot 0^{\text{न}}}{\underline{|३}} + \cdots + \text{फ}^{(\text{न})}(१)\frac{\triangle^{\text{न}} \cdot 0^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\right\}$$

यहां जब $\text{न} = 0$ तो $\text{य}^{\text{न}} = १$ और तब $\text{फ}(१) \cdot 0^{\text{न}} = \text{फ}(१) \cdot 0^{0}$

$= \text{फ}(१)$ और जब $\text{न} > 0$ तब $\text{फ}(१) \cdot 0^{\text{न}} = 0$ ।

ऊपर जो सिद्धान्त दिखलाया है उसे सर जान हर्षेल (Sir John Herschel) ने अपने चलन के उदाहरण रूपग्रन्थ के ६६ पृष्ठ में (Examples of the calculus of Differences) प्रकाश किया है ।

ऊपर के सिद्धान्त में $\triangle \cdot 0^{\text{न}}$, $\triangle^{२} \cdot 0^{\text{न}}$ इत्यादि को यदि ऐसा कल्पनामात्र करो कि $\triangle$, $\triangle^{२}$ इत्यादि और $0^{\text{न}}$ का गुणनफल है तो सब पदों में से $0^{\text{न}}$ निकाल लेने से

$$\frac{य^न}{|न}\left\{फ(१)+\triangle\cdot फ'(१)+\frac{\triangle^2}{|२}फ''(१)+\frac{\triangle^3}{|३}फ'''(१)+\cdots\right\}0^न$$

इस में $\triangle, \triangle^2, \triangle^3$ इत्यादि को यदि $\triangle$ का एक द्वित्रि इत्यादि घात समझें तो टेलर के सिद्धान्त से

$$\frac{य^न}{|न}\left\{फ(१)+\triangle\cdot फ'(१)+\frac{\triangle^2}{|२}फ''(१)+\cdots\right\}0^न$$

$$=\frac{य^न}{|न}\cdot फ(१+\triangle)\cdot 0^न$$ । इस में न के स्थान में ०, १, २, ३ आदि का उत्थापन देने से

$$फ(इ^य)=फ(१)+य\cdot फ(१+\triangle)\cdot 0+\frac{य^2}{|२}फ(१+\triangle)\cdot 0^2$$

$$+\frac{य^3}{|३}\cdot फ(१+\triangle)\cdot 0^3+\frac{य^4}{|४}\cdot फ(१+\triangle)\cdot 0^4+\cdots\quad(१)$$

३२१। ८२ प्रक्रम में जो (१) समीकरण

$\frac{य}{इ^य-१}=१+ब_0\cdot य+ब_1\cdot\frac{य^2}{|२}+ब_3\cdot\frac{य^4}{|४}+\cdots$ यह है उसे यदि

$१+क_1 य+क_2\frac{य^2}{|२}+क_3\frac{य^3}{|३}+क_4\frac{य^4}{|४}+\cdots$ ऐसा लिखैं

जहां $क_1=ब_0$, $क_2=ब_1$, $क_3=0$, $क_4=ब_3$ इत्यादि हैं।

यहां अब ऐसी इच्छा है कि हर्षल के सिद्धान्त से $क_1$, $क_2$ इत्यादि का मान जानें।

यहां $फ(इ^य)=\frac{य}{इ^य-१}=\frac{लाइ^य}{इ^य-१}$ इस लिये,

$$फ(१+\triangle)=\frac{ला(१+\triangle)}{१+\triangle-१}=\frac{ला(१+\triangle)}{\triangle}$$

$$=१-\frac{\triangle}{२}+\frac{\triangle^2}{३}-\frac{\triangle^3}{४}+\frac{\triangle^4}{५}-\frac{\triangle^5}{६}+\cdots$$

इस का उत्थापन ३२० प्रक्रम के (१) समीकरण के $य^न$ देने से

$$क_न = फ(१+\Delta)\cdot ०^न = \left\{१ - \frac{\Delta}{२} + \frac{\Delta^२}{३} - \frac{\Delta^३}{४} + \cdots\right\}\cdot ०^न$$

$$= ०^न - \frac{\Delta\cdot ०^न}{२} + \frac{\Delta^२\cdot ०^न}{३} - \frac{\Delta^३\cdot ०^न}{४} + \cdots \pm \frac{\Delta^न\cdot ०^न}{न+१} \cdots \quad (१)$$

पहले सिद्ध हो चुका है कि $\frac{य}{इ^य - १}$ इस के विस्तृतरूप में य का एक घात छोड़ और कोई विषमघात नहीं है इस लिये यदि न विषमसंख्या हो तो $क_न$ शून्य हो गा इस लिये तब

$$०^न - \frac{\Delta\cdot ०^न}{२} + \frac{\Delta^२\cdot ०^न}{३} - \frac{\Delta^३\cdot ०^न}{४} + \cdots \pm \frac{\Delta^न\cdot ०^न}{न+१}$$ यह

वा $$\frac{\Delta\cdot ०^न}{२} - \frac{\Delta^२\cdot ०^न}{३} + \frac{\Delta^३\cdot ०^न}{४} - \frac{\Delta^४\cdot ०^न}{५} + \cdots \mp \frac{\Delta^न\cdot ०^न}{न+१}$$ यह भी

शून्य हो गा, जैसे यदि न = ३ तो $\frac{\Delta\cdot ०^३}{२} - \frac{\Delta^२\cdot ०^३}{३} + \frac{\Delta^३\cdot ०^३}{४}$

$$= \frac{१}{२} - \frac{६}{३} + \frac{६}{४} = \frac{१}{२} + \frac{३}{२} - २ = ० \text{ (२९० प्रक्रम से)}$$

यदि $क_४$ का मान जानना हो तो इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से ।

$$क_४ = ०^४ - \frac{\Delta\cdot ०^४}{२} + \frac{\Delta^२\cdot ०^४}{३} - \frac{\Delta^३\cdot ०^४}{४} + \frac{\Delta^४\cdot ०^४}{५}$$

$$= -\frac{१}{२} + \frac{१४}{३} - \frac{३६}{४} + \frac{२४}{५} = -\frac{१}{३०},$$

इस प्रकार से न के स्थान में २, ४, ६, ८ इत्यादि समसंख्याओं का उत्थापन देने से बार्नूली के सब संख्याओं का ज्ञान हो जाय गा । २० वें प्रक्रम का १७ वां उदाहरण देखो ।

३२२ । इस प्रक्रम में कुछ हर्षल के सिद्धान्तसम्बन्धि उदाहरणों को दिखलाते हैं ।

(१) यदि $फ(इ^{य}) = \frac{१}{इ^{य}+१}$ तो

$$फ(१+\triangle) = \frac{१}{२+\triangle} = \frac{१}{२} - \frac{\triangle}{४} + \frac{\triangle^{२}}{८} - \frac{\triangle^{३}}{१६} + \cdots$$ इस लिये,

$$(फ\,इ^{य}) = फ(१) + फ(१+\triangle)\cdot ० \cdot य + फ(१+\triangle)\cdot ०^{२} \cdot \frac{य^{२}}{\lfloor २}$$

$$= फ(१) + \frac{१}{२+\triangle}\cdot ० \cdot य + \frac{१}{२+\triangle}\cdot ०^{२}\cdot \frac{य^{२}}{\lfloor २} + \cdots$$

इस में $य^{न}$ का गुणक जो है और ८२ प्रक्रम में जो $य^{न}$ का गुणक यही उदाहरणसम्बन्धि सिद्ध है उस का नाम यदि $क_{न+१}$ रक्खो तो

$$क_{न+१} = -\frac{न+१}{२^{न+१}-१}\cdot\frac{१}{२+\triangle}\cdot ०^{न} = -\frac{न+१}{२^{न+१}-१}\left(\frac{०^{न}}{२} - \frac{\triangle\cdot ०^{न}}{४} + \frac{\triangle^{२}\cdot ०^{न}}{८} - \cdots \pm \frac{\triangle^{न}\cdot ०^{न}}{२^{न+१}}\right)$$

परन्तु यदि न + १ विषमसंख्या हो तो ८२ प्रक्रम से स्पष्ट है कि $क_{न+१} = ०$ इस लिये जब न समसंख्या हो गी तब

$$\frac{०^{न}}{२} - \frac{\triangle\cdot ०^{न}}{४} + \frac{\triangle^{२}\cdot ०^{न}}{८} - \frac{\triangle^{३}\cdot ०^{न}}{१६} + \cdots \pm \frac{\triangle^{न}\cdot ०^{न}}{२^{न+१}} = ०$$

वा, $$\frac{\triangle\cdot ०^{न}}{२} + \frac{\triangle^{२}\cdot ०^{न}}{४} + \frac{\triangle^{३}\cdot ०^{न}}{८} + \cdots \mp \frac{\triangle^{न}\cdot ०^{न}}{\cdot २^{न}} = ०$$

यह सब सिद्ध कर सकते हो।

(२) $फ(इ^{य}) = ज्या(अ\cdot इ^{य})$ इस लिये $इ^{य}$ के स्थान में $१+\triangle$ का उत्थापन देने से

$$फ(१+\triangle) = ज्या(अ + अ\triangle) = ज्याअ\cdot कोज्याअ\triangle + कोज्याअ\cdot ज्याअ\triangle$$

$$= ज्याअ\left(१ - \frac{अ^{२}\cdot\triangle^{२}}{२} + \frac{अ^{४}\cdot\triangle^{४}}{\lfloor ४} - \frac{अ^{६}\cdot\triangle^{६}}{\lfloor ६} + \cdots\right)$$

$$+ कोज्याअ\left(अ\triangle - \frac{अ^{३}\cdot\triangle^{३}}{\lfloor ३} - \frac{अ^{५}\cdot\triangle^{५}}{\lfloor ५} + \cdots\right)$$

इस लिये

$$फ(इ^य) = ज्या(अ \cdot इ^य) = फ(१) + य \cdot फ(१+\triangle) \cdot ० + \frac{य^२}{|\underline{२}} \cdot फ(१+\triangle) \cdot ०^२ + \cdots$$

$$= ज्याअ + (० \cdot ज्याअ + अ \cdot कोज्याअ)य + (०^२ \cdot ज्याअ - अ^२ \cdot ज्याअ + अ \cdot कोज्याअ)\frac{य^२}{|\underline{२}} + \cdots$$

$$= ज्याअ + अयकोज्याअ + अ \cdot \frac{य^२}{|\underline{२}}\left(कोज्याअ - अ \cdot ज्याअ\right) + \cdots$$

यहां पर $\triangle \cdot ०, \triangle^२ \cdot ०^२$ इत्यादि का संख्यात्मक उत्थापन दे दिया है,

$$अथ\ वा\ अइ^य = अ\left(१ + य + \frac{य^२}{|\underline{२}} + \frac{य^३}{|\underline{३}} + \cdots\right)$$

$$= अ + अय + \frac{अ \cdot य^२}{|\underline{२}} + \frac{अ \cdot य^३}{|\underline{३}} + \cdots$$

$$इस\ लिये\ ज्या(अ \cdot इ^य) = ज्या\left\{(अ) + \left(अय + \frac{अ \cdot य^२}{|\underline{२}} + \cdots\right)\right\}$$

$$= ज्याअ \cdot कोज्या\left(अय + अ \cdot \frac{य^२}{|\underline{२}} + \cdots\right)$$

$$+ कोज्याअ \cdot ज्या\left(अय + \frac{अय^२}{|\underline{२}} + \cdots\right)$$

$$= ज्याअ\left\{१ - \frac{१}{२}\left(अय + अ\frac{य^२}{|\underline{२}} + \cdots\right)^२ + \cdots\right\}$$

$$+ कोज्याअ\left\{\left(अय + \frac{अय^२}{|\underline{२}} + \cdots\right) - \frac{१}{|\underline{३}}\left(अय + \frac{अय^२}{|\underline{२}} + \cdots\right)^३\right\}$$

$$= ज्याअ - \frac{ज्याअ}{|\underline{२}}\left(अय + अ\frac{य^२}{|\underline{२}} + \cdots\right)^२ + \cdots$$

$$+ \text{अय} \cdot \text{कोज्याअ} + \frac{\text{अय}^2}{\lfloor 2} \text{कोज्याअ} - \cdots$$

$$= \text{ज्याअ} + \text{अय} \cdot \text{कोज्याअ} + \frac{\text{अ} \cdot \text{य}^2}{\lfloor 2} (\text{कोज्याअ} - \text{अ} \cdot \text{ज्याअ}) + \cdots$$

यही ऊपर भी सिद्ध हुआ है ।

(३) $\text{फ}(\text{इ}^{\text{य}}) = \text{कोज्या}(\text{अ} \cdot \text{इ}^{\text{य}})$

इस लिये $\text{फ}(1) = \text{कोज्याअ}$ और $\text{फ}(1 + \triangle) = \text{कोज्या}(\text{अ} + \text{अ}\triangle)$

$$= \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}\triangle - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}\triangle$$

$$= \text{कोज्याअ}\left(1 - \frac{\text{अ}^2 \cdot \triangle^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{अ}^4 \cdot \triangle^4}{\lfloor 4} - \cdots\right)$$

$$- \text{ज्याअ}\left(\text{अ}\triangle - \frac{\text{अ}^3 \cdot \triangle^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{अ}^5 \cdot \triangle^5}{\lfloor 5} - \cdots\right)$$ इस लिये

$$\text{कोज्या}(\text{अ} \cdot \text{इ}^{\text{य}}) = \text{कोज्याअ} + \text{य}(0\,\text{कोज्या अ} - \text{अ} \cdot \text{ज्याअ})$$
$$+ \frac{\text{य}^2}{\lfloor 2}\left\{\text{कोज्याअ}(0^2 - \text{अ}^2) - \text{अ} \cdot \text{ज्याअ}\right\} + \cdots$$

$$= \text{कोज्या} \cdot \text{अ} - \text{अय} \cdot \text{ज्याअ} - \frac{\text{अ} \cdot \text{य}^2}{\lfloor 2}(\text{ज्याअ} + \text{अकोज्याअ}) + \cdots$$

इस प्रकार बहुत से उदाहरण लाघव से हर्षेल के सिद्धान्त से सिद्ध हो जाते हैं ।

३२३ । कभीं कभीं श्रेढीरूप जो फल है उस में य के प्रत्येक घातसम्बन्धिगुणकों में बडे लाघव से सम्बन्ध ज्ञात हो जाता है जैसे यदि

$$\text{ला}(1 + \text{ज्याय}) = \text{त}_1\,\text{य} + \text{त}_2 \cdot \frac{\text{य}^2}{\lfloor 2} + \text{त}_3 \cdot \frac{\text{य}^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

तो म्याक्लरिन् के सिद्धान्त से

$$\frac{\text{कोज्याय}}{1 + \text{ज्याय}} = \text{त}_1 + \text{त}_2\,\text{य} \cdot + \text{त}_3 \cdot \frac{\text{य}^2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{कोज्याय}}{1 + \text{ज्याय}}\right\} = \text{त}_2 + \text{त}_3 \cdot \text{य} + \text{त}_4 \cdot \frac{\text{य}^2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\text{ता}^{\text{२}}}{\text{ताय}^{\text{२}}}\left\{\frac{\text{कोज्याय}}{\text{१} + \text{ज्याय}}\right\} = \text{त}_{\text{३}} + \text{त}_{\text{४}}\cdot\text{य} + \text{त}_{\text{५}}\cdot\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\lfloor\text{२}} + \cdots$$

$$\frac{\text{ता}^{\text{३}}}{\text{ताय}^{\text{३}}}\left\{\frac{\text{कोज्याय}}{\text{१} + \text{ज्याय}}\right\} = \text{त}_{\text{४}} + \text{त}_{\text{५}}\cdot\text{य} + \text{त}_{\text{६}}\cdot\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\lfloor\text{२}} + \cdots\cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताय}^{\text{न}}}\left\{\frac{\text{कोज्याय}}{\text{१} + \text{ज्याय}}\right\} = \text{त}_{\text{न}+\text{१}} + \text{त}_{\text{न}+\text{२}}\text{य} + \text{त}_{\text{न}+\text{३}}\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\lfloor\text{२}} + \cdots$$

इन सब में यदि य का मान शून्य मानो तो $\text{त}_{\text{१}}, \text{त}_{\text{२}}, \text{त}_{\text{३}}$ इत्यादि के मान व्यक्त हो जायं गे। परन्तु यदि

$\dfrac{\text{कोज्याय}}{\text{१} + \text{ज्याय}} = \text{स}$ तो $\text{स} + \text{स}\cdot\text{ज्याय} = \text{कोज्याय}$ इस का तात्कालिक-सम्बन्धपरम्परा निकालने से

$$\text{स}' + \text{स}'\text{ज्याय} + \text{स}\cdot\text{कोज्याय} = \text{कोज्या}\left(\text{य} + \frac{\pi}{\text{२}}\right)$$

$$\text{स}'' + \text{स}''\text{ज्याय} + \text{२स}'\text{कोज्याय} - \text{स}\cdot\text{ज्याय} = \text{कोज्या}\left(\text{य} + \frac{\text{२}\pi}{\text{२}}\right)$$

$$\text{स}''' + \text{स}'''\text{ज्याय} + \text{३स}''\text{कोज्याय} - \text{३स}'\text{ज्याय} - \text{सकोज्याय} = \text{कोज्या}\left(\text{य} + \frac{\text{३}\pi}{\text{२}}\right)$$

$$\text{स}'''' + \text{स}''''\text{ज्याय} + \text{४स}'''\text{कोज्याय} - \text{६स}''\text{ज्याय} - \text{४स}'\text{कोज्याय} + \text{सज्याय} = \text{कोज्या}\left(\text{य} + \frac{\text{४}\pi}{\text{२}}\right)$$

....

इन में यदि $\text{य} = 0$ तो $\text{स}' = \text{त}_{\text{२}}, \text{स}'' = \text{त}_{\text{३}}, \text{स}''' = \text{त}_{\text{४}}, \cdots$ और $\text{स} = \text{त}_{\text{१}}$ इस लिये

$$\text{त}_{\text{२}} + \text{त}_{\text{१}} = \text{कोज्या}\frac{\pi}{\text{२}}\,।\; \text{त}_{\text{३}} + \text{२त}_{\text{२}} = \text{कोज्या}\frac{\text{२}\pi}{\text{२}}\,।$$

$$\text{त}_{\text{४}} + \text{३त}_{\text{३}} - \text{त}_{\text{१}} = \text{कोज्या}\frac{\text{३}\pi}{\text{२}}\,।\; \text{त}_{\text{५}} + \text{४त}_{\text{४}} - \text{४त}_{\text{२}} = \text{कोज्या}\frac{\text{४}\pi}{\text{२}}$$

इसी प्रकार, $\text{त}_{\text{न}+\text{१}} + \text{न}\cdot\text{त}_{\text{न}} - \dfrac{\text{न}(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{२})}{\lfloor\text{३}}\text{त}_{\text{न}-\text{२}}$

$$+\frac{न(न-१)(न-२)(न-३)(न-४)}{|\underline{5}}त_{न-४}$$

$$-\frac{न(न-१)(न-२)(न-३)(न-४)(न-५)(न-६)}{|\underline{7}}त_{न-६}+\cdots$$

$$=कोज्या\frac{न\pi}{२}$$

ऊपर के समीकरणों से स्पष्ट है कि $त_1$ के ज्ञान से $त_2$ का ज्ञान होता है, $त_2$ के ज्ञान से $त_3$ का ज्ञान होता है इसी प्रकार पीछे के गुणकों के ज्ञान से अगाडी का गुणक ज्ञात होता है। इस प्रकार से गुणकों के सम्बन्ध ज्ञात हुए।

३२४। यदि $फ(य)=ग_0+ग_1 य+ग_2\cdot य^2+ग_3 य^3+\cdots$

तो, य के स्थान में $इ^{क\sqrt{-1}}$ और, $इ^{-क\sqrt{-1}}$ का उत्थापन दे कर क्रम से $इ^{अ\sqrt{-1}}$ और $इ^{-अ\sqrt{-1}}$ से गुण देने से

$$इ^{अ\sqrt{-1}}फ(इ^{क\sqrt{-1}})=ग_0\cdot इ^{अ\sqrt{-1}}+ग_1\cdot इ^{(अ+क)\sqrt{-1}}+\cdots$$

$$इ^{-अ\sqrt{-1}}फ(इ^{-क\sqrt{-1}})=ग_0 इ^{-अ\sqrt{-1}}+ग_1\cdot इ^{-(अ+क)\sqrt{-1}}+\cdots$$

दोनों को जोड़ देने से

$$\frac{1}{2}\left\{इ^{अ\sqrt{-1}}फ(इ^{क\sqrt{-1}})+इ^{-अ\sqrt{-1}}फ(इ^{-क\sqrt{-1}})\right\}$$

$$=ग_0 कोज्याअ+ग_1\cdot कोज्या(अ+क)+\cdots+ग_न\cdot कोज्या(अ+नक)।$$

इसी प्रकार

$$ग_0 ज्याअ+ग_1 ज्या(अ+क)+\cdots+ग_न ज्या(अ+नक)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{इ^{अ\sqrt{-1}}फ(इ^{क\sqrt{-1}})-इ^{-अ\sqrt{-1}}फ(इ^{-क\sqrt{-1}})\right\}$$

यहां $इ^{अ\sqrt{-1}}फ(इ^{क\sqrt{-1}})$

$$=(कोज्याअ+ज्याअ\sqrt{-1})फ(कोज्याक+ज्याक\sqrt{-1})$$

$इ^{-अ\sqrt{-1}}फ(इ^{-\sqrt{-1}})$

$$=(कोज्याअ-ज्याअ\sqrt{-1})फ(कोज्याक-ज्याक\sqrt{-1})$$

ऐसा भी लिख सकते हो।

३२५ । बहुत श्रेढ़ियों का योग केवल त्रिकोणमिति से कर फिर तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा पर से और बहुत श्रेढ़ियों का योग जान सकते हो जैसे त्रिकोणमिति से

$$\text{कोछे}\,\text{य} = \text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२} - \text{कोस्प}\,\text{य}$$

$$\text{कोछे}\,२\,\text{य} = \text{कोस्प}\,\text{य} - \text{कोस्प}\,२\,\text{य}$$

....

$$\text{कोछे}\,२^{\text{न}-१}\text{य} = \text{कोस्प}\,२^{\text{न}-२}\text{य} - \text{कोस्प}\,२^{\text{न}-१}\text{य}$$

दोनों पक्षों का योग करने से

$$\text{कोछे}\,\text{य} + \text{कोछे}\,२\text{य} + \text{कोछे}\,४\,\text{य} + \cdots + \text{कोछे}\,२^{\text{न}-१}\text{य}$$

$$= \text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२} - \text{कोस्प}\,२^{\text{न}-१}\text{य}, \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

इसी प्रकार $\text{स्प}\,\text{य} = \text{कोस्प}\,\text{य} - २\,\text{कोस्प}\,२\,\text{य}$

$$\frac{१}{२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२} = \frac{१}{२}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२} - \text{कोस्प}\,\text{य}$$

$$\frac{१}{२^२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२^२} = \frac{१}{२^२}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२^२} - \frac{१}{२}\,\text{कोस्प}\,\frac{१}{२}\,\text{य}$$

....

$$\frac{१}{२^{\text{न}-१}}\,\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२^{\text{न}-१}} = \frac{१}{२^{\text{न}-१}}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२^{\text{न}-१}} - \frac{१}{२^{\text{न}-२}}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२^{\text{न}-२}}$$

दोनों पक्षों का योग करने से

$$\text{स्प}\,\text{य} + \frac{१}{२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२} + \frac{१}{२^२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२^२} + \cdots + \frac{१}{२^{\text{न}-१}}\cdot\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२^{\text{न}-१}}$$

$$= \frac{१}{२^{\text{न}-१}}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{य}}{२^{\text{न}-१}} - २\,\text{कोस्प}\,२\,\text{य}, \quad \cdots\cdots\cdots (२)$$

(१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\text{कोस्प}\,\text{य}\cdot\text{कोछे}\,\text{य} + २\,\text{कोस्प}\,२\,\text{य}\cdot\text{कोछे}\,२\,\text{य} + \cdots$$

$$+ २^{\text{न}-१}\text{कोस्प}\,२^{\text{न}-१}\text{य}\,\text{कोछे}\,२^{\text{न}-१}\text{य}$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{कोछे}^२\,\frac{\text{य}}{२} - २^{\text{न}-१}\,\text{कोछे}^२\,२^{\text{न}-१}\text{य} \quad \cdots\cdots\cdots (३)$$

इसी प्रकार (२) का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$छे^{२}य + \frac{१}{२^{२}}छे^{२}\frac{य}{२} + \frac{१}{२^{४}}छे^{२}\frac{य}{२^{२}} + \cdots + \frac{१}{२^{२न-२}}छे^{२}\frac{य}{२^{न-१}}$$

$$= ४\,कोछे^{२}२य - \frac{१}{२^{२न-२}}कोछे^{२}\frac{य}{२^{न-१}}, \quad \cdots\cdots\cdots (४)$$

इस प्रकार अनेक श्रेढ़ियों का योग निकल सकता है ।

३२९ । $अ_{३}य^{३}+अ_{२}य^{२}+अ_{१}\cdot य$ इस का महत्तम वा न्यूनतम मान जानना है । यहां स्पष्ट है कि जब किसी य के नियत मान में फल महत्तम वा न्यूनतम होता है तो उस के आगे पीछे फल अवश्य घटै गा वा बढ़ै गा इस लिये कोई दो य के मान में आगे पीछे फ(य) अवश्य तुल्य हो गा । मानो कि य−च, और य+च में दोनों फल समान होते हैं तो

$$अ_{३}(य-च)^{३}+अ_{२}(य-च)^{२}+अ_{१}(य-च)$$
$$=अ_{३}(य+च)^{३}+अ_{२}(य+च)^{२}+अ_{१}(य+च)$$
$$=अ_{३}\cdot य^{३}-३अ_{३}य^{२}च+३अ_{३}यच^{२}-अ_{३}च^{३}$$
$$+अ_{२}य^{२}-२अ_{२}यच+अ_{२}च^{२}+अ_{१}य-अ_{१}च$$
$$=अ_{३}य^{३}+३अ_{३}य^{२}च+३अ_{३}यच^{२}+अ^{३}च^{३}$$
$$+अ_{२}य^{२}+२अ_{२}यच+अ_{२}च^{२}+अ_{१}य+अ_{१}च$$

समशोधन और पक्षान्तरनयन से

$$६अ_{३}य^{२}\cdot च+४अ_{२}यच=-२अ_{३}च^{३}-२अ_{१}च$$

$$वा\ य^{२}+\frac{२अ_{२}}{३अ_{३}}य=-\frac{च^{२}}{३}-\frac{अ_{१}}{३अ_{३}}$$

$$\therefore\ य^{२}+\frac{२अ_{२}}{३अ_{३}}\cdot य+\frac{अ_{२}^{२}}{९अ_{३}^{२}}=\frac{अ_{२}^{२}}{९अ_{३}^{२}}-\left(\frac{च^{२}}{३}+\frac{अ_{१}}{३अ_{३}}\right)$$

मूल लेने से $य+\frac{अ_{२}}{३अ_{३}}=\pm\sqrt{\frac{अ_{२}^{२}}{९अ_{३}^{२}}-\left(\frac{च^{२}}{३}+\frac{अ_{१}}{३अ_{३}}\right)}$

इस लिये $य=\pm\sqrt{\frac{अ_{२}^{२}}{९अ_{३}^{२}}-\left(\frac{च^{२}}{३}+\frac{अ_{१}}{३अ_{३}}\right)}-\frac{अ_{२}}{३अ_{३}}$ यहां स्पष्ट है कि च ज्यों ज्यों बढ़े गा त्यों त्यों $\sqrt{\frac{अ_{२}^{२}}{९अ_{३}^{२}}-\left(\frac{च^{२}}{३}+\frac{अ_{१}}{३अ_{३}}\right)}$ यह घटै गा

इस लिये य के महत्तम मान में अवश्य च = 0 हो गा, तब

$$य = \sqrt{\frac{अ_2^2}{९ अ_3^2} - \frac{अ_1}{३ अ_3}} - \frac{अ_2}{३ अ_3}$$

$$= \sqrt{\frac{४ क^2}{३६} - \frac{१२ ख}{३६}} - \frac{२ क}{६}, \text{ यदि } \frac{अ_2}{अ_3} = क, \frac{अ_1}{अ_3} = ख$$

$$= \frac{\sqrt{४ क^2 - १२ ख} - २ क}{६}, \quad \ldots\ldots\ldots (१)$$

यदि विचार के देखो तो लाला रामचन्द्र के प्रकार से यह प्रकार बहुत ही लाघव है,

इसी प्रकार यदि $य^न - य^म =$ महत्तम जहां $म > न$ तो स्पष्ट है कि $य < १$, यहां भी ऊपर की युक्ति से

$$(य - च)^न - (य - च)^म = (य + च)^न - (य + च)^म$$

$$\therefore (य + च)^न - (य - च)^न = (य + च)^म - (य - च)^म$$

द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$(य + च)^न = य^न + न य^{न-१} च + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} य^{न-२} \cdot च^2 + \cdots$$

$$(य - च)^न = य^न - न य^{न-१} च + \frac{न(न-१)}{\lfloor २} य^{न-२} च^2 - \cdots$$

इस लिये $(य + च)^न - (य - च)^न = २ न \cdot य^{न-१} \cdot च$

$$+ २ \frac{न(न-१)(न-२)}{\lfloor ३} \cdot य^{न-३} च^3 + \cdots$$

$$= २ म \cdot च^{म-१} च + २ \frac{म(म-१)(म-२)}{\lfloor ३} य^{म-३} \cdot च^3 + \cdots$$

२ च का अपवर्त्तन देकर दोनों पक्षों के $च^2, च^4$ यदि गुणकों का नाम क्रम से $अ_2, अ_4, अ_6, \cdots$ और, $क_2, क_4, क_6 \cdots$ रक्खो तो

$$न \cdot य^{न-१} + अ_2 च^2 + अ_4 च^4 + अ_6 च^6 + \cdots$$

$$= म \cdot य^{म-१} + क_2 च^2 + क_4 च^4 + क_6 च^6 + \cdots$$

समशोधन से

$$न \cdot य^{न-१} - च^{२}(क_{२} - अ_{२}) - च^{४}(क_{४} - अ_{४}) - च^{६}(क_{६} - अ_{६}) - \cdots$$

$$= म \cdot य^{म-१} \left\{ \begin{array}{l} \text{यहां स्पष्ट है कि } क_{२} > अ_{२}, क_{४} > अ_{४} \text{ इत्यादि} \\ \text{क्योंकि } म > न \end{array} \right.$$

दोनों पक्षों में $म \cdot य^{न-१}$ का भाग दे देने से

$$\frac{न}{म} - \frac{च^{२}(क_{२} - अ_{२})}{म \cdot य^{न-१}} - \frac{च^{४}(क_{४} - अ_{४})}{म \cdot य^{न-१}} - \frac{च^{६}(क_{६} - अ_{६})}{म \cdot य^{न-१}} - \cdots$$

$= य^{म-न}$ इस लिये

$$य = \sqrt[म-न]{\frac{न}{म} - \frac{च^{२}(क_{२} - अ_{२})}{म \cdot य^{न-१}} - \frac{च^{४}(क_{४} - अ_{४})}{म \cdot य^{न-१}} - \frac{च^{६}(क_{६} - अ_{६})}{म \cdot य^{न-१}} - \cdots}$$

यहां स्पष्ट है कि यदि ऋणात्मक मान उड़ जाय तो य का महत्तम मान हो गा परन्तु ऋणात्मक संख्यायें तभीं उड़ें गी जब $च = 0$

इस लिये तब य का महत्तम मान

$$= \left(\frac{न}{म}\right)^{\frac{१}{म-न}}$$

देखो सामान्यतः केवल बीजगणित से महत्तम मान में य का मान जानने के लिये यह रीति उत्पन्न हुई है। लाला रामचन्द्र ने अपने महत्तम और न्यूनतम (Maxima and minima) में ऐसे स्थल में सामान्यतः कोई ऐसी रीति नहीं दिखलायी है ।

३२७ । ६६ वें प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\frac{तास}{ताय} = \left(\frac{तास}{तार}\right) \cdot \frac{तार}{ताय} + \left(\frac{तास}{ताल}\right) \frac{ताल}{ताय} + \left(\frac{तास}{ताव}\right) \cdot \frac{ताव}{ताय}$$

इस में कल्पना करो कि स्वतन्त्र य, र, और ल, तीन नये चलराशि, ष, ब और श्रु के सम्बन्ध से तीन समीकरण से उत्पन्न होते हैं और स, यह य, र और ल का फल है तो ऊपर ही के समीकरण से

$$\left. \begin{array}{l} \frac{तास}{ताय} = \frac{तास}{ताष} \cdot \frac{ताष}{ताय} + \frac{तास}{ताब} \cdot \frac{ताब}{ताय} + \frac{तास}{ताश्रु} \cdot \frac{ताश्रु}{ताय} \\ \frac{तास}{तार} = \frac{तास}{ताष} \cdot \frac{ताष}{तार} + \frac{तास}{ताब} \cdot \frac{ताब}{तार} + \frac{तास}{ताश्रु} \cdot \frac{ताश्रु}{तार} \\ \frac{तास}{ताल} = \frac{तास}{ताष} \cdot \frac{ताष}{ताल} + \frac{तास}{ताब} \cdot \frac{ताब}{ताल} + \frac{तास}{ताश्रु} \cdot \frac{ताश्रु}{ताल} \end{array} \right\} \cdots\cdots\cdots (१)$$

यहां लाघव से $\left(\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right), \left(\frac{\text{तास}}{\text{ताब}}\right)$ इत्यादि के स्थान में $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}, \frac{\text{तास}}{\text{ताब}}$ इत्यादि लिखा है ।

(१) समीकरण में $\frac{\text{तास}}{\text{ताष}}, \frac{\text{तास}}{\text{ताब}}$, इत्यादि जो हैं वे भी प्रत्येक, य, र, और ल के फल हों गे इस लिये ६५ वें ही प्रक्रम से

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताष}^2}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायताब}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताषताश्रु}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^2\text{ष}}{\text{तायतार}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताष}}$$

$$+\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताब}^2}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताबताष}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताबताश्रु}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^2\text{ब}}{\text{तायतार}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताब}}$$

$$+\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताश्रु}^2}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताश्रुताष}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{तार}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताश्रुताब}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{तार}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{तायतार}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताश्रु}}$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}\cdot\text{ताल}}$$

$$= \frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताष}^2}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताल}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताषताब}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{ताल}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताष}\cdot\text{ताश्रु}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^2\text{ष}}{\text{ताय}\cdot\text{ताल}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताष}}$$

$$+\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताब}^2}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{ताल}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताबताष}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताल}} + \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताबताश्रु}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^{2}\text{ब}}{\text{तायताल}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताब}}$$

$$+\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताश्रु}^{2}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताश्रुताष}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताल}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताश्रुताब}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{ताल}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^{2}\text{श्रु}}{\text{तायताल}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताश्रु}}$$

और $\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताय}^{2}}$

$$=\frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताष}^{2}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताषताब}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताषताश्रु}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^{2}\text{ष}}{\text{ताय}^{2}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}$$

$$+\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताब}^{2}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताबताष}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताबताश्रु}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^{2}\text{ब}}{\text{ताय}^{2}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताब}}$$

$$+\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}\left\{\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताश्रु}^{2}}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताश्रु}\cdot\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताय}}+\frac{\text{ता}^{2}\text{स}}{\text{ताश्रु}\cdot\text{ताब}}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}\right\}$$

$$+\frac{\text{ता}^{2}\text{श्रु}}{\text{ताय}^{2}}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताश्रु}}$$

इसी प्रकार $\frac{\text{ता}^{2}\text{श्रु}}{\text{तार}^{2}}$ और $\frac{\text{ता}^{2}\text{श्रु}}{\text{ताल}^{2}}$ के मान भी निकाल सकते हो ।

जैसे यदि

$$\text{श्रु}=\sqrt{\text{य}^{2}+\text{र}^{2}+\text{ल}^{2}}$$

$$\text{ष}=\text{स्प}^{-1}\frac{\sqrt{\text{य}^{2}+\text{र}^{2}}}{\text{ल}}$$

$$\text{ब}=\text{स्प}^{-1}\frac{\text{र}}{\text{य}}$$ इस लिये

$$\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}}=\frac{\text{य}}{\sqrt{\text{य}^2+\text{र}^2+\text{ल}^2}}=\frac{\text{य}}{\text{श्रु}}=\text{ज्याप}\cdot\text{कोज्याब}$$

$$\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}}=\frac{\text{र}}{\text{श्रु}}=\text{ज्याप}\cdot\text{ज्याब}$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{श्रु}}{\text{तायतार}}=-\frac{\text{य}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}}}{\text{श्रु}^2}=-\frac{\text{य}\cdot\text{ज्यापज्याब}}{\text{श्रु}\cdot\text{श्रु}}=-\frac{\text{ज्या}^2\text{प ज्या २ब}}{\text{२ श्रु}}$$

$$\frac{\text{ताप}}{\text{ताय}}=\frac{\text{ल}}{\text{य}^2+\text{र}^2+\text{ल}^2}\cdot\frac{\text{य}}{\sqrt{\text{य}^2+\text{र}^2}}=\frac{\text{कोज्याप}\cdot\text{कोज्याब}}{\text{श्रु}}$$

$$\frac{\text{ताप}}{\text{तार}}=\frac{\text{ल}}{\text{य}^2+\text{र}^2+\text{ल}^2}\cdot\frac{\text{र}}{\sqrt{\text{य}^2+\text{र}^2}}=\frac{\text{कोज्याप}\cdot\text{ज्याब}}{\text{श्रु}}$$

$$\frac{\text{ताब}}{\text{ताय}}=-\frac{\text{र}}{\text{य}^2+\text{र}^2}=-\frac{\text{ज्याब}}{\text{श्रु}\cdot\text{ज्याप}}$$

$$\frac{\text{ताब}}{\text{तार}}=\frac{\text{य}}{\text{य}^2+\text{र}^2}=\frac{\text{कोज्याब}}{\text{श्रु}\cdot\text{ज्याप}}$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{प}}{\text{तायतार}}=-\frac{\text{श्रु}\left(\text{ज्यापकोज्याब}\,\frac{\text{ताप}}{\text{तार}}+\text{ज्याबकोज्याप}\cdot\frac{\text{ताब}}{\text{तार}}\right)-\text{कोज्यापकोज्याब}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}}}{\text{श्रु}^2}$$

$$=-\frac{\text{ज्या २प}\cdot\text{ज्या २ब}}{\text{४ श्रु}^2}-\frac{\text{कोस्पपज्या २ब}}{\text{२ श्रु}^2}-\frac{\text{ज्या २प}\cdot\text{ज्या २ब}}{\text{४ श्रु}^2}$$

$$=-\frac{\text{ज्या २ब}}{\text{२श्रु}^2}\left(\text{ज्या २प}+\text{कोस्पप}\right)\ \text{और}$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{ब}}{\text{तायतार}}=-\frac{\text{श्रुज्यापकोज्याब}\,\frac{\text{ताब}}{\text{तार}}-\text{ज्यापज्याब}\cdot\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}}-\text{कोज्यापज्याबश्रु}\cdot\frac{\text{ताप}}{\text{तार}}}{\text{श्रु}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{प}}$$

$$=-\frac{\text{कोज्या}^2\text{ब}-\text{ज्या}^2\text{पज्या}^2\text{ब}-\text{कोज्या}^2\text{पज्या}^2\text{ब}}{\text{श्रु}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{प}}$$

$$=-\frac{\text{कोज्या}^2\text{ब}-\text{ज्या}^2\text{ब}}{\text{श्रु}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{प}}=-\frac{\text{कोज्या २ब}}{\text{श्रु}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{प}}$$

इन का उत्थापन इसी प्रक्रम के (१) और (२) समीकरण में देने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{ज्याषकोज्याब} \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताश्रु}} + \frac{\text{कोज्याषकोज्याब}}{\text{श्रु}} \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताष}} - \frac{\text{ज्याब}}{\text{श्रुज्याष}} \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताब}}$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ज्या २ ब}}{२}\left\{\text{ज्या}^2\text{ष} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताश्रु}^2} + \frac{\text{कोज्या}^2\text{ष}}{\text{श्रु}^2} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताष}^2}\right.$$

$$- \frac{१}{\text{श्रु}^2\,\text{ज्या}^2\text{ष}} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताब}^2} + \frac{\text{ज्या २ ष}}{\text{श्रु}}\,\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताषताश्रु}} - \frac{\text{ज्या}^2\text{ष}}{\text{श्रु}} \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताश्रु}}$$

$$\left. - \frac{\text{कोज्याष}}{\text{श्रु}^2}\left(२\,\text{ज्याष} + \frac{१}{\text{ज्याष}}\right)\frac{\text{तास}}{\text{ताष}}\right\}$$

$$+ \text{कोज्या २ ब}\left\{\frac{१}{\text{श्रु}} - \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताबताश्रु}} + \frac{\text{कोस्पष}}{\text{श्रु}^2} \cdot \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताबताष}}\right.$$

$$\left. - \frac{१}{\text{श्रु}^2 \cdot \text{ज्या}^2\text{ष}} \cdot \frac{\text{तास}}{\text{ताब}}\right\}$$ इसी प्रकार $\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायताल}}$ इत्यादि के भी मान बना सकते हो। इन सब पर अच्छी तरह से ध्यान देना चाहिये क्यों कि सम्बन्धों को जहां बदलना होता है वहां अत्यन्त ही उपयोगी हैं।

३२८। कभीं कभीं ल्यागरांज के सिद्धान्त से भी किसी फल का बड़े लाघव से विस्तृतरूप सिद्ध होता है।

जैसे यदि $\text{र} = \text{इ}^{\text{यल}} + \text{इ}^{-\text{यल}}$ और $\text{ल} + \text{य} \cdot \text{इ}^{-२\text{यल}} = 0$

यहां इ का मान य के घातवृद्धि में ले आना है।

यहां जब $\text{ल} + \text{य} \cdot \text{इ}^{-२\text{यल}} = 0 \;\therefore\; -\text{यल} = \text{य}^2 \cdot \text{इ}^{-२\text{यल}}$

वा, $\text{र}' = \text{ह} + \text{य}' \cdot \text{इ}^{२\text{र}'}$ यदि $-\text{यल} = \text{र}'$, $\text{य}^2 = \text{य}'$, और $\text{ह} = 0$

अब यदि यहां $\text{फ}(\text{र}') = \text{इ}^{२\text{र}'}$ और $\text{फि}(\text{र}') = \text{इ}^{\text{र}'} + \text{इ}^{-\text{र}'}$

$= \text{इ}^{\text{यल}} + \text{इ}^{-\text{यल}} = \text{र}$, तो

$$\text{फि}(\text{र}') = \text{र} = \text{फि}(\text{ह}) + \text{य} \cdot \text{फ}(\text{ह}) \cdot \text{फि}'(\text{ह})$$

$$+ \frac{\text{य}^2}{\lfloor २} \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ताह}}\left\{\overline{\text{फ}(\text{ह})}|^2 \cdot \text{फि}'(\text{ह})\right\} + \cdots$$

$$+\frac{य^{न}}{|\underline{न}}\frac{ता^{न-१}}{ताह^{न-१}}\left\{\overline{फ(ह)}|^{न}\,फि'(ह)\right\}+\cdots$$

$$परन्तु\ फि'(ह)=\frac{ता}{ताह}(इ^{ह}+इ^{-ह})=इ^{ह}-इ^{-ह}$$

इस लिये

$$\overline{फ(ह)}|^{न}\cdot फि'(ह)=इ^{२नह}(इ^{ह}-इ^{-ह})=इ^{(२न+१)ह}-इ^{(२न-१)ह}$$

$$और\ \frac{ता^{न-१}}{ताह^{न-१}}\left\{\overline{फ(ह)}|^{न}\cdot फि'(ह)\right\}=(२न+१)^{न-१}\cdot इ^{(२न+१)ह}$$
$$-(२न-१)^{न-१}\cdot इ^{(२न-१)ह}$$

इस लिये र के विस्तृतरूप में सामान्यतः कोई पद का

$$\frac{य'^{न}}{|\underline{न}}\left\{(२न+१)^{न-१}\cdot इ^{(२न+१)ह}-(२न-१)^{न-१}\cdot इ^{(२न-१)ह}\right\}$$

ऐसा रूप हुआ इस में य' के स्थान में $य^{२}$ और ह के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से किसी पद का रूप

$$\frac{य^{२न}}{|\underline{न}}\left\{(२न+१)^{न-१}-(२न-१)^{न-१}\right\}$$ ऐसा हुआ, इस में न के स्थान में ०, १, २, ३ इत्यादि का उत्थापन देने से सब पद ज्ञात हो जांय गे। इस प्रकार यहां बड़े लाघव से र का य के घातवृद्धि में रूप सिद्ध होता है।

३२९। नीचे लिखा हुआ सिद्धान्त कभीं कभीं बाह्यप्रपञ्च में बड़ा ही उपयोगी होता है।

यदि य चल हो और यह एक "त" स्वतन्त्रचलराशि का ऐसा फल हो कि सर्वदा $\frac{ताय}{तात}=अ\cdot य$ जहां अ कोई शान्तसंख्या है अर्थात् अ चाहे स्थिर वा चल हो परन्तु अनन्त के तुल्य नहीं है और यह भी जानते हैं कि जब य = ० तो त भी शून्य होता है तो निश्चय है कि य स्थिर वा शून्य के तुल्य हो गा चल कभीं नहीं हो गा।

इस की उपपत्ति ।

कल्पना करो कि $य = फ(त)$ तो २३ वें प्रक्रम से

$फ(त) - फ(0) = त \cdot फ'(ष \cdot त)$ जहां ष कोई रूपाल्पभिन्नसंख्या है, यहां प्रतिज्ञा से स्पष्ट है कि जब $त = 0$ तो य भी शून्य हो गा इस लिये $फ(0) = 0$ हो गा और $फ'(षत) = अ \cdot फ(षत)$,

इस लिये $फ(त) = त \cdot अ \cdot फ(षत)$

इस लिये यदि य वा फ(त) शून्य के तुल्य न हो तो

$$१ = \frac{त \cdot अ \cdot फ(षत)}{फ(त)} \text{ ऐसा हो गा}$$

परन्तु यह समीकरण असम्भव हो गा क्यों कि जब अ कोई शान्तसंख्या है तब त को बहुत छोटा मानने से $त \cdot अ$ यह संख्या एक से कम हो सकती है और तब त के शून्यमान से य का आरम्भ होता है अर्थात् ज्यों ज्यों त बढ़े त्यों त्यों य भी बढ़ता है तब स्पष्ट है कि $फ(षत) < फ(त)$ इस लिये त को छोटा मानने से $त \cdot अ$ एक से कम और $\frac{फ(षत)}{फ(त)}$ यह भी एक से कम होता है इस लिये दोनों का घात और भी एक से कम हो गा परन्तु ऊपर के समीकरण से तो $त \cdot अ$ और $\frac{फ(षत)}{फ(त)}$ इन का घात सर्वदा एक के तुल्य होता है इस लिये ऊपर का समीकरण असम्भव सिद्ध हुआ इस से यही सिद्ध हो गा कि य चल नहीं हो सकता वा य सर्वदा शून्य के तुल्य है क्यों कि बिना इन दो स्थितियों के $१ = \frac{त \cdot अ \cdot फ(षत)}{फ(त)}$ यह समीकरण कभीं नहीं ठीक हो गा ।

३३० । इसी प्रकार यदि कई चलसंख्याओं में धर्म हो तो प्रत्येक चल न हों गे वा प्रत्येक शून्य हों गे ।

कल्पना करो कि तीन य, र, और ल चलराशि हैं और तीनों एक स्वतन्त्र त चलराशि के फल हैं ऐसा कि सर्वदा

$$\frac{ताय}{तात} = अ_1 य + अ_2 र + अ_3 ल, \frac{तार}{तात} = क_1 य + क_2 र + क_3 ल$$

और $\frac{\text{ताल}}{\text{तात}} = \text{ग}_1\text{य} + \text{ग}_2\text{र} + \text{अ}_3\text{ल}$, जहां अ_1, अ_2, अ_3, क_1, क_2, क_3 इत्यादि कोई शान्तसंख्या है, और जब त = 0 तो तीनों य, र और ल शून्य होते हैं तो तीनों चल कभी न हों गे वा तीनों शून्य के समान हों गे ।

यहां भी कल्पना करो कि य = फ (त), र = फा (त) और ल = फि (त) तो पिछले प्रक्रम की युक्ति से

$$\text{फ}(\text{त}) = \text{त}\left\{\text{अ}_1\text{क}(\text{षत}) + \text{अ}_2\text{फा}(\text{षत}) + \text{अ}_3\text{फि}(\text{षत})\right\}$$

इस लिये यदि फ (त) शून्य न हो तो

$$1 = \text{त}\left\{\text{अ}_1 \frac{\text{फ}(\text{षत})}{\text{फ}(\text{त})} + \text{अ}_2 \frac{\text{फा}(\text{षत})}{\text{फ}(\text{त})} + \text{अ}_3 \frac{\text{फि}(\text{षत})}{\text{फ}(\text{त})}\right\}$$ यह समीकरण उत्पन्न हो गा यहां भी त को बहुत छोटा मानने से दहिना पक्ष एक से कम हो सकता है इस लिये समीकरण असम्भव हो गा तब यही सिद्ध हो गा कि फ (त) वा य चल नहीं है वा सर्वदा शून्य के समान है । इसी प्रकार फा (त) और फि (त) का रूप लाकर सिद्ध कर सकते हो कि र और ल चल नहीं हैं वा शून्य के समान हैं ।

३३१ । इस प्रक्रम में टेलर के सिद्धान्त में कुछ विशेष सङ्केत कल्पना कर कुछ विशेष सिद्धान्त दिखला कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं ।

टेलर के सिद्धान्त से सिद्ध है कि

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{च}\cdot\text{फ}'(\text{य}) + \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{य}) + \cdots$$

यहां यदि फ (य) = स, फ (य + च) = स_1 और $\triangle\text{स} = \text{स}_1 - \text{स}$ तो

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{स}_1 = \text{स} + \triangle\text{स} = \text{स} + \text{च}\cdot\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\cdot\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + \cdots$$

इस में यदि ऐसी कल्पना करो कि मानो $\triangle\text{स} = \triangle \times \text{स}$

$\text{तास} = \text{ता} \times \text{स}$, $\text{ता}^2\text{स} = \text{ता}^2 \times \text{स}$ तो ऊपर के समीकरण का रूप

$$(1+\triangle)\text{स} = \left(1 + \frac{\text{चता}}{\text{ताय}} + \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}\cdot\frac{\text{ता}^2}{\text{ताय}^2} + \frac{\text{च}^3}{\underline{|3}}\cdot\frac{\text{ता}^3}{\text{ताय}^3} + \cdots\right)\text{स}$$

इस में यदि $\frac{ता}{ताय}$ का वर्ग, घन, चतुर्घात आदि का मान $\frac{ता^२}{ताय^२}$, $\frac{ता^३}{ताय^३}$, $\frac{ता^४}{ताय^४}$ इत्यादि कल्पना करो और $\frac{ता}{ताय} = द$ तो

$(१ + \triangle)स = \left(१ + च \cdot द + \frac{च^२द^२}{|\underline{२}} + \frac{च^३द^३}{|\underline{३}} + \cdots\right)स = स इ^{चद}$ ऐसा हो गा इस से टेलर के सिद्धान्त का स्मरण रखने के लिये बहुत सुन्दर युक्ति उत्पन्न होती है कि $इ^{चद}$ का विस्तृतरूप लाकर उस में द, $द^२$ इत्यादि के स्थान में $\frac{ता}{ताय}$, $\frac{ता^२}{ताय^२}$ इत्यादि का उत्थापन दे कर $\frac{ता}{ताय}$, $\frac{ता^२}{ताय^२}$ इत्यादि को स से गुण देव परन्तु ता, $ता^२$, ⋯ और स के बीच में गुणन का चिन्ह मत देव क्यों कि तुम जानते ही हो कि $\frac{तास}{ताय}$, $\frac{ता^२स}{ताय^२}$ इत्यादि एक ही संख्या हैं इन का खण्ड जो किया है वह कल्पना मात्र है।

इसी प्रकार यदि ८५ प्रक्रम के अन्त्य वाले समीकरण में भी स को निकास लो तो

$$स_न = \left(१ + न \cdot \triangle + \frac{न(न-१)}{|\underline{२}}\triangle^२ + \frac{न(न-१)(न-२)}{|\underline{३}} \cdot \triangle^३ + \cdots\right)स$$
$$= स(१ + \triangle)^न$$ ऐसा हो गा।

इस कल्पना से अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जैसे यदि

$फा(य) = फ(य) + फ(य+१)अ + फ(य+२)अ^२ + \cdots$

तो यहां यदि $फ(य) = स$, $फ(य+१) = स_१$, $फ(य+२) स_२$ इत्यादि मानो तो

$$फा(य) = \left\{१ + अ(१+\triangle) + अ^२(१+\triangle)^२ + \cdots\right\}फ(य)$$
$$= \frac{१}{१-(१+\triangle)अ}फ(य) = \frac{१}{१-अ-\triangle अ}फ(य)$$

$$= \frac{१}{अ} \cdot \frac{अ}{१ - अ - \triangle अ} \cdot फ(य) = \frac{१}{अ} \cdot \frac{\frac{अ}{१-अ}}{१ - \frac{अ}{१-अ}\triangle} \cdot फ(य)$$

$$= \frac{१}{अ} \cdot \frac{आ}{१ - आ\triangle} \cdot फ(य) \left(यदि\ आ = \frac{अ}{१-अ},\right) \cdots\cdots (१)$$

परन्तु जब $फा(य) = \{१ + अ(१+\triangle) + अ^{२}(१+\triangle)^{२} + \cdots\} फ(य)$

इस लिये $फा(य) = फ(य) \cdot फि(१+\triangle) = फ(य)\ फि(इ^{द})$

परन्तु ३२२ वें प्रक्रम से

$$फि(इ^{द}) = फि(१) + द \cdot फि(१+\triangle) \cdot ० + \frac{द^{२}}{\underline{|२}} फि(१+\triangle) \cdot ०^{२} + \cdots$$

इस लिये द के स्थान में $\frac{ता}{ताय}$ का और फ(य) के स्थान में स का उत्थापन देने से

$$फा(य) = स \cdot फि(१) + फि(१+\triangle) \cdot ० \cdot \frac{तास}{ताय}$$
$$+ \frac{फि(१+\triangle) \cdot ०^{२}}{\underline{|२}} \cdot \frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} + \frac{फि(१+\triangle) \cdot ०^{३}}{\underline{|३}} \cdot \frac{ता^{३}स}{ताय^{३}}$$
$$+ \cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

परन्तु पहले समीकरण से

$$फि(१+\triangle) = \frac{१}{अ} \cdot \frac{आ}{१ - आ\triangle} \quad \therefore\ फि(१) = \frac{आ}{अ}$$

इन का उत्थापन (२) में दे कर अ से गुण देने से

$$अ \cdot फा(य) = आ \cdot फ(य) + \left\{\frac{आ}{१ - आ\triangle}\right\} \cdot ० \cdot फ'(य)$$
$$+ \left\{\frac{आ}{१ - आ\triangle}\right\} \cdot ०^{२} \cdot \frac{फ''(य)}{\underline{|२}}$$
$$+ \left\{\frac{आ}{१ - आ\triangle}\right\} \cdot ०^{३} \cdot \frac{फ'''(य)}{\underline{|३}}$$

इस में अंश में अा के स्थान में $\dfrac{\text{अ}}{\text{१} - \text{अ}}$ का उत्थापन दे कर दोनों पक्षों को $\dfrac{\text{१} - \text{अ}}{\text{अ}}$ से गुण देने से

$$(\text{१} - \text{अ}) \cdot \text{फा}(\text{य}) = \text{फ}(\text{य}) + \left\{\frac{\text{१}}{\text{१} - \text{आ}\triangle}\right\} \cdot \text{०} \cdot \text{फ}'(\text{य})$$
$$+ \left\{\frac{\text{१}}{\text{१} - \text{आ}\triangle}\right\} \cdot \text{०}^{\text{२}} \cdot \frac{\text{फ}''(\text{य})}{\underline{|\text{२}}}$$
$$+ \left\{\frac{\text{१}}{\text{१} - \text{आ}\triangle}\right\} \cdot \text{०}^{\text{३}} \cdot \frac{\text{फ}'''(\text{य})}{\underline{|\text{३}}} + \cdots$$

यहां भागहार के विधि से

$$\frac{\text{१}}{\text{१} - \text{आ}\triangle} = \text{१} + \text{आ}\triangle + \text{आ}^{\text{२}}\triangle^{\text{२}} + \text{आ}^{\text{३}}\triangle^{\text{३}} + \text{आ}^{\text{४}}\triangle^{\text{४}} + \cdots \text{ इसे}$$

$\text{०}, \text{०}^{\text{२}}, \text{०}^{\text{३}}$, इत्यादि से गुण कर २९० प्रक्रम से $\triangle^{\text{२}} \cdot \text{०}, \triangle^{\text{३}} \cdot \text{०}^{\text{२}}, \triangle^{\text{४}} \cdot \text{०}^{\text{३}}$ इत्यादि के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से ऊपर के समीकरण का रूप

$$(\text{१} - \text{अ})\, \text{फा}(\text{य}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{आ}\triangle\text{०} \cdot \text{फ}'(\text{य})$$
$$+ \frac{\text{आ}\triangle \cdot \text{०}^{\text{२}} + \text{आ}^{\text{२}}\triangle^{\text{२}} \cdot \text{०}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}\, \text{फ}''(\text{य})$$
$$+ \frac{\text{आ}\triangle \cdot \text{०}^{\text{३}} + \text{आ}^{\text{२}}\triangle^{\text{२}} \cdot \text{०}^{\text{३}} + \text{आ}^{\text{३}}\triangle^{\text{३}} \cdot \text{०}^{\text{३}}}{\underline{|\text{३}}}\, \text{फ}'''(\text{य})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{अ})$$

ऐसा हुआ ।

अब देखो कि

$$\text{फा}(\text{य}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{फ}(\text{य} + \text{१})\,\text{अ} + \text{फ}(\text{य} + \text{२})\,\text{अ}^{\text{२}} + \cdots$$
$$+ \text{फ}(\text{य} + \text{र} - \text{१})\,\text{अ}^{\text{र} - \text{१}} + \text{फ}(\text{य} + \text{र}) \cdot \text{अ}^{\text{र}}$$
$$+ \text{फ}(\text{य} + \text{र} + \text{१})\,\text{अ}^{\text{र} + \text{१}} + \cdots$$

और $\text{अ}^{\text{र}} \cdot \text{फा}(\text{य} + \text{र}) = \text{फ}(\text{य} + \text{र}) \cdot \text{अ}^{\text{र}} + \text{फ}(\text{य} + \text{र} + \text{१})\,\text{अ}^{\text{र} + \text{१}} + \cdots$

इस लिये दोनों का अन्तर

$$फा(य) - अ^र \cdot फा(य+र) = फ(य) + फ(य+१)अ + फ(य+२)अ^२ + \cdots$$

$$+ फ(य+र-१)अ^{र-१} \quad परन्तु \quad (१-अ)फा(य) = फ(य)$$

$$+ आ\triangle ० \cdot फ'(य) + \frac{आ\triangle \cdot ०^२ + आ^२\triangle^२ \cdot ०^२}{\underline{|२}} फ''(य) + \cdots$$

$$(१-अ) \quad अ^र \cdot फा(य+र) = अ^र \cdot फ(य+र)$$

$$+ आ\triangle \cdot ० \cdot अ^र \cdot फ'(य+र) + \frac{आ\triangle \cdot ०^२ + आ^२\triangle^२ ०^२}{\underline{|२}} अ^र फ''(य+र)$$

इस लिये $\{१-अ\}\{फा(य) - अ^र फा(य+र)\}$

$$= \{फ(य) - अ^र \cdot फ(य+र)\} + आ\triangle ० \{फ'(य) - अ^र \cdot फ'(य+र)\}$$

$$+ \frac{आ\triangle ०^२ + आ^२\triangle^२ \cdot ०^२}{\underline{|२}} \left\{फ''(य) - अ^र \cdot फ''(य+र)\right\} + \cdots\cdots \quad (क)$$

देखो (१) समीकरण में फा (य) का जो $\frac{१}{१-(१+\triangle)अ} \cdot फ(य)$

यह मान सिद्ध हुआ है इसे इसी प्रक्रम की कल्पना से $\frac{१}{१-अ \cdot इ^द}$ फ (य) ऐसा लिख सकते हैं इस लिये फा (य) के विस्तृत-रूपसम्बन्धि प्रत्येक पदों के गुणक वे ही, हों गे जो कि $\frac{१}{१-अ \cdot इ^द}$ इस के विस्तृतरूपसम्बन्धि प्रत्येक पदों के हों गे।

यदि पूर्व समीकरण में $अ = -१$ तो

$$फा(य) = \frac{१}{१+इ^द} \cdot फ(य)$$

$$= \left\{-ब_० - ३ब_१ \frac{द}{२} - (२^४-१)ब_३ \frac{द^३}{\underline{|४}} - (२^६-१)ब_५ \frac{द^५}{\underline{|६}} - \cdots\right\} फ(य)$$

(८२ प्रक्रम के सिद्धान्त को देखो)

इस में द के स्थान में $\frac{ता}{ताय}$ का उत्थापन देने से

$$\text{फा}(\text{य}) = -\left\{\text{ब}_0 \cdot \text{फ}(\text{य}) + \frac{3\,\text{ब}_1}{\lfloor 2} \cdot \text{फ}'(\text{य}) + (2^4 - 1)\,\text{ब}_3 \cdot \frac{\text{फ}'''(\text{य})}{\lfloor 4} + \cdots\right\}$$

परन्तु (क) समीकरण में अ $= -1$ और आ $= -\frac{1}{2}$ उत्थापन दे कर दो का भाग देने से और, फ (य), फ' (य) इत्यादि गुणकों के स्थान में $-\text{ब}_0$, $-3\,\text{ब}_1$, इत्यादि का उत्थापन २० वें प्रक्रम के १७ उदाहरण से अङ्कात्मक देने से

$$\text{फा}(\text{य}) - \text{अ}^{\text{र}} \cdot \text{फा}(\text{य}+\text{र}) = \text{फ}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}+1)\,\text{अ} + \cdots + \text{फ}(\text{य}+\text{र}-1)\,\text{अ}^{\text{र}-1} = \tfrac{1}{2}\left\{\text{फ}(\text{य}) - \text{अ}^{\text{र}}\text{फ}(\text{य}+\text{र})\right\}$$
$$+ \frac{\text{आ}\,\triangle\, 0}{2}\left\{\text{फ}'(\text{य}) - \text{अ}^{\text{र}}\text{फ}'(\text{य}+\text{र})\right\}$$
$$+ \frac{\text{आ}\,\triangle \cdot 0^2 + \text{आ}^2\,\triangle^2 \cdot 0^2}{\lfloor 2}\left\{\text{फ}''(\text{य}) - \text{अ}^{\text{र}} \cdot \text{फ}''(\text{य}+\text{र})\right\}$$
$$+ \left\{\frac{\text{आ}\,\triangle \cdot 0^3 + \text{आ}^2\,\triangle^2 \cdot 0^3 + \text{आ}^3\,\triangle^3 \cdot 0^3}{2\lfloor 3}\right\} \cdot \left\{\text{फ}'''(\text{य}) - \text{अ}^{\text{र}} \cdot \text{फ}'''(\text{य}+\text{र})\right\} + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{\text{फ}(\text{य}) \pm \text{फ}(\text{य}+\text{र})\right\} - \tfrac{1}{4}\left\{\text{फ}'(\text{य}) \pm \text{फ}'(\text{य}+\text{र})\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{फ}'''(\text{य}) \pm \text{फ}'''(\text{य}+\text{र})}{\lfloor 4}\right\}$$
$$- \tfrac{3}{2}\left\{\frac{\text{फ}^{(5)}(\text{य}) \pm \text{फ}^{(5)}(\text{य}+\text{र})}{\lfloor 6}\right\} + \cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{ख})$$

क्यों कि पदों के गुणक जो फा (य) में हैं वे ही फा (य) $-$ अ$^{\text{र}}$फा (य $+$ र) में भी हैं । (ख) में $\pm$ चिन्ह र के विषम सम पर है ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि इस प्रक्रम के (अ), (क) और (ख) सिद्धान्तों को अच्छी तरह से सीखैं क्यों कि इन से अनेक उदाहरणों की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है। जैसे यदि

$$स = \frac{य(य+२)(य+४)\cdots(य+२र)}{(य+१)(य+३)(य+५)\cdots(य+२र-१)}$$

तो लास = फा(य) = लाय − ला(य−१) + ला(य+२)
− ला(य+३) + ⋯ + ला(य+२र)

यहां फ(य) = लाय, फ(य+१) = ला(य+१) ⋯

इस लिये (ख) में र−१ के स्थान में २र का उत्थापन देने से

$$लास = फा(य) = \tfrac{1}{2}\{फ(य) + फ(य+२र+१)\}$$
$$-\tfrac{1}{4}\{फ'(य) + फ'(य+२र+१)\} + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\{लाय + ला(य+२र+१)\}$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{य} + \frac{1}{य+२र+१}\right) + \cdots$$

यदि य बहुत बड़ा हो तो $\frac{1}{य} + \frac{1}{य+२र+१}$ इत्यादि पद बहुत ही छोटे हों गे इस लिये उन को छोड़ देने से स्वल्पान्तर से

$$लास = \tfrac{1}{2}\{लाय + ला(य+२र+१)\}$$

इस लिये $स = \sqrt{य(य+२र+१)}$ इसी प्रकार यदि

$$स = \frac{य}{य+१}\cdot\frac{य+२}{य+३}\cdot\frac{य+४}{य+५}\cdots\frac{य+२र}{य+२+१}$$ जहां य

कोई बहुत बड़ी संख्या है तो स्वल्पान्तर से सिद्ध कर सक्ते हो कि

$$लास = \tfrac{1}{2}\{लाय - ला(य+२र+२)\}$$

इस लिये $स = \sqrt{\frac{य}{य+२र+२}}$

यदि इस प्रक्रम के (अ) समीकरण में आ के स्थान में $\frac{अ}{१-अ}$, का और $\triangle 0, \triangle\cdot 0^2, \triangle^2\cdot 0^2$ इत्यादि के स्थान में २९० प्रक्रम से उन के अङ्कात्मक मान का उत्थापन देव तो

$$फा(य) = फ(य) + अ\cdot फ(य+१) + अ^2\cdot फ(य+२) + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-अ}फ(य) + \frac{अ}{(1-अ)^2}\cdot फ'(य) + \frac{अ+अ^2}{(1+अ)^3}\cdot\frac{फ''(य)}{\underline{|2}}$$

$$+\frac{अ+४\,अ^{२}+अ^{३}}{(१-अ)^{४}}\cdot\frac{फ'''(य)}{|३}$$

$$+\frac{अ+११\,अ^{२}+११\,अ^{३}+अ^{४}}{(१-अ)^{५}}\cdot\frac{फ^{(४)}(य)}{|४}$$

$$+\frac{अ+२६\,अ^{२}+६६\,अ^{३}+२६\,अ^{४}+अ^{५}}{(१-अ)^{६}}\cdot\frac{फ^{(५)}(य)}{|५}+\cdots$$

इसी समीकरण का नाम (ग) रक्खो ।

(ग) में यदि अ के स्थान में -१ का उत्थापन देव तो (ख) के पदों के गुणक उत्पन्न हो जायंगे । यों अनेक सिद्धान्त बुद्धिमान बना सकता है ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) सिद्ध करो कि $\frac{ता\,य^{न}\cdot ताय}{ताय}=य^{न-१}\cdot ला(इ\cdot य^{न})$ ।

(२) यदि $स=ज्या^{-१}(३\,य-४\,य^{३})$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{तास}{ताय}=\frac{३}{\sqrt{१-य^{२}}}\ ।$$

(३) $$यदि\ स=\frac{२}{\sqrt{अ^{२}+क^{२}}}\cdot स्प^{-१}\left\{\sqrt{\frac{अ-क}{अ+क}}\cdot स्पय\right\}$$

$$-\frac{१}{\sqrt{क^{२}-अ^{२}}}\cdot ला\left\{\frac{\sqrt{अ+क}+(\sqrt{क-अ})\,स्पय}{\sqrt{अ+क}-(\sqrt{क-अ})\,स्पय}\right\}$$

तो सिद्ध करो कि $\frac{तास}{ताय}=0$ ।

(४) यदि धनुष की जीवा ४१ हाथ और शर १ हाथ हो तो धनुष के हाथ का हो गा? ।

उत्तर धनुष $=\frac{२}{३}(११६\sqrt{२}-४१)$ ।

(५) शर और जीवा जान कर चाप का फल बतावो? ।

उत्तर, चाप का फल,

$$= \frac{\text{ज्या}^2 + 4\,\text{श}^2}{4\,\text{श}} \left(\sqrt{\text{ज्या}^2 + 4\,\text{श}^2} - \text{ज्या} \right) + \frac{\text{श} \cdot \text{ज्या}}{2} \text{।}$$

(६) यह सिद्ध करो कि $\Delta^{10} \cdot 0^{10} = 3628800$ ।

(७) चाप २४ हाथ और जीवा २० हाथ तो शर का मान क्या हो गा? ।

$$\text{उत्तर, शर} = \sqrt{\left(\frac{23}{2}\right)^2 - 100} \text{।}$$

(८) जरमन के सङ्केत से सिद्ध करो कि

$$\text{य}^{\text{म}} = \text{अ}^{\text{म}-1} \cdot \text{य} + \frac{\Delta^2 \cdot 0^{\text{म}}}{\underline{|2}} \text{अ}^{\text{म}-2} \cdot \text{य}^{2|-\text{अ}}$$

$$+ \frac{\Delta^3 \cdot 0^{\text{म}}}{\underline{|3}} \cdot \text{अ}^{\text{म}-3} \cdot \text{य}^{3|-\text{अ}} + \cdots$$

(९) यह सिद्ध करो कि

$$\text{य}^4 = \text{य} + 7 \cdot \text{य}^{2|-1} + 6 \cdot \text{य}^{3|-1} + \text{य}^{4|-1} \text{।}$$

(१०) यह सिद्ध करो कि

$$\text{य}^4 = \text{य}^{4|\text{अ}} - 6\,\text{अय}^{3|\text{अ}} + 7\,\text{अ}^2\text{य}^{2|\text{अ}} - \text{अ}^3\text{य} \text{।}$$

(११) यह सिद्ध करो कि

$$\text{य}^5 = \text{य}^{5|-\text{अ}} + 10\,\text{अय}^{4|-\text{अ}} + 25\,\text{अ}^2\text{य}^{3|-\text{अ}}$$

$$+ 15\,\text{अ}^3\text{य}^{2|-\text{अ}} + \text{अ}^4\text{य} \text{।}$$

(१२) $\Delta^{10} \cdot 0^{10} = 3628800$ तो बतावो कि $\Delta^{11} \cdot 0^{11}$ इस का क्या मान हो गा? ।

उत्तर, $\Delta^{11} \cdot 0^{11} = 39916800$ ।

(१३) $\Delta^3 \cdot 0^{10} = 55980$ और $\Delta^4 \cdot 0^{10} = 818520$ तो $\Delta^4 \cdot 0^{11}$ का मान बतावो? ।

उत्तर, $\Delta^4 \cdot 0^{11} = 3498000$ ।

(१४) नीचे लिखे हुए श्लोक वा दोहे की उपपत्ति करो ।

श्लोक ।

वर्गयुतिर्निजगच्छभवा सा वेदहताऽत्रियुगादिसमानाम् ।
स्यादिह वर्गयुतिर्लघुरीत्या कारणमत्र वदाशु सखे मे ॥

दोहा ।

निज पद में एकादि को वर्गयोग जो होय ।
गुनहु चार से द्व्यादिसमवर्गयोग है सोय ॥

(१५) $१^2+(१+३)^2+(१+६)^2+(१+९)^2+\cdots$
$+\{१+३(न-१)\}^2$ इन का योग बतावो? ।

उत्तर, योग $=\frac{न}{२}\{३(न-१)(२न+१)+२\}$ ।

(१६) एक दाता के यहां दो ब्राह्मण कुछ भिक्षा के अर्थ गये, दाता ने पहले ब्राह्मण को ७६८० और दूसरे को ८ पैसे दिया । दूसरे दिन फिर उन्हीं दोनों में पहले को तो जितना पहले दिन दिया था वही दिया परन्तु दूसरे को ४^3, इतना पैसा दिया यों प्रति दिन दूसरे को बढ़ाता गया अर्थात् तीसरे दिन ६^3 चौथे दिन ८^3 इत्यादि पैसा देता गया परन्तु पहले को बराबर ७६८० ही पैसा देता रहा, अन्त में वे दोनों ब्राह्मण वहां से विदा हो दूसरे नगर को चले, राह में दोनों ने अपने २ पैसे को जोड़ा तो दोनों के पास बराबर ही पैसे हुए तो बतावो दाता ने कितने दिनों तक उन दोनों को दान देता रहा? ।

उत्तर, १५ दिन ।

(१७) दो साड़नी सवार कहीं साथ ही चले पहला पहले घंटे में १^2, दूसरे घंटे में $(१+३)^2$ तीसरे घंटे में $(१+६)^2$, चौथे घंटे में $(१+९)^2$ मील यों प्रति घंटे तीन तीन वर्द्धित संख्या के वर्ग तुल्य मील चलता था और दूसरा प्रति दिन १३६ मील चलता था तो बतावो फिर कितने दिनों पर दोनों से भेंट हुई? । उत्तर, ७ दिन ।

(१८) एक मजूर ने इस नियम से खेत खोदना आरम्भ किया कि एक घन इञ्च खोदने से एक कौड़ी पावे । उस ने पहले दिन ५२^3 घन इंच, दूसरे दिन $(५२-५)^3$, घन इंच यों प्रति दिन पांच पांच संख्या अल्प करने से जो जो संख्यायें हों उन के घन के तुल्य घन इंच खोदता था तो उस की दश दिन की मजूरी क्या हो गी? ।

(२० कौड़ी का एक छदाम और ४ छदाम का एक पैसा समझो)

उत्तर, उस की मजूरी ८५॥।)॥१२, और १५ कौड़ी।

(१९) यह सिद्ध करो कि

$$(इ^४ - १)^२ = १६ + ६४ + \frac{१४}{|३} \cdot ६४ + \frac{३०}{|५} \cdot ४^५ + \frac{६२}{|६} \cdot ४^६ + \cdots ।$$

(२०) यह सिद्ध करो कि

$$इ^२(इ^२ - २) = ११ + \frac{१४}{|४} \cdot २^४ + \frac{३०}{|५} २^५ + \frac{६२}{|६} \cdot २^६ + \cdots ।$$

(२१) यह सिद्ध करो कि

$$\triangle^४ ज्याय + \triangle^४ कोज्याय = \frac{३२}{\sqrt{२}} ज्या^४ष \cdot ज्या \left\{ \frac{\pi}{४} + (य + ४ष) \right\} ।$$

(२२) यह सिद्ध करो कि

$$\triangle^{४न} ज्याय \cdot \triangle^{४न} कोज्याय = २^{८न-१} ज्या^{८न}षज्या(२य + ८नष) ।$$

(२३) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{२} = कोज्या\, १२०\, म^० + २मकोज्या\,(२म - २)\,६०^०$$

$$+ \frac{२म(२म-१)}{|२} कोज्या\,(२म - ४)\,६०^० + \cdots$$

$$+ \frac{२म(२म-१)(२म-२)\cdots(म+२)}{|म-१} कोज्या\, १२०^०$$

$$+ \frac{२म(म-१)(२म-२)\cdots(म+१)}{|म} \cdot \frac{१}{२}$$ यहां म कोई अभिन्न-संख्या है।

(२४) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{२} = कोज्या\, १२०\, म^० - ४मकोज्या\,(४म - २)\,३०^०$$

$$+ \frac{४म(४म-१)}{|२} कोज्या\,(४म - ४)\,३०^० - \cdots$$

$$- \frac{४म(४म-१)(४म-२)\cdots(म+२)}{|२म-१} कोज्या\, ६०^०$$

$$+\frac{४म(४म-१)(४म-२)\cdots(२म+१)}{\lfloor २म}\cdot\tfrac{१}{२}$$

यहां म कोई अभिन्नसंख्या है ।

(२५) यह सिद्ध करो कि

$$२५६\,कोज्या^९य = कोज्या\,९\,य + ९\,कोज्या\,७\,य + ३६\,कोज्या\,५\,य + ८४\,कोज्या\,३\,य + १२६\,कोज्याय\,।$$

(२६) यह सिद्ध करो कि

$$१२८\,ज्या^८य = कोज्या\,८\,य - ८\,कोज्या\,६\,य + २८\,कोज्या\,४\,य - ५६\,कोज्या\,२\,य + ३५\,।$$

(२७) यह सिद्ध करो कि

$$य = ज्या\,२\,य - \tfrac{१}{२}ज्या\,४\,य + \tfrac{१}{३}ज्या\,६\,य - \tfrac{१}{४}ज्या\,८\,य + \cdots\,।$$

(२८) यह सिद्ध करो कि

$$स्प^{-१}\left(\frac{न\cdot ज्याअ}{१-नकोज्याअ}\right) = न\cdot ज्याअ + \frac{न^२}{२}ज्या\,२\,अ + \frac{न^३}{३}ज्या\,३\,अ + \cdots$$

(२९) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{२} = \frac{अ}{२} + ज्याअ + \tfrac{१}{२}ज्या\,२\,अ + \tfrac{१}{३}ज्या\,३\,अ + \tfrac{१}{४}ज्या\,४\,अ + \cdots\,।$$

(३०) यह सिद्ध करो कि

$$-\tfrac{१}{२} = कोज्याअ + कोज्या\,२\,अ + कोज्या\,३\,अ + \cdots\,।$$

(३१) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१-४\,ज्या^२\tfrac{१}{२}अ}{\tfrac{१}{२}+ज्या^२\tfrac{१}{२}अ} = कोज्याअ + \tfrac{१}{२}कोज्या\,२\,अ + \tfrac{१}{४}कोज्या\,३\,अ + \tfrac{१}{८}कोज्या\,४\,अ + \tfrac{१}{१६}कोज्या\,५\,अ + \cdots\,।$$

(३२) यह सिद्ध करो कि

$$\tfrac{१}{२} = कोज्याय - कोज्या\,२\,य + कोज्या\,३\,य - कोज्या\,४\,य + \cdots\,।$$

(३३) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{४\,कोज्या^२\tfrac{१}{२}य - १}{४\,कोज्या^२\tfrac{१}{२}य + \tfrac{१}{२}} = कोज्याय - \tfrac{१}{२}कोज्या\,२\,य + \tfrac{१}{४}कोज्या\,३\,य - \tfrac{१}{८}कोज्या\,४\,य + \tfrac{१}{१६}कोज्या\,५\,य - \cdots\,।$$

(३४) यह सिद्ध करो कि

$\frac{1}{४}$ + कोज्याअ (कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ) + कोज्या ५ अ + कोज्या ६ अ + कोज्या ७ अ + कोज्या ८ अ + ⋯ = 0 ।

(३५) ३·४ + ४·५ + ५·६ + ६·७ + ⋯ इस श्रेढ़ी में यदि बारह गच्छ हो तो श्रेढ़ी के सब पदों का योग क्या हो गा? ।

उत्तर, योग = १११२ ।

(३६) ३·५ + ५·७ + ७·९ + ⋯ इस श्रेढ़ी में (न) गच्छमान योग बतावो? ।

$$\text{उत्तर, योग} = \frac{\{३ + २(न - १)\}^{३।२} - १^{३।२}}{६} ।$$

(३७) ३·६·९ + ६·९·१२ + ९·१२·१५ + ⋯ इत्यादि न गच्छ तक योग बतावो? ।

$$\text{उत्तर, योग} = \frac{२७}{४} \cdot न^{४।१} ।$$

(३८) १·४·७ + ४·७·१० + ७·१०·१३ + ⋯ न गच्छ तक योग बतावो? ।

$$\text{उत्तर, योग} = \frac{१४}{३} + \frac{१}{१२}(३न - २)^{४।३} ।$$

(३९) यह सिद्ध करो कि यदि २ न गच्छ हो तो

$$१^२ + १·३·५ + ३^२ + ३·५·७ + ५^२ + ५·७·९ + \cdots + \{१ + २(न - १)\}^{३।२} = \frac{१५}{८} + \frac{न}{३}(२न - १)^{२।२} + \frac{(२न - १)^{४।२}}{८} ।$$

(४०) यह सिद्ध करो कि यदि न गच्छ हो तो

$$१(१^२ + ३·५) + ३(३^२ + ५·७) + ५(५^२ + ७·९) + \cdots + \{२न - १\}\{(२न - १)^२ + (२न + १)^{२।२}\}$$
$$= \frac{१५}{८} + \frac{न^२}{२}\left\{(२न - १)^{२।२} - १\right\} + \frac{(२न - १)^{४।२}}{८} ।$$

(४१) यह सिद्ध करो कि

$$२(२ + ४·६·८) + ४(४ + ६·८·१०) + ६(६ + ८·१०·१२) + \cdots + २न\{२न + (२न + २)^{३।२}\}$$
$$= २न\left\{\frac{(न + १)(२न + १)}{३} + \frac{(२न + २)^{४।२}}{३}\right\} ।$$

(४२) यह सिद्ध करो कि

$$२(२^{२}+४\cdot६)+४(४^{२}+६\cdot८)+६(६^{२}+८\cdot१०)+\cdots+२न\{(२न)^{२}+(२न+२)^{२।२}\}=२न\left\{(न+१)\cdot न^{२।१}+\frac{(२न+२)^{३।२}}{८}\right\}।$$

(४३) $\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{३\cdot४}+\frac{१}{४\cdot५}+\cdots$ न पद तक इन भिन्नों का योग बतावो?।

उत्तर, योग $=\frac{१}{२}-\frac{१}{२+न}$।

(४४) $\frac{१}{३\cdot५}+\frac{१}{५\cdot७}+\frac{१}{७\cdot९}+\cdots$ न पद तक इन का योग बतावो?।

उत्तर, योग $=\frac{न}{३(३+२न)}$।

(४५) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{५\cdot८\cdot११}+\frac{१}{८\cdot११\cdot१४}+\cdots+\frac{१}{(६न+२)^{३।३}}=\frac{न}{८०}\left(\frac{३न+१३}{९न^{२}+३९न+४०}\right)।$$

(४६) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{२८}=\frac{१}{७\cdot११}+\frac{१}{११\cdot१५}+\frac{१}{१५\cdot१९}+\frac{१}{१९\cdot२३}+\cdots।$$

(४७) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{८}\cdot\frac{१}{७}\cdot\frac{१}{११}=\frac{१}{७}\cdot\frac{१}{११}\cdot\frac{१}{१५}+\frac{१}{११}\cdot\frac{१}{१५}\cdot\frac{१}{१९}+\frac{१}{१५}\cdot\frac{१}{१९}\cdot\frac{१}{२३}+\cdots।$$

(४८) सिद्ध करो कि

$$\frac{५}{२२}\cdot\frac{५}{२६}=\frac{७}{११\cdot१३}\cdot\frac{२}{१५}+\frac{८}{१३\cdot१५}\cdot\frac{२}{१७}+\frac{९}{१५\cdot१७}\cdot\frac{२}{१९}+\cdots।$$

(४९) सिद्ध करो कि

$$\frac{३}{२२}\cdot\frac{९}{२६}=\frac{८}{११\cdot१३}\cdot\frac{२}{१५}+\frac{९}{१३\cdot१५}\cdot\frac{२}{१७}+\frac{१०}{१५\cdot१७}\cdot\frac{२}{१९}+\cdots ।$$

(५०) सिद्ध करो कि

$$१=\frac{३}{४}+\frac{३}{४\cdot५}+\frac{१}{४\cdot५}+\frac{१८}{४\cdot५\cdot६\cdot७}+\frac{१८}{५\cdot६\cdot७\cdot८}+\cdots ।$$

(५१) $$\frac{१}{\underline{|४}}+\frac{\underline{|१}}{\underline{|५}}+\frac{\underline{|२}}{\underline{|६}}+\frac{\underline{|३}}{\underline{|७}}+\frac{\underline{|४}}{\underline{|८}}+\cdots$$

इस में

$\frac{१}{१^{४।२}}+\frac{१}{३^{४।२}}+\frac{१}{५^{४।२}}+\frac{१}{७^{४।२}}+\cdots$ इस को घटा कर बाकी निकालो ? ।

उत्तर, बाकी = $\frac{२}{४५}$ ।

(५२) $$\frac{१}{\underline{|५}}+\frac{\underline{|१}}{\underline{|६}}+\frac{\underline{|२}}{\underline{|७}}+\frac{\underline{|३}}{\underline{|८}}+\frac{\underline{|४}}{\underline{|९}}+\cdots$$

इसे

$\frac{१}{\underline{|४}}+\frac{\underline{|१}}{\underline{|५}}+\frac{\underline{|२}}{\underline{|६}}+\frac{३}{\underline{|७}}+\cdots$ इस से गुण कर गुणनफल बतावो ? ।

उत्तर, गुणनफल = $\frac{१}{१७२८}$ ।

(५३) सिद्ध करो कि

$$५=\frac{\frac{१}{\underline{|४}}+\frac{\underline{|१}}{\underline{|५}}+\frac{\underline{|२}}{\underline{|६}}+\frac{\underline{|३}}{\underline{|७}}+\frac{\underline{|४}}{\underline{|८}}+\cdots}{\frac{१}{१^{४।२}}+\frac{१}{३^{४।२}}+\frac{१}{५^{४।२}}+\frac{१}{७^{४।२}}+\cdots}$$

(५४) एक कबूतर पृथ्वी से सूर्य के ओर उड़ा और पहले घंटे में रवि की दूरी का $\frac{१}{१०\cdot१२}$ इतना भाग, दूसरे घंटे में दूरी का

$\frac{१}{१२ \cdot १४}$ इतना भाग, तीसरे घंटे में दूरी का $\frac{१}{१४ \cdot १६}$ इतना भाग य घंटे में दूरी का $\frac{१}{(२य+८)(२य+१०)}$ इतना भाग जाता था तो बतावो कि यदि कपोत अमर हो और लगातार रवि के सन्मुख चला जाय तो अन्त में रविबिम्ब कितना बाकी रह जाय गा ? ।

उत्तर, दूरी का $\frac{१९}{२०}$ इतना भाग बाकी रह जाय गा ।

(५५) (५४) वें प्रश्न में यदि जिस क्षण में पृथ्वी से कबूतर उड़ा उसी क्षण में रविबिम्ब से पृथ्वी की ओर वहां से कोई कपोत चलता तो दोनों का परमाल्प अन्तर कितना हो ता? इस कपोत की गति य घंटे में दूरी का $\frac{१}{(२य-१)^{४।२}}$ इतना भाग समझो ।

उत्तर, परमाल्प अन्तर = दूरी का $\frac{१६९}{१८०}$ भाग ।

(५६) सिद्ध करो कि

$$\frac{२य-५}{(य+१)^२(य+३)} = \frac{११}{४} \cdot \frac{१}{य+१} - \frac{७}{२} \cdot \frac{१}{(य+१)^२} - \frac{११}{४} \cdot \frac{१}{य+३} ।$$

(५७) सिद्ध करो कि

$$\frac{य^२-७य+१}{य^३-६य^२+११य-६} = \frac{९}{य-२} - \frac{५}{२} \cdot \frac{१}{य-१} - \frac{११}{२} \cdot \frac{१}{य-३} ।$$

(५८) सिद्ध करो कि

$$\frac{य-३}{य^३+१} = \frac{१}{३} \cdot \frac{४य-५}{य^२-य+१} - \frac{४}{३} \cdot \frac{१}{य+१}$$

(५९) सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{(य+१)(य+२)^२(य^२+१)} = \frac{१}{२} \cdot \frac{१}{य+१} - \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{(य+२)^२}$$

$$- \frac{९}{२५} \cdot \frac{१}{य+२} - \frac{१}{५०} \cdot \frac{७य+१}{य^२+१} ।$$

(६०) सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{(य^२+१)^२(य+१)} = \frac{१}{४}\cdot\frac{य}{य-१} - \frac{१}{४}\cdot\frac{य-१}{य^२+१} - \frac{१}{२}\cdot\frac{य-१}{(य^२+१)^२}\text{ ।}$$

(६१) सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{(य^२+१)^न} = \frac{१}{२न-२}\cdot\frac{१}{(य^२+१)^{न-१}}$$

$$+\frac{२न-३}{२न-२}\cdot\frac{१}{(य^२+१)^{न-१}} - \frac{य^२}{(य^२+१)^न}\text{ ।}$$

(६२) सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{कोछेय}}{२} = \text{ज्याय} + \text{ज्या ३ य} + \text{ज्या ५ य} + \text{ज्या ७ य} + \text{ज्या ९ य} + \cdots \text{ ।}$$

(६३) सिद्ध करो कि

$$\frac{६}{\text{छेय} + ८\,\text{ज्याय}} = \text{ज्याय} + \tfrac{१}{२}\text{ज्या ३ य} + \tfrac{१}{४}\text{ज्या ५ य} + \tfrac{१}{८}\text{ज्या ७ य} + \cdots \text{ ।}$$

(६४) सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{कोस्प}\,\frac{१}{२}\,\text{य}}{२} = \text{ज्याय} + \text{ज्या २ य} + \text{ज्या ३ य} + \text{ज्या ४ य} + \cdots \text{ ।}$$

(६५) सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{(\text{अ}^२+१)\,\text{कोछेय} - २\,\text{अकोस्पय}} = \text{ज्याय} + \text{अ}\cdot\text{ज्या २ य}$$

$$+ \text{अ}^२\cdot\text{ज्या ३ य} + \cdots \text{ ।}$$

(६६) सिद्ध करो कि

$$\text{द्व}^{\text{अ}\cdot\text{कोज्याय}}\cdot\text{ज्या}(\text{य} + \text{अज्याय}) - \text{ज्याय}$$

$$= \text{अ}\cdot\text{ज्या २ य} + \frac{\text{अ}^२}{\underline{|२}}\text{ज्या ३ य} + \frac{\text{अ}^३}{\underline{|३}}\text{ज्या ४ य} + \cdots \text{ ।}$$

(६७) सिद्ध करो कि $\text{ज्या}(\text{य} + \text{ज्याय})\cdot\text{द्व}^{\text{कोज्याय}} - \text{ज्याय}$

$$= \text{ज्या २ य} + \frac{१}{\underline{|२}}\text{ज्या ३ य} + \frac{१}{\underline{|३}}\text{ज्या ४ य} + \cdots \text{ ।}$$

(६८) सिद्ध करो कि ज्या $(\text{य} + \frac{१}{२}\text{ज्याय}) \cdot \text{इ}^{\frac{१}{२}\text{कोज्याय}} - \text{ज्याय}$

$$= \frac{१}{२}\left\{\text{ज्या}\,२\,\text{य} + \frac{१}{२\,|\underline{२}}\,\text{ज्या}\,३\,\text{य} + \frac{१}{२^२\,|\underline{३}} \cdot \text{ज्या}\,४\,\text{य} + \cdots\right\} ।$$

(६९) सिद्ध करो कि $\text{इ}^{\text{कोज्याय}} \cdot \text{कोज्या}\,(\text{य} + \text{ज्याय}) - \text{कोज्याय}$

$$= \text{कोज्या}\,२\,\text{य} + \frac{१}{|\underline{२}}\,\text{कोज्या}\,३\,\text{य} + \frac{१}{|\underline{३}}\,\text{कोज्या}\,४\,\text{य} + \cdots ।$$

(७०) सिद्ध करो कि

$$३ = १६\,\text{ज्या}\,२०^\circ \cdot \text{ज्या}\,४०^\circ \cdot \text{ज्या}\,६०^\circ\,\text{ज्या} \cdot ८०^\circ ।$$

(७१) इसे सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{य} \cdot \text{ज्या}^{-१}\text{य}}{\sqrt{१-\text{य}^२}} = \left(१ - \frac{१}{३}\text{य}^२ - \frac{२}{३\cdot५}\text{य}^४ - \frac{२\cdot४}{३\cdot५\cdot७}\text{य}^६ - \cdots\right)\text{स्प}^२\{\text{ज्या}^{-१}\text{य}\} ।$$

(७२) यदि $\text{न}\pi < \text{य} < (\text{न}+१)\pi$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{य} = \left(\text{न} + \frac{१}{२}\right)\pi - (-१)^{\text{न}}\left(\text{कोज्याय} + \frac{१}{२}\frac{\text{कोज्या}^३\text{य}}{३} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}\cdot\frac{\text{कोज्या}^५\text{य}}{५} + \cdots\right)$$

(७३) सिद्ध करो कि ।

$$\text{लाज्याय} + \text{ला}_{\text{य}} - \frac{१}{३}\cdot\frac{\text{य}^२}{२} - \frac{१}{४५}\cdot\frac{\text{य}^४}{४} - \frac{२}{९४५}\,\frac{\text{य}^६}{६}$$
$$- \frac{१}{४७२५}\cdot\frac{\text{य}^८}{८} - \frac{२}{९३५५५}\cdot\frac{\text{य}^{१०}}{१०} - \cdots\cdots$$

(७४) इसे सिद्ध करो कि

$$\text{लाछेय} = \frac{\text{य}^२}{२} + \frac{१}{३}\cdot\frac{\text{य}^४}{४} + \frac{२}{१५}\cdot\frac{\text{य}^६}{६} + \frac{१७}{३१५}\cdot\frac{\text{य}^८}{८} + \frac{६२}{२८३५}\cdot\frac{\text{य}^{१०}}{१०} + \cdots ।$$

(७५) यदि ह, यह य, र, और ल का फल हो और ह', ह का मान होता है यदि व · स = य, स · ष = र और ष · व = ल तो सिद्ध करो कि

$$\text{य}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}}{\text{ताय}^२} + \text{र}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}}{\text{तार}^२} + \text{ल}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}}{\text{ताल}} + \text{रल}\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}}{\text{तार}\,\text{ताल}} + \text{लय}\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}}{\text{ताल}\text{ताय}}$$
$$+ \text{यर}\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}}{\text{ताय}\text{तार}} = \frac{१}{२}\left(\text{ष}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}'}{\text{ताष}^२} + \text{व}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}'}{\text{ताव}^२} + \text{स}^२\cdot\frac{\text{ता}^२\text{ह}'}{\text{तास}^२}\right) ।$$

(७६) ३२७ वें प्रक्रम में जो उदाहरण दिखाया है उस में सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} = कोज्या^{२}ब \left\{ ज्या^{२}ष \cdot \frac{ता^{२}स}{ताश्रु^{२}} + \frac{कोज्या^{२}ष}{श्रु^{२}} \frac{ता^{२}स}{ताष^{२}} + \frac{ज्या\,२ष}{श्रु} \cdot \frac{ता^{२}स}{ताश्रुताष} + \frac{कोज्या^{२}ष}{श्रु} \cdot \frac{तास}{ताश्रु} - \frac{ज्या\,२ष}{श्रु^{२}} \cdot \frac{तास}{ताष} \right\}$$

$$- \frac{ज्या\,२ब}{श्रु} \left\{ \frac{ता^{२}स}{ताबताश्रु} + \frac{कोज्याष}{श्रु} \cdot \frac{ता^{२}स}{ताषताब} - \frac{१}{श्रु \cdot ज्या^{२}ष} \cdot \frac{तास}{ताब} \right\}$$

$$+ \frac{ज्या^{२}ब}{श्रु} \left\{ \frac{१}{श्रु \cdot ज्या^{२}ष} \cdot \frac{ता^{२}स}{ताब^{२}} + \frac{तास}{ताश्रु} + \frac{कोज्याष}{श्रु} \cdot \frac{तास}{ताष} \right\} ।$$

(७७) यह सिद्ध करो कि

$$४ = १२८ \sqrt{२}\, ज्याअ \cdot ज्या\,२अ \cdot ज्या\,३अ \cdots ज्या\,७\frac{३^{०}}{४}$$

यहां $अ = ११\frac{१^{०}}{४}$ ।

(७८) सिद्ध करो कि

$१ = १६\, ज्या\,१०^{०} \cdot ज्या\,३०^{०} \cdot ज्या\,५०^{०} ज्या\,७०^{०}$ ।

(७९) सिद्ध करो कि

$ज्या\,१०^{०} \cdot ज्या\,३०^{०} \cdot ज्या\,५०^{०} ज्या\,७०^{०}$ ।

$= ज्या\,१८^{०} \cdot ज्या\,५४^{०} ज्या\,९०^{०} ज्या\,१२६^{०} ज्या\,१६२^{०}$ ।

(८०) सिद्ध करो कि ।

$६ = ६४ \cdot ज्या\,२०^{०} \cdot ज्या\,४०^{०} \cdot ज्या\,६०^{०} \cdot ज्या\,८०^{०} \cdot ज्या\,१००^{०} \cdot ज्या\,१२०^{०} \cdot ज्या\,१४०^{०} \cdot ज्या\,१६०^{०}$

(८१) $\frac{४}{इ^{य} + ३}$ इस का मान यदि य के घातवृद्धि में लावें तो सिद्ध करो कि $\frac{य^{न}}{\lfloor न}$ का गुणक $०^{न} - \frac{\Delta \cdot ०^{न}}{४} + \frac{\Delta^{२} \cdot ०^{न}}{४^{२}} - \frac{\Delta^{३} \cdot ०^{न}}{४^{३}} + \frac{\Delta^{४} \cdot ०^{न}}{४^{४}} - \frac{\Delta^{५} \cdot ०^{न}}{४^{५}} + \cdots \pm \frac{\Delta^{न} \cdot ०^{न}}{४^{न}}$ यह हो गा ? ।

(८२) सिद्ध करो कि $\pi = \frac{८}{३} \cdot \frac{१६}{१५} \cdot \frac{३६}{३५} \cdot \frac{६४}{६३} \cdots\cdots$ ।

(८३) सिद्ध करो कि $\pi = ३ \cdot \frac{३६}{३५} \cdot \frac{१४४}{१४३} \cdot \frac{३२४}{३२३} \cdot \frac{५७६}{५७५} \cdots$

(८४) सिद्ध करो कि

$$इ^{य} + इ^{-य} = २\left(१ + \frac{४ य^{२}}{\pi^{२}}\right)\left(१ + \frac{४ य^{२}}{३^{२} \pi^{२}}\right)\left(१ + \frac{४ य^{२}}{५^{२} \pi^{२}}\right) \cdots\cdots$$

(८५) नीचे लिखे हुए पदों का न पद तक योग करो ।
$ज्या^{२}अ + ज्या^{२}(अ + क) + ज्या^{२}(अ + २क) + ज्या^{२}(अ + ३क) + \cdots$ ।

(८६) नीचे लिखे हुए पदों का न पद तक योग करो ।
$ज्या^{३}अ + ज्या^{३}(अ + क) + ज्या^{३}(अ + २क) + ज्या^{३}(अ + ३क) + \cdots$ ।

(८७) यह जानते हैं कि

$$कोज्याय कोज्या\,२य\, कोज्या\,४य \cdots कोज्या\,२^{न-१}य = \frac{ज्या\,२^{न}य}{२^{न} \cdot ज्याय}$$

इस पर से सिद्ध करो कि
$स्पय + २स्प२य + ४स्प४य + \cdots + २^{न-१}स्प२^{न-१}य = कोस्पय - २^{न}कोस्प२^{न}य$ ।

(८८) $ज्याअज्या\,२अ + ज्या\,२अज्या\,३अ + ज्या\,३अज्या\,४अ + \cdots$ इत्यादि न पद तक इस का योग बतावो ? ।

$$उत्तर\ योग = \frac{न \cdot ज्या\,२अ - २कोज्या\left\{अ(न+२)\right\}ज्यान \cdot अ}{४\,ज्याअ}$$ ।

(८९) यदि $र = य + अ \cdot फा(र) + क \cdot फि(र) + \cdots\cdots$
तो सिद्ध करो कि $फ(र) = फ(य) + \cdots$

$$+ \frac{१}{|\underline{न}} \cdot \frac{ता^{न-१}}{ताय^{न-१}}\left[फ'(य)\left\{अफा(य) + कफि(य) + \cdots\right\}^{न}\right] + \cdots$$ ।

(९०) यदि $र = ह + य \cdot फ(र)$ और $र' = ह' + य' \cdot फा(र')$ और कल्पना करो कि ह और ह' परस्पर स्वतन्त्र हैं तो यदि फि(र, र') का विस्तृतमान, य और य' के घातों की वृद्धि के गुणन फल में सिद्ध हो तो सिद्ध करो कि कोई पद का रूप

$$\frac{ता^{म+न-२}}{ताह^{म+१}ताह^{न-१}}\left\{\overline{फ(ह)}|^{म} \cdot \overline{फा(ह')}|^{न} \frac{ता^{२}फि(ह, ह')}{ताहताह'}\right\}\frac{य^{म}}{|\underline{म}} \cdot \frac{य'^{न}}{|\underline{न}}$$

ऐसा हो गा ।

(९१) सिद्ध करो कि यदि म अभिन्न हो तो

$ड्र^{२म\pi\sqrt{-१}} = १$ और $ड्र^{(२म+१)\pi\sqrt{-१}} = -१$ ।

(९२) सिद्ध करो कि यदि म अभिन्न हो तो

$$ला(य) = ला(य) + २म\pi\sqrt{-१} ।$$

$$ला(ह) = ला(ह) + २म\pi\sqrt{-१} ।$$

$$ला(य\cdot ह) = ला(य\cdot ह) + २(म+न)\pi\sqrt{-१} ।$$

और, $$ला\left(\frac{य}{ह}\right) = ला\left(\frac{य}{ह}\right) + २(म-न)\pi\sqrt{-१} ।$$

(९३) सिद्ध करो कि $\pi(२म+१) = \dfrac{ला(-१)}{\sqrt{-१}}$ ।

और, $$ला(-य) = ला(य) + (२म+१)\pi\sqrt{-१} ।$$

(९४) यदि, $य' = त_१य + म_१र$ और $र' = त_२य + म_२र$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} + \frac{ता^२स}{तार^२} = (त_१^२ + म_१^२)\frac{ता^२स}{ताय'^२}$$
$$+ २(त_१त_२ + म_१म_२)\frac{ता^२स}{ताय'तार'} + (त_२^२ + म_२^२)\frac{ता^२स}{तार'^२} ।$$

(९५) जिन दोनों अक्षों का झुकाव (अ) है उन के वश से वक्र का भुज (य) और कोटि (र) जानते हैं तो वक्र जातीय व्यासार्द्ध का मान बतावो ? । (११३) वां प्रक्रम देखो ।

$$उत्तर,\ व्यासार्द्ध = \frac{\left\{१ + २ कोज्याअ\dfrac{तार}{ताय} + \left(\dfrac{तार}{ताय}\right)^२\right\}^{\frac{३}{२}}}{-ज्याअ\cdot\dfrac{ता^२र}{ताय^२}} ।$$

(९६) परवलय के किसी दो बिन्दुओं पर जो स्पर्शरेखा हुईं उन्हीं दोनों को अक्ष कल्पना कर परवलय का समीकरण बनाया तो $\left(\dfrac{य}{अ}\right)^{\frac{१}{२}} + \left(\dfrac{र}{क}\right)^{\frac{१}{२}} = १$ ऐसा हुआ । अब दोनों अक्षों का यदि झुकाव (ग)

माने तो सिद्ध करो कि परवलय के किसी विन्दु का वक्रजातीय व्यासार्द्ध $\frac{२}{अकज्याग}\left\{अय + कर - २ कोज्याग \sqrt{(अकयर)}\right\}$ यही होगा।

(९७) बतावो कि $र = इ^{-य^२}$ इस वक्र के सन्धिस्थान का भुज कितना हो गा ?।

उत्तर, सन्धिस्थान का भुज $= \pm \frac{१}{\sqrt{२}}$।

(९८) अगघक एक वृत्तार्द्ध है जिस में अक व्यास और अक के समानान्तर गघ पूर्णज्या है। अघ, कग रेखाओं का योगविन्दु ज माने तो जब जगघ त्रिभुज का महत्तम फल हो गा उस समय गघ पूर्णज्या का क्या मान हो गा ?।

उत्तर, $गघ = \frac{\sqrt{१७} - १}{४} \cdot अक$।

(९९) भास्कराचार्य अपनी लीलावती के क्षेत्र व्यवहार में सांप और मयूर का जो प्रश्न किया है उस में यदि ऐसा कल्पना किया जाय कि सांप की गति से मयूर की गति प्रति क्षण में दूनी है और प्रति क्षण में मयूर की गमन दिशा सांप के मुख ही के ओर है तो मयूर की गमन दिशा जो वक्राकार हो गी उस का समीकरण यदि खंभे को य अक्ष और खंभे के अग्र को मूलविन्दु मान कर बनावें तो सिद्ध करो कि $\frac{१}{२} \cdot \frac{ताचा}{ताय} = -(९ - य) \cdot \frac{ता^२र}{ताय^२}$ ऐसा समीकरण हो गा ?।

यहां चा, मूलविन्दु से मयूर के वक्र मार्ग का चाप है।

(१००) $श्रु = आ \cdot अ^प$ इस वक्र के ध्रुवस्थान से वक्र के स्पर्शरेखा पर लम्बडाला लम्ब और स्पर्शरेखा के योगविन्दु से श्रुति के समानान्तर रेखा खींचा इस प्रकार से जितनी रेखा खींची जायं गी उन के अन्वालोप का कैसा समीकरण हो गा ?।

उत्तर, $श्रु = आ \cdot कोज्याइ \cdot अ^{प+इ}$

यहां $स्पइ = \frac{१}{लाअ}$।

(१०१) दीर्घवृत्त के दोनों व्यासार्द्धों के घाततुल्य व्यास में जो परिधि हो वह दीर्घवृत्त का फल होता है यह समझ लो कि सिद्ध है अब एक समद्विबाहु जिस का आधार = २ क और शिरःकोण से आधार पर पड़ा लम्ब = अ है, उस के भीतर एक ऐसा दीर्घवृत्त बनाया चाहते हैं जिस का एक व्यास समद्विबाहु के शिरःकोण से आधार पर पड़ा जो लम्ब उसी में हो और फल भी महत्तम हो तो दीर्घवृत्त के दोनों व्यासार्द्धों का क्या मान हो गा ? ।

उत्तर, लम्ब में जो व्यासार्द्ध है उस का माम लम्ब का तृतीयांश हो गा और दूसरा व्यासार्द्ध $= \frac{क}{\sqrt{३}}$ ।

(१०२) जिस समद्विबाहु का लम्ब (अ) है उस के लम्ब ही को य अक्ष मान एक परवलय बना हुआ है जो कि समद्विबाहु के दोनों भुजों को स्पर्श करता य अक्ष के दोनों ओर से आधार में आ लगा है यहां यदि आधार के खण्ड को परवलय के खण्ड की दूनी कोटि मान, परवलय का जो भुज $र^२ = ४ अय$ इस समीकरण पर से निकलता है उस का और कोटि का घात महत्तम होता है तो परवलय का भुज बतावो ? ।

उत्तर, भुज $= \frac{३ अ}{४}$ ।

(१०३) एक परवलय जिस का शिरःस्थान से भुज (अ) और दूनी कोटि (२ क) आधार है उस के भीतर एक ऐसा दूसरा परवलय का खण्ड बनाया चाहते हैं जिस का शिरःस्थान पहले परवलय के आधारार्द्ध पर हो और क्षेत्र फल महत्तम हो तो बतावो इस का क्या भुज हो गा ? ।

उत्तर, भुज $= \frac{२ अ}{३}$ ।

(१०४) र = फ (य) इस वक्र में उस विन्दु का भुज क्या हो गा ? जिस विन्दु सम्बन्धि वक्र की स्पर्शरेखा से दोनों अक्षों के जो खण्ड हैं उन से और स्पर्शरेखा के खण्ड से जो जात्यत्रिभुज हो उस का फल महत्तम हो ? ।

उत्तर, उस विन्दु की स्पर्शरेखा य अक्ष में मूल विन्दु से—य अन्तर पर लगै गी ।

(१०५) एक धनी ने एक ज्यौतिषी से पूछा कि हम को कै लड़के हैं और उन की और हमारी इस समय में कितनी २ अवस्था हैं और अब हमारी कितनी आयु है?। ज्यौतिषी ने कुछ काल विचार चमत्कार प्रकार से कहा कि इस समय आप की अवस्था तो तीस बरस की है, और तीन लड़के आप को हैं तिन में छोटे दोनों लड़के एक साथ ही उत्पन्न हुए हैं और इन दोनो का इस समय जो वय है उस का दूना योग यदि आप की अवस्था में घटा दिया जाय तो वही इस समय बड़े लड़के का वय है और तीनों लड़कों के अवस्थाओं के घात का पञ्चमांश जो हो उतना वर्ष और आप जीअैं गे तो बतावो कि ज्यौतिषी के प्रकार से उस धनी की परमायु कै वर्ष ठहरी थी? ।

उत्तर, ८० वर्ष ।

हरिगीत ।

यह चलनकलन कृपालदत्तज श्रीसुधाकरकृत महा
महिमा अपार प्रकार आकर जानि जो जन मन गहा ।
येहि लोक सो करि विविध कीरति बुध कहाय शिरोमणी
धन धाम नाम सुकाम पूरित होय गुणिगण अग्रणी ॥

इति श्रीकृपालदत्तात्मजसुधाकरद्विवेदिकृत-
चलनकलन सम्पूर्णम् ॥